1. dio

Podsjetnik

Brojevi

Skup $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ zove se *skup prirodnih brojeva*. U skupu $\mathbf{N}$ izvedive su radnje zbrajanja i množenja. U skupu prirodnih brojeva postoji najmanji član (element), to je 1, a ne postoji najveći član.

Skup $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ jest *skup cijelih brojeva*. Skup $\mathbf{Z}$ uvodi se kao proširenje skupa $\mathbf{N}$ da bi se moglo vršiti oduzimanje. Zato se taj skup može definirati i ovako: $\mathbf{Z} = \{x : \ x = a - b; \ a, b \in \mathbf{N}\}$.

Da bi se moglo vršiti dijeljenje, uvodimo *skup racionalnih brojeva* $\mathbf{Q}$, koji definiramo ovako: $\mathbf{Q} = \{r : \ r = \dfrac{m}{n}; \ m \in \mathbf{Z}, \ n \in \mathbf{N}\}$.

Skupove $\mathbf{N}$, $\mathbf{Z}$ i $\mathbf{Q}$ možemo preslikati na pravac koji se tada zove brojevni pravac. Skup $\mathbf{Q}$ ima svojstvo (koje nemaju skupovi $\mathbf{N}$ i $\mathbf{Z}$): *Između svaka dva racionalna broja postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva.* To se svojstvo zove gustoća skupa $\mathbf{Q}$. Iako je skup $\mathbf{Q}$ gust, na brojevnom pravcu postoje točke koje nisu slika nijednoga racionalnog broja. Brojevi pridruženi tim točkama su *iracionalni brojevi*.

Unija skupa svih racionalnih i skupa svih iracionalnih brojeva jest *skup realnih brojeva*, koji označavamo s $\mathbf{R}$.

Preslikavanje skupa $\mathbf{R}$ na brojevni pravac jest bijekcija.

Kvadrat svakoga realnog broja je nenegativan, to jest: $x \in \mathbf{R} \implies x^2 \geqslant 0$. Zato ne postoji realan broj koji je jednak drugom korijenu iz negativnog broja. Definiramo: $\sqrt{-1} = i$, pri čemu $i \notin \mathbf{R}$, ali je $i^2 = -1 \in \mathbf{R}$. Dalje definiramo: $\mathbf{C} = \{z : \ z = x + yi; \ x, y \in \mathbf{R}, \ i = \sqrt{-1}\}$. $\mathbf{C}$ zovemo *skup kompleksnih brojeva*. Za $y = 0$, $z = x \in \mathbf{R}$. Zato vrijedi: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

Brojevi $z = x + yi$ i $\bar{z} = x - yi$ su dva međusobno konjugirano-kompleksna broja. Vrijedi: $\overline{x + yi} = x - yi$, $\overline{x - yi} = x + yi$ ili kraće $\bar{\bar{z}} = z$.

Za računanje s kompleksnim brojevima $u = a + bi$ i $v = c + di$ vrijedi $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$, $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$ $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$, $(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$. $\dfrac{a + bi}{c + di} = \dfrac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$.

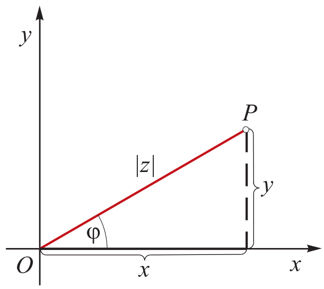
Za realan broj x definira se nenegativan realan $|x|$ koji se zove apsolutna vrijednost broja x i vrijedi:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Apsolutna vrijednost ili modul kompleksnog broja $z = x + yi$ definira se: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$, $z\bar{z} = |z|^2$.

Kompleksne brojeve predočujemo u koordinatnoj ravini, koju zovemo brojevna ili Gaussova ravnina.

Tako je, na slici, broju $z = x + yi$ pridružena točka P ili općenito $(x + yi) \mapsto (x, z)$. Ovo preslikavanje je bijektivno. Vrijedi $|OP|^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$. Često označujemo $|OP| = |z| = r$.



Kut što ga polupravac OP određuje s $+x$ poluosi zove se argument kompleksnog broja i obično označava $\arg z = \varphi$.

Iz $x = r\cos\varphi$ i $y = r\sin\varphi$ imamo $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, što je trigonometrijski zapis kompleksnog broja. Ovaj zapis je pogodan za potenciranje i korjenovanje kompleksnih brojeva. Vrijede pravila: $z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r\sqrt{(}\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)$; $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Ovo su Moivreove formule. Drugu formulu koristimo također i za korjenovanje realnih brojeva. Ako je x realan broj $(x \neq 0)$, tada postoji n različitih kompleksnih brojeva koji su svi jednaki $\sqrt[n]{x}$. Vrijedi:

$$\sqrt[n]{x} = \begin{cases} \sqrt[n]{|x|} \cdot \sqrt[n]{1}, & x > 0, \\ \sqrt[n]{|x|} \cdot \sqrt[n]{-1}, & x < 0, \end{cases}$$

gdje je $\sqrt[n]{|x|}$ realni korijen iz pozitivnoga realnog broja.

Točke Gaussove ravnine pridružene kompleksnim brojevima $\sqrt[n]{1}$ $(n \in \mathbf{N},\ n > 2)$ su vrhovi pravilnog n-terokuta upisanog u jediničnu kružnicu sa središtem u ishodištu, pri čemu je jedan vrh točka $(1, 0)$. Točke pridružene kompleksnim brojevima $\sqrt[n]{-1}$ $(n \in \mathbf{N}, n > 2)$ su vrhovi pravilnog n-terokuta upisanog u istu kružnicu kojemu je jedan vrh točka $(-1, 0)$.

Potencije i korijeni

Potencija s osnovom (bazom) a i prirodnim eksponentom n jest kraći zapis umnoška od n faktora jednakih a.

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ faktora}} = a^n$$

Za računanje s potencijama vrijede pravila:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$,
2) $a^m : a^n = a^{m-n}$,

3) $a^n \cdot b^n = (ab)^n$,

4) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$,

5) $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$,

6) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$,

7) Za svaki $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ vrijedi $a^0 = 1$.

Ako su $m, n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}^+$, vrijedi $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, zbog čega se računanje s korijenima svodi na računanje s potencijama. Na primjer:

$$\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}.$$

Neke važne formule:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$

$(a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$.

Binomni poučak

Za prirodan broj n i $r \in \mathbf{N}_0$; $0 \leqslant r \leqslant n$ definiramo

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-r+1)}{r!}, \text{ gdje je } r! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot r.$$

Brojeve $\binom{n}{r}$ zovemo binomni koeficijent, za koje vrijede dvije temeljne formule:

1) $\dbinom{n}{n-r} = \dbinom{n}{r}$

2) $\dbinom{n}{r} + \dbinom{n}{r+1} = \dbinom{n+1}{r+1}$

Na temelju tih formula može se oblikovati Pascalov trokut za binomne koeficijente.

Svaki se koeficijent jednog retka (osim prvog i posljednjeg koji su jednaki 1) može dobiti iz dvaju koeficijenata iz prethodnog retka. Tako je iz istaknutog "trokuta" $6 + 4 = 10$.

Iz istaknutog retka (redak s koeficijentima 1, 7, 21, ...) odredimo

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7.$$

Općenito vrijedi:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

ili u kraćem zapisu $(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$.

Isto vrijedi $(a-b)^n = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}a^{n-r}b^r$.

Geometrija

Temeljni geometrijski pojmovi su: točka, pravac i ravnina. Oni se ne definiraju. Geometrija je, a time i cijela matematika, već od Euklida aksiomatski zasnovana znanost.

Pravac koji je okomit na dužinu i prolazi njenim polovištem zove se simetrala te dužine. *Svaka točka simetrale dužine jednako je udaljena od rubnih točaka te dužine.*

Ako je C točka pravca AB, tada točka C dijeli dužinu $\overline{AB}$ u omjeru λ, ako je $\frac{|AC|}{|BC|} = \lambda$.

Duljina jedne stranice trokuta veća je od razlike, a manja od zbroja duljina inih dviju stranica tog trokuta. Za trokut duljina stranica a, b i c, to iskazujemo ovako: $|b-c| < a < b+c$, $|c-a| < b < c+a$, $|a-b| < c < a+b$.

Kut nasuprot većoj od dviju stranica trokuta je veći od kuta nasuprot manjoj od tih dviju stranica trokuta.

Zbroj unutarnjih kutova trokuta je 180°. *Zbroj vanjskih kutova trokuta je* 360°.

Zbroj unutarnjih kutova višekuta s n *stranica jednak je* $(n-2)\cdot 180^\circ$.

Zbroj vanjskih kutova višekuta ne zavisi o broju stranica višekuta. To znači da vrijedi: *zbroj vanjskih kutova svakog višekuta jednak je* 360°.

Zbroj dijagonala konveksnog višekuta s n *stranica jednak je* $\frac{n(n-3)}{2}$.

Simetrale stranica trokuta sijeku se u jednoj točki. Ta je točka središte trokutu opisane kružnice.

Simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki. Ta je točka središte trokutu upisane kružnice.

Spojnica vrha trokuta i polovišta nasuprotne stranice zove se težišnica trokuta.

Svaka težišnica dijeli trokut na dva trokuta jednakih ploština. Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki koju zovemo težište trokuta. *Težište dijeli svaku težišnicu u omjeru* $2:1$, *mjereći od pripadnog vrha.* Težišnice trokuta dijele trokut na šest trokuta jednakih ploština.

Ako je T težište trokuta ABC, tada vrijedi: $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \overrightarrow{0}$.

Ako je O bilo koja točka, a T težište trokuta ABC, tada vrijedi

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3 \cdot \overrightarrow{OT}.$$

Spojnica polovišta dviju stranica trokuta zove se srednjica trokuta.

Srednjica koja spaja polovišta dviju stranica usporedna je s trećom stranicom tog trokuta. Duljina te srednjice jedanaka je polovici duljine treće stranice trokuta.

Spojnica vrha trokuta i nožišta okomice povučene iz tog vrha na pravac nasuprotne stranice zove se visina trokuta.

Pravci visina trokuta sijeku se u jednoj točki koja se zove ortocentar trokuta.

Umnošci dvaju odsječaka što ih ortocentar određuje na svakoj visini trokuta su jednaki.

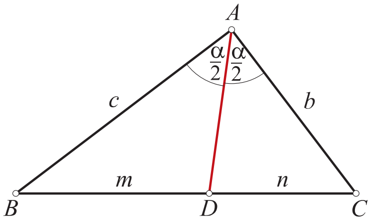
Ako su a, b i c duljine stranica trokuta, a t_a, t_b i t_c duljine težišnica trokuta, tada vrijedi:

1) $4t_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2$, $4t_b^2 = 2(c^2 + a^2) - b^2$, $4t_c^2 = 2(a^2 + b^2) - c^2$

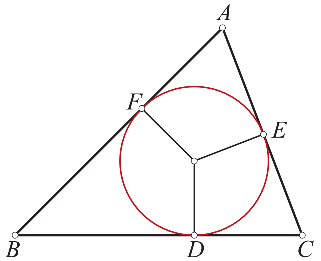
2) $(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) : (a^2 + b^2 + c^2) = 3 : 4$

Udaljenost ortocentra od jednog vrha trokuta jednaka je dvostrukoj udaljenosti središta trokutu opisane kružnice od nasuprotne stranice trokuta.

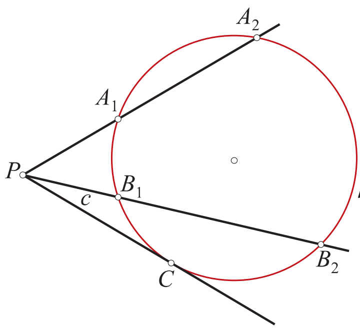
Ako simetrala kuta trokuta pri vrhu A siječe nasuprotnu stranicu u točki D, tada vrijedi: $|BD| : |CD| = |AB| : |AC|$ ili kraće $m : n = c : b$. Vrijede analogne formule za simetrale inih dvaju kutova.

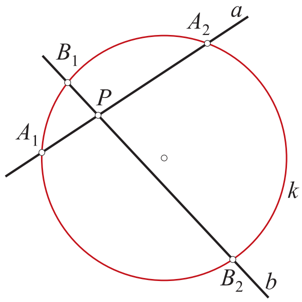


Ako su D, E i F dirališta kružnice upisane trokutu ABC sa stranicama trokuta kao na slici, tada vrijedi: $|AE| = |AF| = s - a$, $|BF| = |BD| = s - b$, $|CD| = |CE| = s - c$, gdje su a, b i c duljine stranica, a $s = \dfrac{a+b+c}{2}$.



Ako su iz točke P povučeni polupravci a, b i c, pri čemu polupravci a i b sijeku kružnicu k u točkama A_1, A_2; odnosno B_1, B_2, a polupravac c je tangenta kružnice s diralištem u točki C, tada vrijedi: $|PA_1| \cdot |PA_2| = |PB_1| \cdot |PB_2| = |PC|^2$.

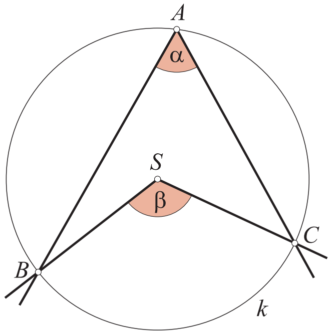




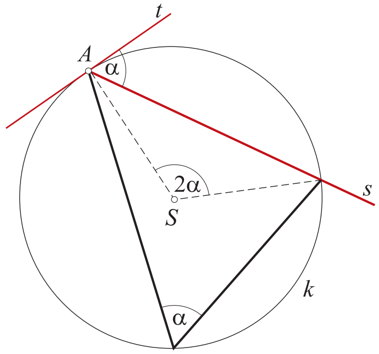
Vrijednost ovog umnoška zove se potencija točke P s obzirom na kružnicu k.

Ako je P unutarnja točka kružnice k, tada su umjesto polupravaca povučeni pravci a i b, a tangenta ne postoji. Zato vrijedi samo $|PA_1| \cdot |PA_2| = |PB_1| \cdot |PB_2|$.

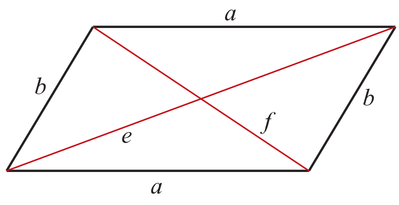
Ako su A, B i C bilo koje tri točke kružnice k sa središtem S, tada se kut $\sphericalangle CSB = \beta$ zove središnji, a $\sphericalangle CAB = \alpha$ obodni kut. Svakom obodnom kutu jednoznačno je pridružen središnji kut. Obratno ne vrijedi, tj. središnjem kutu CSB odgovara beskonačno mnogo pripadnih obodnih kutova.



Mjera središnjeg kuta jednaka je dvostrukoj mjeri pripadnog obodnog kuta, tj. $\beta = 2\alpha$. Također vrijedi: *obodni kutovi nad istim ili nad jednakim lukovima su jednaki.*



Kut što ga određuje tangenta (t) i sekanta (s) kružnice koja prolazi diralištem tangente (točka A) jednak je obodnom kutu nad lukom sekante kružnice.



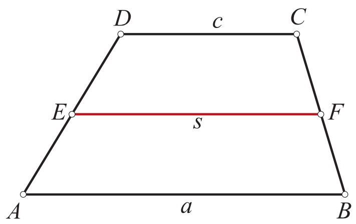
Četverokut je paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju.

Nasuprotni kutovi paralelograma su jednaki, a susjedni suplementni.

Dijagonale romba su međusobno okomite.

Eulerov poučak za paralelogram:
zbroj kvadrata duljina dijagonala paralelograma jednak je zbroju kvadrata duljina stranica paralelograma,

$$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2).$$

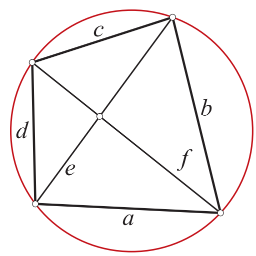


Spojnica polovišta krakova trapeza zove se srednjica trapeza.

Srednjica trapeza je usporedna s osnovicama trapeza. Duljina srednjice trapeza jednaka je poluzbroju duljina osnovica.

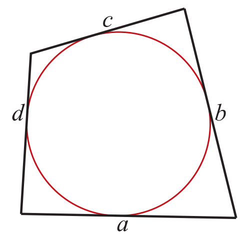
$$AB \| EF \| DC,$$

$$|EF| = s = \frac{a+c}{2} = \frac{|AB| + |DC|}{2}.$$



Četverokut kojemu se može opisati kružnica jest tetivan četverokut. *Zbroj dvaju nasuprotnih kutova tetivnog četverokuta jednak je* 180°.

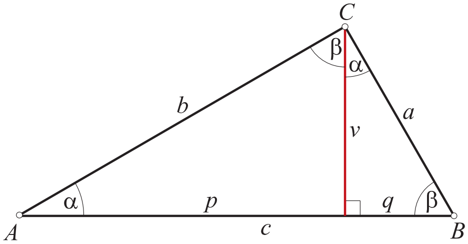
Ptolomejev poučak za tetivni četverokut iskazujemo formulom: $ef = ac + bd$.



Četverokut kojemu se može upisati kružnica jest tangencijalan četverokut.

Zbroj duljina dviju nasuprotnih stranica tangencijalnog četverokuta jednak je zbroju duljina inih dviju stranica četverokuta $a + c = b + d$.

Trokut kojemu sve tri stranice imaju jednake duljine zove se jednakostraničan trokut. Ako je a duljina stranice, v visina, a P ploština jednakostraničnog trokuta, tada vrijedi: $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

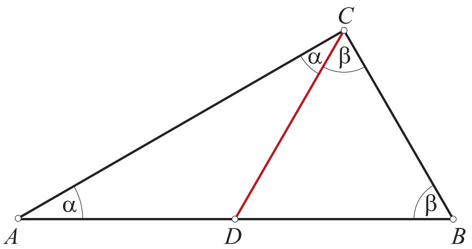


Trokut kojemu je jedan kut pravi jest pravokutan. Stranice koje određuju pravi kut su katete, a stranica nasuprot vrhu pravog kuta je hipotenuza.

Za pravokutan trokut su uobičajene oznake kao na slici.

Visina (iz vrha pravog kuta) dijeli pravokutni trokut na dva pravokutna trokuta koji su međusobno slični i slični polaznom trokutu.

Težišnica iz vrha pravog kuta pravokutnog trokuta dijeli pravi kut na dva kuta od kojih je po jedan jednak šiljastom kutu tog trokuta. To možemo iskazati i ovako.



Težišnica iz vrha pravog kuta dijeli pravokutni trokut na dva jednakokračna trokuta.

Središte pravokutnom trokutu opisane kružnice podudara se s polovištem hipotenuze. Zato je $c = 2R$, gdje je c duljina hipotenuze, a R polumjer pravokutnom trokutu opisane kružnice.

Ako su a i b duljine kateta, c duljina hipotenuze, a R i r polumjeri opisane i upisane kružnice pravokutnog trokuta, tada vrijedi: $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, $R + r = \dfrac{a+b}{2}$.

Pitagorin poučak: trokut je pravokutan ako i samo ako mu je zbroj kvadrata duljina dviju stranica jednak kvadratu duljine treće stranice. To se zapisuje ovako: $a^2 + b^2 = c^2 \iff \gamma = 90^\circ$.

Euklidov poučak: uz uobičajene oznake za elemente pravokutnog trokuta vrijedi:

1) $v = \sqrt{pq}$

2) $a = \sqrt{cp}$, $b = \sqrt{cq}$

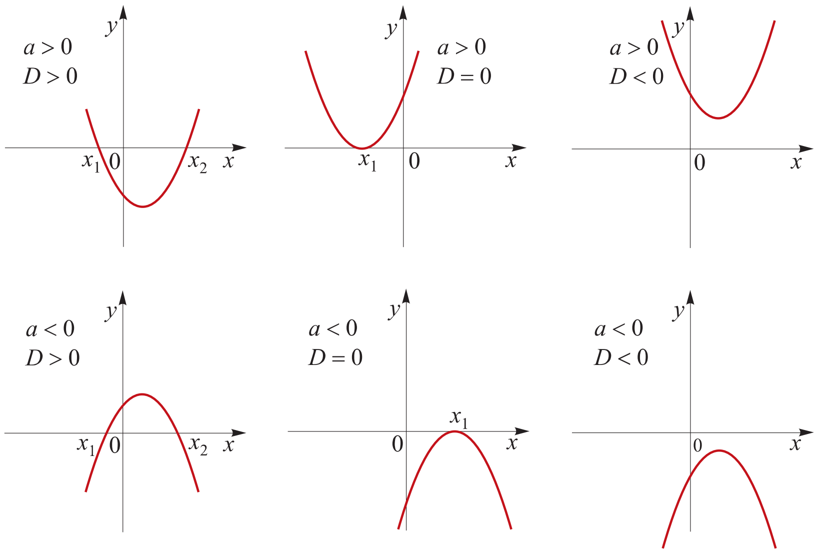
(Zanimljivo je da obrat Euklidovog poučka ne vrijedi.)

Kvadratna funkcija i kvadratna jednadžba

Funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$; $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ jest polinom drugog stupnja ili kvadratna funkcija.

Graf kvadratne funkcije jest parabola s tjemenom u točki $V = \left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{D}{4a}\right)$, gdje je $D = b^2 - 4ac$, a os parabole je usporedna s osi ordinata.

Položaj parabole prema koordinatnom sustavu zavisi o predznacima od a i od D. Postoji šest različitih slučajeva.



Nultočke funkcije $f(x) = a^2 + bx + c$ su rješenja jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$. Ova se jednadžba zove algebarska jednadžba drugog stupnja ili kvadratna jednadžba.

Rješenja kvadratne jednadžbe nađemo po formuli: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ili $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Narav rješenja kvadratne jednadžbe zavisi o predznaku diskriminante $D = b^2 - 4ac$. Postoje tri slučaja:

1) $D > 0$, jednadžba ima dva realna međusobno različita rješenja, to jest x_1, $x_2 \in \mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2$.

2) $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje: $x_1 = x_2 \in \mathbf{R}$

3) $D < 0$, jednadžba ima dva konjugirano-kompleksna rješenja, to jest: $x_1, x_2 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, $x_2 = \overline{x_1} \iff x_1 = \overline{x_2}$.

Kvadratna jednadžba je normirana ako je vodeći koeficijent jednak 1. Jednadžbu $ax^2 + bx + c = 0$ možemo normirati (zbog $a \neq 0$) dijeljenjem s a i dobijemo $x^2 + \dfrac{b}{a}x = \dfrac{c}{a} = 0$ ili $x^2 + px + q = 0$, gdje je $p = \dfrac{b}{a}$, $q = \dfrac{c}{a}$.

Vezu između rješenja i koeficijenta kvadratne jednadžbe daju slijedeće Vièteove formule: $x_1 + x_2 = -p = -\dfrac{b}{a}$ i $x_1 \cdot x_2 = q = \dfrac{c}{a}$.

Kvadratna funkcija $f(x)$ (općenitije svaka neprekinuta funkcija) ima nultu točku na intervalu $\langle u, v \rangle$, ako je $\operatorname{sgn} f(u) = -\operatorname{sgn} f(v)$ ili jednostavnije $f(u) \cdot f(v) < 0$.

Polinomi

Neka su $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ realni brojevi, pri čemu je $a_n \neq 0$, tada se funkcija $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ili $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ zove polinom n-tog stupnja. Brojevi $a_0, a_1, \ldots, a_n$ su koeficijenti polinoma. Monomi $a_k x^k (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ su članovi polinoma. Vidimo da je a_0 jedini koeficijent koji je ujedno i član polinoma.

Ako za broj α vrijedi $f(\alpha) = 0$, kažemo da je α nultočka polinoma $f(x)$.

Ako je α nultočka polinoma $f(x)$ stupnja n, tada postoji polinom $g(x)$ stupnja $(n-1)$ takav da vrijedi $f(x) = (x-\alpha) \cdot g(x)$.

Ako je α nultočka polinoma $f(x)$ i ako postoji polinom $h(x)$ takav da vrijedi $f(x) = (x-\alpha)^2 \cdot h(x)$, kažemo da je α dvostruka nultočka polinoma $f(x)$. Isto se tako definira trostruka, četverostruka, općenito nultočka kratnosti $k, k \in \mathbf{N}, k > 1$.

Ako je $f(x)$ polinom n-tog stupnja, tada se jednadžba $f(x) = 0$ zove algebarska jednadžba n-tog stupnja.

Za $n = 1$, to je linearna jednadžba $a_1x + a_0 = 0$; za $n = 2$, kvadratna jednadžba $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ (uobičajenije $ax^2 + bx + c = 0$).

Iskazat ćemo osnovni stavak algebre.

Polinom n-tog stupnja s realnim koeficijentima ima u skupu $\mathbf{C}$ točno n nultočaka, pri čemu se svaka nultočka broji onoliko puta kolika je njena kratnost.

Što se može iskazati i ovako.

Algebarska jednadžba n-tog stupnja ima točno n rješenja pri čemu se svako rješenje broji onoliko puta kolika mu je kratnost.

Ako je α_1 kompleksna nultočka polinoma $f(x)$ s realnim koeficijentima, tada je i broj $\alpha_2 = \overline{\alpha_1}$ također nultočka polinoma $f(x)$.

To znači da se kompleksna rješenja algebarske jednadžbe s realnim koeficijentima pojavljuju u parovima konjugirano-kompleksnih brojeva. Zato vrijedi: *svaka algebarska jednadžba neparnog stupnja s realnim koeficijentima ima barem jedno realno rješenje.*

Ako za polinome $f(x)$ i $g(x)$ postoji polinom $q(x)$, takav da vrijedi $f(x) = g(x) \cdot q(x)$, kažemo da je polinom $f(x)$ djeljiv polinomom $g(x)$.

Polinom $f(x)$ je djeljiv polinomom $g(x)$ ako i samo ako je svaka nultočka polinoma $g(x)$ ujedno i nultočka polinoma $f(x)$ s istom kratnosti.

Ako polinom $f(x)$ nije djeljiv polinomom $g(x)$, tada su jednoznačno određeni polinomi $q(x)$ i $r(x)$, tako da vrijedi: $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$, pri čemu je $\operatorname{st} r(x) < \operatorname{st} g(x)$.

Polinom $r(x)$ zove se ostatak pri dijeljenju polinoma $f(x)$ polinomom $g(x)$.

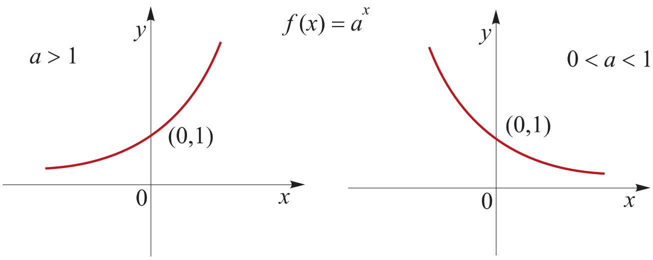
Ako je α nultočka polinoma $g(x)$, tada vrijedi $r(\alpha) = f(\alpha)$.

Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$, $f(x) = a^x$; $a \in \mathbf{R}^+$, $a \neq 1$ zove se eksponencijalna funkcija s osnovom (bazom) a. Eksponencijalna funkcija ima sljedeća svojstva:

1) *funkcija je rastuća za* $a > 1$, *a padajuća za* $0 < a < 1$*;*
2) *graf svake eksponencijalne funkcije sadrži točku* $(0, 1)$*;*
3) a) $f(u) \cdot f(v) = f(u + v)$, b) $\dfrac{f(u)}{f(v)} = f(u - v)$,
   c) $(f(u))^v = (f(v))^u = f(uv)$;
4) asimptota grafa funkcije je $-x$ poluos za $a > 1$, a $+x$ poluos za $0 < a < 1$.

Zato postoje dva karakteristična grafa eksponencijalne funkcije.



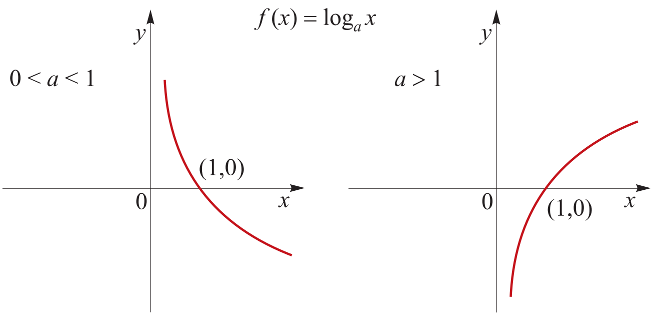
Funkcija $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $f(x) = \log_a x$; $a \in \mathbf{R}^+$, $a \neq 1$ jest logaritamska funkcija s osnovom (bazom) a.

Eksponencijalna funkcija (a^x) i logaritamska funkcija $(\log_a x)$ su dvije međusobno inverzne funkcije. Zato vrijedi: $a^{\log_a x} = \log_a(a^x) = x$.

Svojstva logaritamske funkcije:

1) funkcija je rastuća za $a > 1$, a padajuća za $0 < a < 1$;
2) graf svake logaritamske funkcije sadrži točku $(1, 0)$. Asimptota grafa logaritamske funkcije je $-y$ poluos za $a > 1$, $a + y$ poluos za $0 < a < 1$.

Postoje dva karakteristična grafa logaritamske funkcije.



Pravila za logaritmiranje:

1) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$,

2) $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y\,,$

3) $\log_a x^n = n \cdot \log_a x\,,$

4) $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d \cdot \ldots \cdot \log_u v \cdot \log_v x = \log_a x\,,$

5) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}\,,$

6) $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}\,,$

7) $\log_{a^k} x = \dfrac{1}{k} \log_a x\,,$

8) $\log_{ab} c = \dfrac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c}\,.$

Nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine

Za pozitivne brojeve $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ definiramo: $A = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$. Broj A zovemo aritmetička sredina, a broj G geometrijska sredina brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Vrijedi nejednakost:

$$\min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \leqslant \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \leqslant \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

pri čemu vrijedi jednakost samo ako je $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

To kratko iskazujemo: geometrijska sredina nije veća od aritmetičke sredine, tj. $G \leqslant A$.

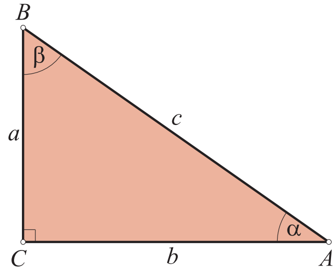
Najčešće se koristi nejednakost geometrijske i aritmetičke sredine dviju pozitivnih brojeva x i y ili x^2 i y^2.

Vrijedi $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$, $2\sqrt{xy} \leqslant x + y$ ili $xy \leqslant \dfrac{x^2 + y^2}{2}$, $2xy \leqslant x^2 + y^2$.

Trigonometrija

Uz uobičajene oznake za elemente pravokutnog trokuta, kao na slici, vrijede definicije trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta pravokutnog trokuta:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\ \cos\alpha = \frac{b}{c},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$



$$\sin\beta = \frac{b}{c},\ \cos\beta = \frac{a}{c},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a},\ \operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}.$$

Vrijednosti trigonometrijskih kutova iz intervala $\left\langle \frac{\pi}{2}, 2\pi \right\rangle$ mogu se izraziti pomoću vrijednosti trigonometrijskih funkcija šiljastog kuta. Ako je α šiljasti kut, vrijedi:

$$\begin{array}{ll}
\sin(90^\circ+\alpha) = \cos\alpha, & \cos(90^\circ+\alpha) = -\sin\alpha,\\
\operatorname{tg}(90^\circ+\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, & \operatorname{ctg}(90^\circ+\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.\\[1em]
\sin(180^\circ-\alpha) = \sin\alpha, & \cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha,\\
\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, & \operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.\\[1em]
\sin(180^\circ+\alpha) = -\sin\alpha, & \cos(180^\circ+\alpha) = -\cos\alpha,\\
\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha, & \operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha) = \operatorname{ctg}\alpha.\\[1em]
\sin(360^\circ-\alpha) = -\sin\alpha, & \cos(360^\circ-\alpha) = \cos\alpha,\\
\operatorname{tg}(360^\circ-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, & \operatorname{ctg}(360^\circ-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.
\end{array}$$

Predznaci vrijednosti trigonometrijskih funkcija po kvadrantima:

	I.	II.	III.	IV.
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+
tg	+	−	+	−
ctg	+	−	+	−

Parnost trigonometrijskih funkcija:

$$\begin{array}{ll}
\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, & \cos(-\alpha) = \cos\alpha\\
\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, & \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha
\end{array}$$

Funkcija $\cos$ je parna, a funkcije $\sin$, tg i ctg su neparne.

Temeljne veze među trigonometrijskim funkcijama:

$$\begin{aligned}
&\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\\
&\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha,\\
&\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha,\\
&\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1.
\end{aligned}$$

Vrijednost svake trigonometrijske funkcije nekog kuta može se izraziti pomoću vrijednosti bilo koje od inih funkcija tog kuta. To je pokazano u sljedećoj tablici.

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha$	—	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	—	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	—	$\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	—

Predznak odredimo na temelju kvadranta u kojem se nalazi kut α. Trigonometrijske funkcije su periodne.

Temeljne periode funkcija $\sin$ *i* $\cos$ *su* 2π, *a funkcija* tg *i* ctg π. To zapisujemo:

$$\begin{aligned}
\sin(x+2\pi) &= \sin x,\\
\cos(x+2\pi) &= \cos x,\\
\operatorname{tg}(x+\pi) &= \operatorname{tg} x,\\
\operatorname{ctg}(x+\pi) &= \operatorname{ctg} x.
\end{aligned}$$

Na temelju svojstava periodnih funkcija također vrijedi:

$$\begin{aligned}
&\sin(x+2k\pi) = \sin x,\\
&\cos(x+2k\pi) = \cos x,\\
&\operatorname{tg}(x+k\pi) = \operatorname{tg} x,\\
&\operatorname{ctg}(x+k\pi) = \operatorname{ctg} x,
\end{aligned}$$

gdje je $k \in \mathbf{Z}$.

Adicijski poučci za trigonometrijske funkcije:

$$\begin{aligned}
&\sin(x\pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x \sin y,\\
&\cos(x\pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x \sin y,\\
&\operatorname{tg}(x\pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},\\
&\operatorname{ctg}(x\pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}.
\end{aligned}$$

Pretvorbene formule za trigonometrijske funkcije:

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\
\sin x - \sin y &= 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2},\\
\cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\
\cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},\\
\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y &= \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y},\\
\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y &= \frac{\sin(y\pm x)}{\sin x\sin y},\\
\sin x\sin y &= \frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)],\\
\cos x\cos y &= \frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)].
\end{aligned}$$

Trigonometrijske funkcije dvostrukog kuta:

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha,\\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,\\
\operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\\
\operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha},
\end{aligned}$$

Trigonometrijske funkcije polovičnog kuta:

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\\
\cos\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\\
\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\\
\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\sin\alpha}}.
\end{aligned}$$

Predznak odredimo na temelju kvadranta u kojem se nalazi kut $\dfrac{\alpha}{2}$.

Poučak o sinusima:

$$a = 2R\sin\alpha,\quad b = 2R\sin\beta,\quad c = 2R\sin\gamma;$$
$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma.$$

gdje su a, b, c – duljine stranica; α, β, γ – nasuprotni kutovi i R polumjer trokutu opisane kružnice.

Poučak o kosinusima zapisujemo na dva načina:

1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$,
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$,
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$,

2) $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,
$\cos\beta = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$,
$\cos\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

Poučak o tangensima:

$$(a+b):(a-b) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$(b+c):(b-c) = \operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2},$$
$$(c+a):(c-a) = \operatorname{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2} : \operatorname{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

Formule za ploštinu nekih likova

Ploština trokuta: uz oznake: a, b, c – duljine stranica; v_a, v_b, v_c – odgovarajuće visine, $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ poluopseg trokuta; α, β, γ – nasuprotni kutovi trokuta; R polumjer trokutu opisane kružnice i r polumjer trokutu upisane kružnice, vrijedi:

1) $P = \dfrac{1}{2}av_a = \dfrac{1}{2}bv_b = \dfrac{1}{2}cv_c$

2) $P = r \cdot s$

3) $P = \dfrac{abc}{4R}$

4) $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

5) $P = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha = \dfrac{1}{2}ca\sin\beta$

6) $P = \dfrac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha} = \dfrac{b^2\sin\gamma\sin\alpha}{2\sin\beta} = \dfrac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\gamma}$

7) $P = 2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

8) $P = \dfrac{1}{2}R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$

9) $P = \frac{1}{2}|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)|$, gdje su (x_1, y_1), (x_2, y_2) i (x_3, y_3) koordinate vrhova trokuta.

Ploština paralelograma duljina stranica a i b i jednog unutarnjeg kuta α je jednaka: $P = ab \sin\alpha$.

Ploština trapeza duljina osnovica a i c i visine v je jednaka $P = \frac{a+c}{2} \cdot v$.

Ploština četverokuta duljina dijagonala e i f i kuta φ što ga određuju te dijagonale je jednaka $P = \frac{1}{2} e \cdot f \sin\varphi$.

Ploština četverokuta okomitih dijagonala duljina e i f je $P = \frac{1}{2} e \cdot f$.

Ploština pravilnog šesterokuta duljine stranice a je jednaka $P = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$.

Vektori

Uređen par točaka (A, B) zovemo vektorom s početkom u točki A i završetkom u točki B i označujemo $\overrightarrow{AB}$. (Vektori se općenitije definiraju kao elementi vektorskog prostora, ali je za srednjoškolski program iz matematike dostatna ova definicija.)

Vektori se označuju i malim slovima ovako $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$, $\vec{x}$, ... Za udaljenost rubnih točaka vektora $\overrightarrow{AB}$ vrijedi $|AB| = |\overrightarrow{AB}|$ pri čemu $|\overrightarrow{AB}|$ zovemo duljina, iznos ili modul vektora $\overrightarrow{AB}$.

Ako vektor označujemo malim slovom, na primjer $\vec{v}$, tada duljinu tog vektora označujemo $|\vec{v}|$, ili kraće samo v.

Za vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ kažemo da imaju isti smjer ako i samo ako su pravci AB i CD usporedni.

Ako su O, A i B tri kolinearne točke, tada vektori $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ imaju istu orijentaciju ako su točke A i B s iste strane točke O. Ako je točka O između točaka A i B, tada ti vektori imaju suprotnu orijentaciju.

Pazi! Vektori mogu imati jednake ili različite duljine, iste ili različite smjerove i iste ili suprotne orijentacije.

Dva vektora su jednaka ako i samo ako imaju jednake duljine, isti smjer i istu orijentaciju.

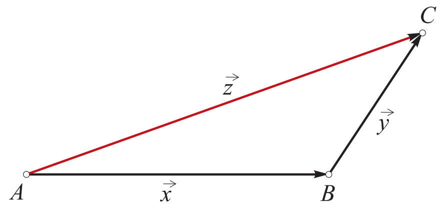
Ova definicija je ekvivalentna sljedećoj definiciji.

Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ su jednaki ako i samo ako dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ imaju zajedničko polovište.

Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$ očito imaju jednake duljine i isti smjer, ali su suprotne orijentacije. Takvi se vektori zovu suprotni vektori, što se označuje: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. Općenito vektor suprotan vektoru $\vec{a}$ označujemo $-\vec{a}$.

Za svaki vektor $\vec{v}$ i svaku točku O ravnine (općenitije prostora) postoji jednoznačno određena točka T, tako da je $\vec{v} = \overrightarrow{OT}$. Kažemo da je $\overrightarrow{OT}$ radijvektor točke T s obzirom na ishodište O.

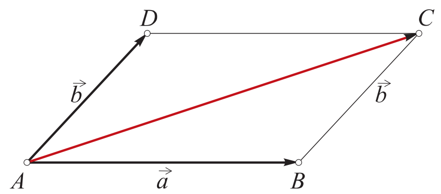
Ako su A, B i C bilo koje tri točke, vrijedi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Prema tome za vektore $\vec{x}, \vec{y}$ i $\vec{z}$ na slici vrijedi: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{z}$.



Ovo se pravilo zove pravilo trokuta za zbrajanje vektora.

Ekvivalentno pravilu trokuta je pravilo paralelograma.

Ako je $ABCD$ paralelogram i $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, tada zbog $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b}$, vrijedi: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, tj. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.



Vektor kojemu je početak i završetak u istoj točki zove se nulvektor, koji označujemo $\vec{0}$. Na primjer $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$, $\overrightarrow{QQ} = \vec{0}$. Svi nulvektori su međusobno jednaki. Za nulvektor smjer i orijentacija se ne definiraju.

Budući da je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$, za svaki vektor $\vec{a}$ vrijedi $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$, što kraće pišemo $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$. Također, za svaki vektor $\vec{v}$ vrijedi $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$.

Oduzimanje dvaju vektora svodi se na zbrajanje suprotnog vektora, to jest $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Za zbrajanje vektora vrijedi: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Umnožak vektora i realnog broja je vektor.

Ako je $\vec{x}$ bilo koji vektor, $\vec{x} \neq \vec{0}$ i $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, tada je $\alpha \cdot \vec{x} = \alpha\vec{x}$ vektor za koji vrijedi $|\alpha\vec{x}| = |\alpha| \cdot |\vec{x}|$, pri čemu su vektori $\vec{x}$ i $\alpha\vec{x}$ istog smjera i iste orijentacije, ako je $\alpha > 0$; a istog smjera i suprotne orijentacije ako je $\alpha < 0$.

Ako su O, E i A kolinearne točke i E i A s iste strane točke O, te ako je $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{a_0}$ i $|OE| = 1$, tada vektor $\overrightarrow{a_0}$ zovemo jediničnim vektorom vektora $\vec{a}$. Za svaki vektor $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ i pripadni jedinični vektor $\overrightarrow{a_0}$ vrijedi $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \overrightarrow{a_0}$ ili $\overrightarrow{a_0} = \dfrac{1}{|\vec{a}|} \cdot \overrightarrow{a_0}$. Jedinični vektor nulvektora se ne definira.

Ako je $A(x,y)$ bilo koja točka koordinatne ravnine, a $\vec{\imath}$ i $\vec{\jmath}$ jedinični vektori koordinatnih osiju x i y, tada vrijedi $\overrightarrow{OA} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.

Ako su $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ dvije točke koordinatne ravnine, tada je $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\vec{\jmath}$.

Svaki vektor $\vec{v}$ u koordinatnoj ravnini možemo pisati u obliku $\vec{v} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$, gdje $v_x = x_2 - x_1$, $v_y = y_2 - y_1$. Iz Pitagorinog poučka vrijedi: $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$.

Za bilo koja dva vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ koordinatne ravnine definiramo: umnožak duljina dvaju vektora i kosinusa kuta što ga određuju ti vektori zove se skalarni umnožak tih dvaju vektora. Zapisujemo: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot \vec{b} \cdot \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$.

Označimo li $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$, imamo kraći zapis skalarnog umnoška $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\varphi$.

Budući da je $\cos\frac{\pi}{2} = 0$, zaključujemo da je skalarni umnožak dvaju okomitih vektora jednak nuli.

Skalarni kvadrat bilo kojeg vektora jednak je kvadratu modula tog vektora. To slijedi iz $\vec{x}^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} = |\vec{x}| \cdot |\vec{x}| \cdot \cos 0 = |\vec{x}|^2$. Zato je $\vec{\imath}^2 = \vec{\jmath}^2 = 1$, $\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{\imath} = 0$.

Ako su $\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath}$ i $\vec{b} = b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath}$ bilo koja dva vektora, tada vrijedi: $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath})(\vec{b}\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath}) = a_xb_x + a_yb_y$. Također vrijedi: $\cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y}{\sqrt{a_x^2 + b_x^2} \cdot \sqrt{a_y^2 + b_y^2}}$

Ako je O bilo koja točka, a C polovište dužine $\overline{AB}$, tada vrijedi $\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

Ako je T težište trokuta ABC, vrijedi $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = \vec{0}$.

Ako je O bilo koja točka, a T težište trokuta ABC, tada vrijedi $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OT}$. Ako je S središte opisane kružnice, a H ortocentar trokuta ABC, tada vrijedi Hamiltonov poučak: $\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}$.

Analitička geometrija

Ako su $A(x_1, y_1)$ i $B(x_2, y_2)$ dvije točke koordinatne ravnine, a $C(x,y)$ polovište dužine $\overline{AB}$, tada je $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

Ako su $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ vrhovi a $T(x,y)$ težište trokuta ABC, tada vrijedi $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, $y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.