1.

Skupovi brojeva

1.1. Ponovimo

Skupovi

U matematici nove pojmove uvodimo, definiramo, s pomoću već poznatih. Postoji i jedan mali broj temeljnih pojmova koje nije moguće objasniti s pomoću jednostavnijih. Jedan od njih je pojam skupa. Iako ne postoji definicija skupa, nije teško predočiti što skup jest.

Svaki je skup sastavljen od elementa objedinjenih u jednu cjelinu. Smatramo da je skup određen ako su u potpunosti poznati svi njegovi elementi. Najčešće se zadaje tako da se popišu svi njegovi elementi, primjerice: $A = \{a, e, i, o, u\}$.

Može se zadati i nekim svojstvom koje je zajedničko za sve njegove elemente i u potpunosti ga određuje.

Na primjer, skup A mogli smo zadati i na sljedeći način: $A = \{$skup svih samoglasnika$\}$ ili $A = \{a : a$ je slovo abecede, a je samoglasnik$\}$. Činjenicu da a pripada skupu A pišemo: $a \in A$. Isto tako, činjenicu da slovo b nije element skupa A možemo zapisati simbolički: $b \notin A$.

Po dogovoru uveden je i **prazan skup** (oznaka $\emptyset$) kao skup koji ne sadrži nijedan element.

Neka su A i B dva skupa. Ako je B dio skupa A, kažemo da je B **podskup** od A. Preciznije, B je podskup skupa A ako je svaki element skupa B ujedno i element skupa A (oznaka $B \subseteq A$).

Ako je B podskup od A te ako postoji bar jedan element skupa A koji nije element skupa B, kažemo da je B **pravi** podskup od A (pišemo $B \subset A$).

Tako je na primjer skup svih samoglasnika podskup skupa koji sadrži sva slova abecede. Taj je podskup pravi jer postoje slova abecede koja nisu samoglasnici.

Skupovi A i B su jednaki (oznaka $A = B$) ako imaju iste elemente.

Na primjer, skupovi $A = \{a, e, i, o, u\}$ i $B = \{a, i, o, e, u\}$ jednaki su.

Neka su A i B skupovi. Tada je definirano:

1) **unija** skupova A i B (oznaka $A \cup B$) kao skup koji ima one i samo one elemente koji se nalaze barem u jednom od skupova A i B;
2) **presjek** skupova A i B (oznaka $A \cap B$) kao skup koji sadrži one i samo one elemente koji se nalaze i u jednom i u drugom skupu.

Na primjer, neka su: $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{c, d, e, f\}$.
Tada je $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$, $A \cap B = \{c, d\}$.

Ako skupovi nemaju zajedničkih elementa, tada je njihov presjek prazan skup.

Skupovi brojeva

Brojenjem elementa skupa dolazimo do **skupa prirodnih brojeva** $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$.

U skupu $\mathbf{N}$ možemo zbrajati i množiti brojeve, no ne možemo oduzeti ma koja dva prirodna broja. Zato ovaj skup proširujemo nulom i negativnim brojevima, pa dobivamo **skup cijelih brojeva** $\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. I dalje, da bismo mogli podijeliti dva cijela broja, skup $\mathbf{Z}$ proširujemo na **skup racionalnih brojeva** $\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z},\ n \neq 0\right\}$.

Nazivnik razlomka ne smije biti nula jer dijeljenje s nulom nema smisla.

Pokazalo se da ni ova proširenja nisu dovoljna. Za probleme kao što je računanje dijagonale kvadrata kojem je poznata duljina stranice ili računanje opsega kruga kojem je poznat polumjer, nije moguće naći rješenje u sklopu racionalnih brojeva.

Brojevi: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt[5]{11}, \pi, \ldots$ nisu racionalni brojevi jer se ne mogu prikazati kao količnici dvaju cijelih brojeva. Zovu se **iracionalni brojevi** (oznaka $\mathbf{I}$).

Ako skupu racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$ "dodamo" skup iracionalnih brojeva $\mathbf{I}$, dobit ćemo **skup realnih brojeva** (oznaka $\mathbf{R}$). Preciznije: $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$. Iz same definicije iracionalnih brojeva očito je da skupovi $\mathbf{Q}$ i $\mathbf{I}$ nemaju zajedničkih elementa, tj. $\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset$.

Za skupove $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ i $\mathbf{R}$ vrijedi odnos:

$$\boxed{\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}.}$$

Decimalni zapis brojeva

Decimalni je zapis prirodnih i cijelih brojeva trivijalan; iza broja stavimo točku nakon koje slijedi niz ništica.

Na primjer:

$$1 = 1.00000\ldots$$
$$-17 = -17.00000\ldots.$$

Do zapisa racionalnog broja dolazimo na prirodan način — podijelimo brojnik i nazivnik:

$$\frac{1}{4} = 1 : 4 = 0.25$$
$$\frac{1}{3} = 1 : 3 = 0.33333\ldots.$$

Rezultat dijeljenja može biti broj koji u decimalnom zapisu ima:

1) konačan broj decimala

$$\frac{2}{5} = 0.4; \quad \frac{2}{1000} = 0.002,$$

2) beskonačno mnogo decimala pri čemu se jedna znamenka ili skupina znamenki periodički ponavlja.

Skupinu znamenaka koja se ponavlja nazivamo periodom. Uobičajen je zapis kod kojeg početak i kraj perioda označimo točkom iznad broja.

Primjeri:

$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots = 0.\dot{3};$$
$$\frac{2}{7} = 0.285714285714\ldots = 0.\dot{2}8571\dot{4};$$
$$\frac{4}{15} = 0.266666\ldots = 0.2\dot{6}.$$

Može se dokazati da je svaki racionalni broj u decimalnom zapisu konačan ili beskonačan i periodski. No vrijedi i obrat. Ako je decimalni broj konačan ili beskonačan i periodski, tada je to sigurno racionalni broj.

Koji brojevi preostaju? Oni koji su u decimalnom zapisu beskonačni i neperiodski. To su iracionalni brojevi. I dok je decimalni zapis racionalnog broja potpuno poznat u smislu da se može odrediti ma koja njegova znamenka, kod iracionalnih brojeva to nije slučaj.

U praksi problem rješavamo aproksimacijama. Tako broj π koji ne možemo prikazati u decimalnom zapisu jer ne znamo sve njegove znamenke aproksimiramo s pomoću racionalnih brojeva. Na primjer: 3.14, 3.141, 3.1415 itd. neke su od aproksimacija broja π. Naravno, veći broj decimala znači bolju aproksimaciju – veću točnost.

1.2. Zadaci

Zadatak 1. Koji je od navedenih racionalnih brojeva cijeli broj?

a) $\frac{-6}{7}$; **b)** $\frac{10}{-2}$; **c)** $-\frac{5}{4}$; **d)** $\frac{-2}{10}$.

Rješenje: Broj $\frac{10}{-2} = -5$ je cijeli.

Zadatak 2. Zaokružite netočnu tvrdnju:

a) Najmanji prirodni broj je broj 1.

b) Najmanji cijeli broj ne postoji.

c) Razlika dvaju cijelih brojeva nije uvijek cijeli broj.

d) Količnik dvaju cijelih brojeva nije uvijek cijeli broj.

Rješenje: Netočna je treća tvrdnja. Razlika dvaju cijelih brojeva uvijek je cijeli broj.

Zadatak 3. Koji je od sljedećih brojeva racionalan?

a) $\sqrt{2}$; **b)** π; **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **d)** 2.

Rješenje: Broj 2 je racionalan; možemo pisati $2 = \frac{2}{1}$.

Zadatak 4. Zaokružite netočnu tvrdnju:

a) $\frac{3}{2} \in \mathbf{Q}$; **b)** $0 \notin \mathbf{N}$; **c)** $\sqrt{2} \notin \mathbf{R}$; **d)** $\sqrt{2} \in \mathbf{I}$.

Rješenje: Netočno je $\sqrt{2} \notin \mathbf{R}$.

Zadatak 5. Zaokružite netočnu tvrdnju:

a) $\mathbf{I} \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset$; **b)** $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$; **c)** $\mathbf{Z} \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset$; **d)** $\mathbf{I} \subset \mathbf{R}$.

Rješenje: Tvrdnja $\mathbf{I} \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset$ nije istinita. Proizlazi iz definicije iracionalnih brojeva.

Zadatak 6. Za koji je prirodni broj n razlomak $\frac{n-1}{n+1}$ cijeli broj?

a) -1; **b)** 1; **c)** 2; **d)** 3.

Rješenje: Za $n = 1$, $\frac{1-1}{1+1} = 0$.

Zadatak 7. Broj $\sqrt{n}$ bit će racionalan za:

a) $n = 2$; **b)** $n = 5$; **c)** $n = 7$; **d)** $n = 9$.

Rješenje: Za $n = 9$; $\sqrt{9} = 3$.

Zadatak 8. Koji od sljedećih izraza ne daje racionalni broj?

a) $\frac{5-5}{2}$; **b)** $\frac{2}{-7+7}$; **c)** -3; **d)** $\frac{0.16}{2}$.

Rješenje: Razlomak $\frac{2}{-7+7} = \frac{2}{0}$ nije dobro definiran, jer dijeljenje nulom nije dopušteno. Broj $\frac{0.16}{2} = 0.08$ jest racionalan jer ima konačan decimalni prikaz.

Zadatak 9. Koji od navedenih skupova sadrži samo racionalne brojeve?

a) $\left\{222, \frac{1}{222}, \sqrt{222}\right\}$; **b)** $\{\sqrt{25}, 3.14, 0.125\dot{2}\dot{7}\}$;

c) $\left\{\pi, -\frac{12}{15}, 13, 0\right\}$; **d)** $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{2}{5}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{7}\right\}$.

Rješenje: Skup $\{\sqrt{25}, 3.14, 0.125\dot{2}\dot{7}\}$ sadrži samo racionalne brojeve: $\sqrt{25} = 5$ je cijeli broj, 3.14 je konačan decimalni broj, a $0.125\dot{2}\dot{7}$ je beskonačan periodski decimalni broj.

Zadatak 10. Koliko racionalnih brojeva sadrži skup: $\left\{\sqrt{9}, \frac{\sqrt{9}}{3}, \sqrt{\frac{9}{3}}, \frac{0}{\sqrt{9}}\right\}$?

a) 0; **b)** 1; **c)** 2; **d)** 3.

Rješenje: Sadrži tri racionalna broja. To su: $\sqrt{9} = 3$, $\frac{\sqrt{9}}{3} = 1$ i $\frac{0}{\sqrt{9}} = 0$.

Broj $\sqrt{\frac{9}{3}} = \sqrt{3}$ je iracionalan.

Zadatak 11. Koliko iracionalnih brojeva sadrži skup:

$\left\{\frac{0.12}{0.11}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0.125\dot{7}61\dot{2}, \pi, \sqrt{7}, \frac{\sqrt{100}}{2}\right\}$?

a) 2; **b)** 3; **c)** 4; **d)** 5.

Rješenje: Sadrži tri iracionalna broja. To su: $\frac{\sqrt{3}}{3}, \pi, \sqrt{7}$.

Zadatak 12. Svaki iracionalni broj možemo zapisati kao:

a) beskonačan periodski decimalni broj;

b) korijen nekog cijelog broja;

c) količnik dvaju racionalnih brojeva;

d) beskonačan neperiodski decimalni broj.

Rješenje: Iracionalni broj ima decimalni zapis s beskonačno mnogo znamenaka koje se periodički ne ponavljaju. U praksi se koristimo izračunatom približnom vrijednošću koja predstavlja iracionalni broj.

Zadatak 13. Koji je od sljedećih brojeva racionalan?

a) opseg kruga polumjera 1 metar;

b) $\sqrt{2}$;

c) dijagonala kvadrata stranice 1 metar izmjerena s točnošću od jednog centimetra;

d) broj s beskonačnim decimalnim zapisom: $0.101001000100001000001\ldots$.

Rješenje: Duljina kvadrata stranice 1 m iznosi $\sqrt{2}$ metra. Izmjerena s točnošću od jednog centimetra iznosi 1.41 m, što je racionalni broj.

Opsega kruga iznosi $O = 2r\pi = 2 \cdot 1 \cdot \pi = 2\pi$ metra. To je iracionalni broj. Isto je tako $\sqrt{2}$ iracionalan broj.

U decimalnom prikazu ovog broja duljina skupina s nulama raste i zato ovaj prikaz nije periodski. Ovaj je broj iracionalan.

Zadatak 14. Koja je 2010. decimala broja $0.\dot{2}01\dot{0}$?

a) 0; **b)** 1; **c)** 2; **d)** ne može se odrediti.

Rješenje: Broj $0.\dot{2}01\dot{0}$ je beskonačan decimalni broj kod kojeg se skupina znamenaka 2010 ponavlja.

U 2010 decimala te će se skupine ponoviti 502 puta, te 503. put djelomično – samo dvije znamenke. Naime, $2010 = 4 \cdot 502 + 2$. Dakle, 2010. decimala je 0.

Zadatak 15. Koja je stota decimala broja $\frac{13}{14}$?

a) 2; **b)** 8; **c)** 5; **d)** 7.

Rješenje:

$$
\begin{array}{l}
13 : 14 = 0.92857142\ldots = 0.9\dot{2}8571\dot{4} \\
1\ 3\ 0 \\
\quad = 4\ 0 \\
\qquad 1\ 2\ 0 \\
\qquad\quad = 8\ 0 \\
\qquad\qquad 1\ 0\ 0 \\
\qquad\qquad\quad = 2\ 0 \\
\qquad\qquad\qquad = 6\ 0 \\
\qquad\qquad\qquad\quad = 4\ 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

Skupina znamenaka 285714 ponavlja se. Ovakav broj nazivamo mješovito periodski decimalni broj. Njegov pretperiod je 9, a period skup znamenaka 285714.

U sto decimala ima jedna znamenka pretperioda. U preostalih 99 znamenaka period se ponavlja 16 puta. Kako je $99 = 6 \cdot 16 + 3$, stota je znamenka treća znamenka perioda (5).

2.

Aritmetičke operacije s brojevima

2.1. Ponovimo

Svojstva aritmetičkih operacija

U skupu prirodnih brojeva definirane su aritmetičke operacije zbrajanja i množenja. Na taj je način moguće od dva prirodna broja dobiti novi — zbroj ili umnožak.

Za sve prirodne brojeve x, y, z vrijedi:

1) $x+y=y+x$ (**komutativnost zbrajanja**),

2) $x+(y+z)=(x+y)+z$ (**asocijativnost zbrajanja**),

3) $x\cdot y=y\cdot x$ (**komutativnost množenja**),

4) $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$ (**asocijativnost množenja**),

5) Broj 1 je neutralan s obzirom na množenje jer za bilo koji $x\in\mathbf{N}$ vrijedi: $x\cdot 1=x$,

6) $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$ (**distributivnost množenja prema zbrajanju**).

Proširivanjem skupova brojeva osnovna svojstva računskih operacija ostala su zadržana. Tako navedena svojstva vrijede za skupove $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{I}$; dakle za cijeli skup $\mathbf{R}$. No, javljaju se i nova svojstva. U skupu $\mathbf{Z}$ vrijedi:

7) Broj 0 je neutralan s obzirom na zbrajanje jer za bilo koji $x\in\mathbf{Z}$ vrijedi $x+0=x$.

8) Za bilo koji $x\in\mathbf{Z}$ postoji suprotni element $(-x)$ takav da je $x+(-x)=0$.
Upravo ovo svojstvo omogućuje da se u skupu $\mathbf{Z}$ definira oduzimanje: oduzeti broj y od broja x (oznaka: $x-y$) znači broju x pribrojiti broj suprotan od y.

Ova svojstva vrijede u skupu $\mathbf{Q}$ kao i za cijeli skup $\mathbf{R}$.
U skupu $\mathbf{Q}$ istaknuto je svojstvo postojanja recipročnog elementa.

9) Za svako $x\in\mathbf{Q}$, $x\neq 0$, postoji recipročni element $x'=\dfrac{1}{x}$ takav da je $x\cdot x'=1$.

Zahvaljujući ovom svojstvu na skupu $\mathbf{Q}$ definirano je dijeljenje: broj x podijeliti brojem y različitim od nule (oznaka: $x:y$) znači broj x pomnožiti brojem koji je recipročan broju y. Naravno, sve navedeno vrijedi za cijeli skup $\mathbf{R}$.

I na kraju, iracionalni su brojevi omogućili uvođenje novih operacija: korjenovanja, potenciranja realnim eksponentom i drugih.

Racionalni brojevi

Jednakost racionalnih brojeva

Racionalni brojevi $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ jednaki su ako i samo ako vrijedi: $ad = bc$.

Na primjer:

$$\frac{2}{7} = \frac{4}{14} \quad \text{jer je} \quad 2 \cdot 14 = 7 \cdot 4,$$
$$\frac{0}{2} = \frac{0}{3} \quad \text{jer je} \quad 0 \cdot 3 = 2 \cdot 0.$$

Proširivanje i kraćenje razlomaka

Iz definicije jednakosti razlomaka i asocijativnosti množenja koje vrijedi za cijele brojeve proizlazi jednakost:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m},$$

gdje je m cijeli broj različit od nule.

Kažemo da smo proširivanjem razlomka $\frac{a}{b}$ dobili razlomak $\frac{am}{bm}$. I obratno, da smo kraćenjem razlomka $\frac{am}{bm}$ dobili razlomak $\frac{a}{b}$.

Na primjer:

$$\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10},$$
$$\frac{10}{16} = \frac{5 \cdot 2}{8 \cdot 2} = \frac{5}{8}.$$

Zbrajanje i oduzimanje razlomaka

Razlomke zbrajamo i oduzimamo proširujući ih tako da imaju isti nazivnik:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{cb}{db} = \frac{ad \pm cb}{bd}.$$

Nazivnik bd jedan je od zajedničkih višekratnika b i d. Ako b i d nisu relativno prosti, račun je jednostavniji ako za nazivnik razlomka odaberemo najmanji zajednički višekratnik brojeva b i d.

Na primjer, želimo li zbrojiti $\frac{3}{12}$ i $\frac{5}{8}$, tada ćemo za nazivnik odabrati broj 24 jer je $V(12, 8) = 24$. Sada je

$$\frac{1}{12} + \frac{5}{8} = \frac{1 \cdot 2}{12 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{1 \cdot 2 + 5 \cdot 3}{24} = \frac{17}{24}.$$

Iz praktičnih razloga zbroj cijelog broja i razomka ponekad se piše na jednostavniji način: $2\frac{2}{3}$ umjesto $2+\frac{2}{3}$.

Množenje i dijeljenje razlomaka

Razlomke množimo / dijelimo prema formulama:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Na primjer:

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{8}=\frac{3\cdot 5}{4\cdot 8}=\frac{15}{32},$$

$$\left(-\frac{7}{11}\right):\frac{1}{2}=\left(-\frac{7}{11}\right)\cdot\left(\frac{2}{1}\right)=-\frac{14}{11}.$$

Ako $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$ zapišemo u obliku $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$, tada govorimo o dvojnom razlomku.

Primijetimo da je:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}.$$

Uporaba zagrada

Prema svojstvu asocijativnosti, umnožak triju i više brojeva može se pisati bez zagrada, jer je svejedno kojim se redom brojevi množe. Primjerice

$$3\cdot 25\cdot 4=(3\cdot 25)\cdot 4=75\cdot 4=300,$$
$$3\cdot 25\cdot 4=3\cdot(25\cdot 4)=3\cdot 100=300.$$

Ova sloboda nije dozvoljena u slučaju dijeljenja, kad se mora poštovati redoslijed operacija naznačen zagradama. Ako zagrade nisu naznačene, računske operacije izvode se jedna za drugom s lijeva na desno. Tako je na primjer

$$10:2\cdot 4=(10:2)\cdot 4=5\cdot 4=20,$$

a nikako

$$10:2\cdot 4=10:(2\cdot 4)=10:8=\frac{5}{4}.$$

2.2. Zadaci

Zadatak 1. Koji od navedenih izraza nije jednak 14?

a) $7+(2+5\cdot 4)-(4\cdot 6-9)$; **b)** $2\cdot(10\cdot 2:5-1)+(6:3+4\cdot 2)-2$;

c) $7\cdot(8-5\cdot 4:2)$; **d)** $2\cdot\Big((2+4\cdot(7-8))+9\Big)$.

Rješenje: Vrijednosti su izraza redom:

a) $7+(2+5\cdot 4)-(4\cdot 6-9)=7+(2+20)-(24-9)$
$=7+22-15=29-15=14$;

b) $2\cdot(10\cdot 2:5-1)+(6:3+4\cdot 2)-2=2\cdot(20:5-1)+(2+8)-2$
$=2\cdot(4-1)+10-2=2\cdot 3+10-2=6+10-2=16-2=14$;

c) $7\cdot(8-5\cdot 4:2)=7\cdot(8-20:2)=7\cdot(8-10)=7\cdot(-2)=-14$;

d) $2\cdot\Big((2+4\cdot(7-8))+9\Big)=2\cdot\Big((2+4\cdot(-1))+9\Big)$
$=2\cdot\Big((2-4)+9\Big)=2\cdot\Big((-2)+9\Big)=2\cdot 7=14$.

Izraz c) nije jednak 14.

Zadatak 2. Koji od brojeva nije jednak 1 000?

a) $500-(-500)$; **b)** $500-(-1)\cdot(-500)$;

c) $0-(-500)+(-1\,000):(-2)$; **d)** $(-2)\cdot(-500)$.

Rješenje: $500-(-1)(-500)=500-500=0$.

Zadatak 3. Kolika je razlika između $20-(8-4)+1$ i $5-(-2)+(-1)$?

a) -10; **b)** -11; **c)** 10; **d)** 11.

Rješenje: $[20-(8-4)+1]-[5-(-2)+(-1)]=(20-4+1)-(5+2-1)$
$=(16+1)-(7-1)=17-6=11$.

Zadatak 4. Zaokružite izraz čija je vrijednost pozitivan broj.

a) $10-(-100)-1\,000+1$; **b)** $(-1)\cdot(-10)\cdot(-1\,000)$;

c) $(-10):(-1)-(-5):(-1)$; **d)** $(-1)\cdot(-10)-(-100)\cdot(-1\,000)$.

Rješenje: Vrijednosti izraza su redom:

a) $10-(-100)-1\,000+1=10+100-1\,000+1=111-1\,000=-889$;

b) $(-1)\cdot(-10)\cdot(-1\,000) = 10\cdot(-1\,000) = -10\,000$;

c) $(-10):(-1)-(-5):(-1) = 10-5 = 5$;

d) $(-1)\cdot(-10)-(-100)\cdot(-1\,000) = 10-100\,000 = -99\,990$.

Primijetite da ne treba uvijek računati vrijednost cijelog izraza da bismo zaključili kakvog je on predznaka. Primjerice, izraz b) jednak je umnošku triju negativnih brojeva pa je njegova vrijednost negativan broj.

Zadatak 5. Izračunajte: $9+999+99\,999-99-9\,999-999\,999$.

Odgovor: _____

Rješenje: Zbog komutativnosti i asocijativnosti zbrajanja smijemo pisati:

$(9-99)+(999-9\,999)+(99\,999-999\,999) = (-90)+(-9\,000)+(-900\,000)$
$= -909\,090$.

Zadatak 6. Koji je razlomak jednak $\frac{2}{5}$, a ima brojnik 100?

Odgovor: _____

Rješenje: Cijeli broj koji pomnožen s 2 daje 100 jest 50.

Tim brojem proširimo razlomak: $\frac{2}{5} = \frac{2\cdot 50}{5\cdot 50} = \frac{100}{250}$.

Zadatak 7. Razlomak koji ima nazivnik 25, a iznosi $\frac{6}{30}$ jednak je:

Odgovor: _____

Rješenje: Prvo skratimo razlomak $\frac{6}{30} = \frac{6\cdot 1}{6\cdot 5} = \frac{1}{5}$.

Budući da je $25 = 5\cdot 5$, proširimo dobiveni razlomak s 5: $\frac{1}{5} = \frac{1\cdot 5}{5\cdot 5} = \frac{5}{25}$.

Zadatak 8. Broju $\frac{2}{5}$ suprotan je broj:

a) $\frac{5}{2}$; **b)** -0.4; **c)** 0.4; **d)** -5.2.

Rješenje: Broju $\frac{2}{5}$ suprotan je broj -0.4 jer vrijedi $\frac{2}{5}+(-0.4)=0$.

Zadatak 9. Broju 3 recipročan je broj:

a) $-\frac{1}{3}$; **b)** 0.3; **c)** $0.\dot{3}$; **d)** -3.

Rješenje: Prema definiciji broj x za koji vrijedi $3 \cdot x = 1$ recipročan je broju 3. Dobivamo $x = \frac{1}{3} = 0.333333... = 0.\dot{3}$.

Zadatak 10. Izračunajte: $\dfrac{-2+\frac{4}{9}}{7 \cdot 3 - 1}$.

Odgovor: _____

Rješenje: $$\frac{-2+\frac{4}{9}}{7 \cdot 3 - 1} = \frac{-2 \cdot \frac{9}{9} + \frac{4}{9}}{21 - 1} = \frac{-\frac{18}{9} + \frac{4}{9}}{20} = \frac{-\frac{14}{9}}{\frac{20}{1}} = \frac{(-14) \cdot 1}{9 \cdot 20} = -\frac{7}{90}.$$

Zadatak 11. Izračunajte: $\dfrac{\frac{5}{6} - \frac{3}{4}}{\frac{2}{-3} + \frac{-5}{-8}}$.

Odgovor: _____

Rješenje: $$\frac{\frac{5}{6} - \frac{3}{4}}{\frac{2}{-3} + \frac{-5}{-8}} = \frac{\frac{5}{6} - \frac{3}{4}}{-\frac{2}{3} + \frac{5}{8}} = \frac{\frac{5 \cdot 2 - 3 \cdot 3}{12}}{\frac{(-2) \cdot 8 + 5 \cdot 3}{24}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{(-1)}{24}} = \frac{1 \cdot 24}{(-1) \cdot 12} = -2.$$

Zadatak 12. Izračunajte: $\frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) + \left(-\frac{3}{7}\right) : (-8)$.

Odgovor: _____

Rješenje: $$\frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) + \left(-\frac{3}{7}\right) : (-8) = -\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{7} : 8 = -\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{8}$$
$$= -\frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 1}{8 \cdot 7} = \frac{-6+3}{56} = -\frac{3}{56}.$$

Zadatak 13. Koji od navedenih izraza ima vrijednost 0?

a) $\frac{1}{2} - 5 \cdot \left(\frac{7}{9} - 1\frac{2}{3}\right)$;

b) $\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2} : 6$;

c) $2 - \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}$;

d) $\dfrac{\left(-1\frac{4}{5}\right) : \frac{3}{8} + 5}{\frac{1}{5}}$.

Rješenje: Vrijednosti su izraza redom:

a) $\frac{1}{2} - 5 \cdot \left(\frac{7}{9} - 1\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} - 5 \cdot \left(\frac{7}{9} - \frac{5}{3}\right) = \frac{1}{2} - 5 \cdot \left(\frac{7 - 5 \cdot 3}{9}\right) = \frac{1}{2} - 5 \cdot \left(-\frac{8}{9}\right)$
$= \frac{1}{2} + \frac{5 \cdot 8}{9} = \frac{1 \cdot 9 + 2 \cdot 40}{18} = \frac{89}{18} = 4\frac{17}{18}$;

b) $\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{2} : 6 = \frac{2}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{2 \cdot 8 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{24}$
$= \frac{21}{24} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{7}{8}$;

c) $2 - \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = 2 - \dfrac{\frac{1 \cdot 3 - 1 \cdot 2}{6}}{\frac{1 \cdot 4 - 1 \cdot 3}{12}} = 2 - \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{12}} = 2 - \frac{12 \cdot 1}{6 \cdot 1} = 2 - 2 = 0$;

d) $\dfrac{\left(-1\frac{4}{5}\right) : \frac{3}{8} + 5}{\frac{1}{5}} = \dfrac{\left(-\frac{9}{5}\right) \cdot \frac{8}{3} + 5}{\frac{1}{5}} = \dfrac{-\frac{9 \cdot 8}{5 \cdot 3} + 5}{\frac{1}{5}} = \dfrac{-\frac{24}{5} + \frac{5}{1}}{\frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{-24 + 25}{5}}{\frac{1}{5}} =$
$\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}} = 1$.

Izraz c) ima vrijednost 0.

Zadatak 14. Izračunajte: $\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) + 1\right] + 1$.

Odgovor: _____

Rješenje: $\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right) + 1\right] + 1 = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} + 1\right] + 1 = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{3}{4} + 1\right] + 1$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} + 1 = \frac{7}{8} + 1 = 1\frac{7}{8}$.

Zadatak 15. Kolika je razlika između $11 - 5.25 + 3.2$ i $0.2 \cdot 1.5 - 2.1 : 1.2$?

a) 10.1; **b)** 10.2; **c)** 10.3; **d)** 10.4.

Rješenje: $(11 - 5.25 + 3.2) - (0.2 \cdot 1.5 - 2.1 : 1.2) = (5.75 + 3.2) - (0.3 - 1.75)$ $= 8.95 - (-1.45) = 8.95 + 1.45 = 10.4$.

Zadatak 16. Izračunajte: $\dfrac{-10 \cdot (-0.65 + 0.35)}{3.99 + 0.01}$.

Odgovor: _____

Rješenje: $\dfrac{-10 \cdot (-0.65 + 0.35)}{3.99 + 0.01} = \dfrac{-10 \cdot (-0.3)}{4} = \dfrac{3}{4}$.

Zadatak 17. Izračunajte: $\dfrac{\left(3\frac{1}{3} - 1\right) \cdot 2.5}{0.06 : 0.72}$.

Odgovor: _____

Rješenje: $\dfrac{\left(3\frac{1}{3} - 1\right) \cdot 2.5}{0.06 : 0.72} = \dfrac{2\frac{1}{3} \cdot \frac{25}{10}}{\frac{6}{72}} = \dfrac{\frac{7}{3} \cdot \frac{5}{2}}{\frac{1}{12}} = \dfrac{\frac{35}{6}}{\frac{1}{12}} = \dfrac{35 \cdot 12}{6 \cdot 1} = 70$.

Zadatak 18. Izračunajte: $\dfrac{1.125 : \frac{3}{5}}{\left(3 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{5} + 0.5}$.

Odgovor: _____

Rješenje: $\dfrac{1.125 : \frac{3}{5}}{\left(3 + \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{3}{5} + 0.5} = \dfrac{1\frac{125}{1000} : \frac{3}{5}}{\left(\frac{3 \cdot 3 + 1}{3}\right) \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2}} = \dfrac{1\frac{1}{8} : \frac{3}{5}}{\frac{10}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{9}{8} \cdot \frac{5}{3}}{2 + \frac{1}{2}}$

$= \dfrac{\frac{15}{8}}{\frac{5}{2}} = \dfrac{15 \cdot 2}{8 \cdot 5} = \dfrac{3}{4}$.

Zadatak 19. Izračunajte: $\dfrac{0.2 \cdot 0.03}{\dfrac{3}{4} - 0.36 : 0.7} : \dfrac{1}{55}$.

Odgovor: _____

Rješenje: $\dfrac{0.2 \cdot 0.03}{\dfrac{3}{4} - 0.36 : 0.7} : \dfrac{1}{55} = \dfrac{0.006}{\dfrac{3}{4} - \dfrac{36}{70}} \cdot 55 = \dfrac{\dfrac{6}{1\,000}}{\dfrac{105-72}{140}} \cdot 55 = \dfrac{6 \cdot 140}{1\,000 \cdot 33} \cdot 55$
$= \dfrac{7}{275} \cdot 55 = \dfrac{7}{5} = 1\dfrac{2}{5}$.

Zadatak 20. Koji od izraza ima vrijednost različitu od 44?

a) $\dfrac{0.375 + 0.725}{0.025}$;

b) $3 + 4.2 : 0.1$;

c) $3\dfrac{4}{5} : 0.19 + \left(1\dfrac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot 8$;

d) $20 \cdot \left(1\dfrac{7}{20} : 0.25 - 3\dfrac{1}{5}\right)$.

Rješenje: Vrijednosti su izraza redom:

a) $\dfrac{0.375 + 0.725}{0.025} = \dfrac{1.1}{0.025} = \dfrac{1100}{25} = 44$;

b) $3 + 4.2 : 0.1 = 3 + 42 = 45$;

c) $3\dfrac{4}{5} : 0.19 + \left(1\dfrac{1}{2}\right) \cdot 2 \cdot 8 = \dfrac{19}{5} : \dfrac{19}{100} + \dfrac{3}{2} \cdot 2 \cdot 8 = \dfrac{19}{5} \cdot \dfrac{100}{19} + 24 = 20 + 24 = 44$;

d) $20 \cdot \left(1\dfrac{7}{20} : 0.25 - 3\dfrac{1}{5}\right) = 20 \cdot \left(\dfrac{27}{20} : \dfrac{1}{4} - \dfrac{16}{5}\right) = 20 \cdot \left(\dfrac{27}{20} \cdot \dfrac{4}{1} - \dfrac{16}{5}\right)$
$= 20 \cdot \left(\dfrac{27}{5} - \dfrac{16}{5}\right) = 20 \cdot \dfrac{11}{5} = 44$.

Izraz **b)** različit je od 44.