



**1**

# Mature u Sloveniji

## Ljetni rok, 1995. godine

## Osnovna razina

**Zadatak 1.** Ako od broja  $b$  oduzmemo dvokratnik broja  $a$ , dobije se 2. Ako se peterokratnik broja  $a$  umanjati za  $(b + 1)$ , dobije se 6. Izračunajte brojeve  $a$  i  $b$ .

*Rješenje:*  $a = 3, b = 8$ .

**Zadatak 2.** Izračunajte vrijednost izraza  $\sqrt[3]{\frac{a^6 \cdot \sqrt{64b^2}}{27b}} + \frac{1}{3}(\sqrt{a})^4$ , za  $a = \sqrt{2}$  i  $b = \sqrt{3}$ .

*Rješenje:* 2.

**Zadatak 3.** Pojednostavnite izraz:  $\sin(\pi + x) + \sin(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ .

*Rješenje:* 0.

**Zadatak 4.** Zadan je polinom  $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 5$ . Odredite točku u kojoj graf polinoma siječe os ordinata. Odredite jednadžbu tangente grafa tog polinoma u točki  $T_1(-1, y_1)$ .

*Rješenje:*  $T(0, 5), y = 3x + 6$ .

**Zadatak 5.** Riješite jednadžbu:  $1 + \log_2(4x + 1) = 0$ .

*Rješenje:*  $x = -\frac{1}{8}$ .

**Zadatak 6.** Dvije kružnice sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava daju elipsu  $9x^2 + 4y^2 = 36$ , i to jedna izvana, a druga iznutra. Odredite ploštinu kružnog vijenca što ga određuju te dvije kružnice.

*Rješenje:*  $P = 5\pi$ .

**Zadatak 7.** Zadan je kompleksan broj  $z = (1 + 2i)^{-2}$ . Izračunajte  $|z|$ .

*Rješenje:*  $|z| = \frac{1}{5}$ .

**Zadatak 8.** Nacrtajte graf funkcije  $f(x) = \frac{2}{x^2}$ . Izračunajte ploštinu lika što ga omeđuje graf funkcije i os apscisa na intervalu  $[1, 2]$ .

*Rješenje:*  $P = \frac{3}{4}$ .

**Zadatak 9.** Trgovački putnik mora posjetiti 7 gradova. Na koliko načina to može učiniti ako je najprije posjetio Novigrad?

*Rješenje:* 720.

**Zadatak 10.** Duljine stranice pravokutnika  $ABCD$  su  $|AB| = 3$  i  $|AD| = 4$ . Točka  $E$  dijeli stranicu  $\overline{AD}$  u omjeru  $|AE| : |ED| = 3 : 1$ . Izrazite vektore  $\overrightarrow{EB}$  i  $\overrightarrow{EC}$  s pomoću vektora  $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$  i  $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ . Izračunajte skalarni umnožak  $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC}$ . Nacrtajte skicu.

*Rješenje:*  $\overrightarrow{EB} = \vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{EC} = \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ ,  $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} = 6$ .

**Zadatak 11.** Prvi član geometrijskog niza je  $a_1 = 1$ , a četvrti  $a_4 = -64$ . Odredite opći član tog niza. Koliko je članova niza po apsolutnoj vrijednosti manjih od 1 000?

*Rješenje:*  $a_n = (-4)^{n-1}$ . Broj takvih članova je 5.

**Zadatak 12.** Osnovka uspravne trostrane prizme  $ABCA'B'C'$  je jednakostranični trokut duljine stranice 10 cm. Visina prizme je 12 cm. Polovište brida  $\overline{AB}$  je točka  $D$ . Izračunajte  $\sphericalangle DA'C = \varphi$  s točnošću na 1 minutu. Nacrtajte skicu.

*Rješenje:*  $\varphi = 33^\circ 40'$ .

**Zadatak 13.** U razredu ima 30 učenika. Svi su rješavali ispit sastavljen od dvaju zadataka. Prvi zadatak riješilo je 70%, a drugi 60% od svih učenika. Pet učenika nije riješilo ni jedan zadatak. Koliko je učenika riješilo oba zadatka?

*Rješenje:* 14 učenika.

**Zadatak 14.** Neka su  $a$  i  $b$  dva različita realna broja. Pokažite da jednačba  $x(x + 2a) = -b(x + a)$  ima dva realna rješenja.

*Rješenje:* Kvadratna jednačba ima dva realna rješenja ako je  $D \geq 0$ . Diskriminanta zadane jednačbe je  $D = 4a^2 + b^2$ , a to je strogo veće od nule za svaki  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a \neq b$ .

### Viša razina

**Zadatak 1.** Vrhovi trokuta  $ABC$  su  $A(5, -3, 1)$ ,  $B(-2, 1, 5)$ ,  $C(9, 5, 0)$ .

- Izračunajte točnu vrijednost opsega trokuta i kut  $\beta = \sphericalangle ABC$ .
- Pravac točkom  $A$  okomit je na ravninu trokuta  $ABC$ . Odredite jednačbu tog pravca.
- Odredite jednačbu ravnine određene točkama  $A$ ,  $B$  i  $C$ .

*Rješenje:* **a)**  $O = 9(2 + \sqrt{2})$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ; **b)**  $r = [5, -3, 1] + t[4, -1, 8]$ ; **c)**  $4x = y + 8z = 31$ .

**Zadatak 2.** Zadana je funkcija  $f(x) = x^2(x - 3)$ .

- a) Odredite nultočke, ekstreme i nacrtajte graf funkcije.  
 b) Izračunajte ploštinu lika što ga omeđuje graf funkcije i os apscisa.  
 c) Odredite kut pod kojim pravac određen točkama  $T_1(1, 2)$  i  $T_2(4, -1)$  siječe graf zadane funkcije. Rezultat napišite s točnošću na stotinku stupnja.

*Rješenje:* a) Nultočke  $x_{1,2} = 0$ ,  $x_3 = 2$ . Maksimum za  $x_1 = 0$ , minimum za  $x_3 = 2$ ;

b)  $P = \frac{27}{4}$ ; c)  $\varphi = 51.34^\circ$ .

**Zadatak 3.** Funkcija je zadana formulom  $f(x) = 2 \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ .

- a) Odredite ekstremne vrijednosti funkcije i nacrtajte njezin graf.  
 b) Odredite sjecišta grafa funkcije i pravca  $y = 1$ .

c) Izračunajte  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ .

*Rješenje:* a) Maksimum:  $\left(-\frac{\pi}{2} + 4k\pi, 2\right)$ , minimum:  $\left(\frac{3\pi}{2} + 4k\pi, -2\right)$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ;

b)  $x = -\frac{7\pi}{6} + 4k\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{6} + 4k\pi$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ . c)  $4 - 2\sqrt{2}$ .

**Zadatak 4.** Zadan je geometrijski red:  $\log_2 x + (\log_2 x)^2 + (\log_2 x)^3 + \dots$ , gdje je  $x$  realan pozitivan broj.

- a) Izračunajte zbroj reda za  $x = 2\sqrt{2}$ .  
 b) Odredite skup svih realnih brojeva  $x$  za koje je red konvergentan.  
 c) Riješite jednadžbu:  $\log_2 x + (\log_2 x)^2 + (\log_2 x)^3 + \dots = -\frac{1}{3}$ .

*Rješenje:* a)  $S = 1$ ; b)  $x \in \left\langle \frac{1}{2}, 2 \right\rangle$ ; c)  $x = 2^{-\frac{1}{3}}$ .

**Zadatak 5.** Zadani su kompleksni brojevi  $z_1 = 52 - 36i$  i  $z_2 = 3 - 4i$ .

- a) Izračunajte  $\frac{z_1}{z_2}$  i  $|z_1 + iz_2|$ .  
 b) Točke  $T_1$  i  $T_2$  Gaussove ravnine pridružene su kompleksnim brojevima  $z_1$  i  $z_2$ .  
 Odredite kompleksan broj  $z_3$  koji je pridružen polovištu dužine  $\overline{T_1 T_2}$ .  
 c) Izračunajte argument broja  $w = \frac{z_2}{z_1}$  na stotinku stupnja točno.

*Rješenje:* a)  $\frac{z_1}{z_2} = 12 + 4i$ ,  $|z_1 + iz_2| = 65$ ; b)  $T_3\left(\frac{55}{2}, -20\right)$ ; c)  $\varphi = 341,57^\circ$ .

**Zadatak 6.** U posudi  $X$  nalaze se 3 bijele i 2 crne, a u posudi  $Y$  5 bijelih i 1 crna kuglica.

a) Nasumice uzmemo po jednu kuglicu iz svake posude. Kolike su vjerojatnosti događaja:

- A – obje kuglice su bijele;
- B – obje kuglice su crne;
- C – obje kuglice su iste boje;
- D – kuglice su različitih boja?

b) Pet puta zaredom uzmemo po jednu kuglicu iz svake posude i svaki je put vratimo odakle smo je uzeli. Kolika je vjerojatnost događaja  $E$  da točno tri puta uzmemo kuglice iste boje? Rezultat zaokružite na tri decimalna mjesta.

c) Kuglice iz posude  $X$  nasumice postavimo u niz. Kolika je vjerojatnost događaja  $F$  da se između dviju bijelih kuglica ne nalazi crna, kao ni između dviju crnih bijela kuglica?

*Rješenje:* a)  $P(A) = \frac{1}{2}$ ,  $P(B) = \frac{1}{15}$ ,  $P(C) = \frac{17}{30}$ ,  $P(D) = \frac{13}{30}$ ;

b)  $P(E) = 0.342$ ; c)  $P(F) = 0.2$ .

Ljetni rok, 2004. godine

### Osnovna razina

**Zadatak 1.** Nacrtajte pravce  $y = x - 1$  i  $y = -x + 3$ . Izračunajte ploštinu trokuta što ga pravci omeđuju s osi apscisa.

*Rješenje:*  $P = 1$ .

**Zadatak 2.** Cijena proizvoda nakon poskupljenja od 25% iznosila je 4 200 SIT. Izračunajte početnu cijenu. Za koliko je tolara trgovina premašila poskupljenje ako je bilo dopušteno samo 20%?

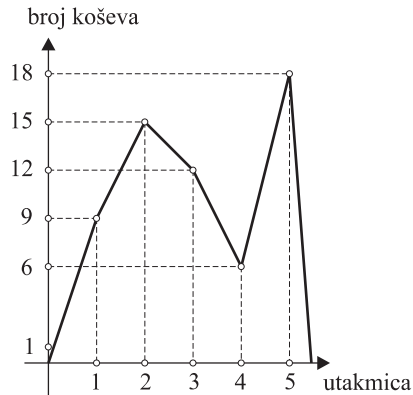
*Rješenje:* 168 SIT.

**Zadatak 3.** Zadani su vektori:  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$  i  $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ . Izračunajte kut što ga određuju ti vektori s točnošću na stotinku stupnja.

*Rješenje:*  $\varphi = 82.87^\circ$ .

**Zadatak 4.** Marko i Žarko igraju košarku. Marko je odigrao pet utakmica, a Žarko tri. Broj koševa što ih je postigao Marko prikazan je frekvencijskim dijagramom. Broj koševa što ih je postigao Žarko prikazan je tablicom.

| Utakmica    | Broj koševa |
|-------------|-------------|
| 1. utakmica | $x$         |
| 2. utakmica | 9           |
| 3. utakmica | 17          |



Koliko je Žarko postigao koševa na prvoj utakmici ako su imali jednak prosjek po utakmici?

*Rješenje:*  $x = 10$ .

**Zadatak 5.** Duljine dijagonala romba  $ABCD$  su  $e = |AC| = 16$  cm i  $f = |BD| = 12$  cm. Izračunajte duljinu stranice i ploštinu romba.

*Rješenje:*  $a = 10$  cm,  $P = 96$  cm<sup>2</sup>.

**Zadatak 6.** Zadane su točke  $A(5, 2)$  i  $B(-1, -2)$ . Izračunajte središte i polumjer kružnice kojoj je dužina  $\overline{AB}$  promjer. Napišite jednadžbu kružnice.

*Rješenje:*  $S(2, 0)$ ,  $r = \sqrt{13}$ ;  $(x - 2)^2 + y^2 = 13$ .

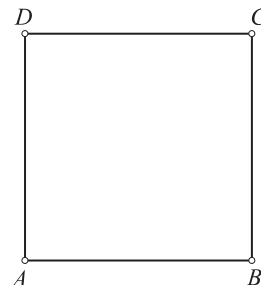
**Zadatak 7.** Riješite jednadžbu  $\sin x + \cos^2 x - \sin^2 x = 1$ .

*Rješenje:*  $x = k\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ,  $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ ;  $k \in \mathbf{Z}$ .

**Zadatak 8.** Riješite jednadžbu  $\frac{\log 20 + \log x}{\log(5x + 1)} = 2$ .

*Rješenje:*  $x = \frac{1}{5}$ .

**Zadatak 9.** Na slici je nacrtan kvadrat  $ABCD$  duljine stranice 3. Nacrtajte vektor  $\vec{x} = 2\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AD}$ . Izračunajte točnu duljinu vektora  $\vec{x}$  i kut  $\varphi$  što ga određuju vektori  $\vec{x}$  i  $\vec{AB}$  s točnošću na 1 minutu.



Rješenje:  $|\vec{x}| = \sqrt{37}$ ,  $\varphi = 9^\circ 28'$ .

**Zadatak 10.** Zadan je kompleksan broj  $z = 3 - 2i$ . Odredite kompleksan broj  $w = z^2 - z^{-1} \cdot |z|^2$  i napišite ga u obliku  $w = a + bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ).

Rješenje:  $w = 2 - 14i$ .

**Zadatak 11.** Izračunajte s točnošću na stotinku stupnja kut pod kojim graf funkcije  $f(x) = \frac{x-2}{x}$  siječe os apscisa.

Rješenje:  $\varphi = 26,57^\circ$ .

**Zadatak 12.** U istom koordinatnom sustavu nacrtajte parabole  $y = 1 - x^2$  i  $y = 4 - 4x^2$ . Izračunajte ploštinu lika što ga omeđuju te parabole.

Rješenje:  $P = 4$ .

### Viša razina

**Zadatak 1.** Zadane su funkcije:  $f(x) = \ln \frac{x-3}{2}$  i  $g(x) = 2e^{x-1} + 3$ .

- Odredite domene i kodomene funkcija  $f(x)$  i  $g(x)$ .
- Odredite koordinate točke grafa funkcije  $f(x)$  u kojoj je tangenta usporedna s pravcem  $x - 2y - 4 = 0$ .
- Izračunajte ploštinu lika što ga omeđuju: os apscisa, pravci  $x = 1$ ,  $x = 2$  i graf funkcije  $g(x)$ .
- Dokažite da su  $f$  i  $g$  dvije međusobno inverzne funkcije.

Rješenje: **a)**  $\mathcal{D}_f = \langle 3, +\infty \rangle$ ,  $\mathcal{K}_f = \mathbf{R}$  (ili  $x > 3$ ,  $y \in \mathbf{R}$ );  $\mathcal{D}_g = \mathbf{R}$ ,  $\mathcal{K}_g = \langle 3, +\infty \rangle$ ; **b)**  $T(5, 1)$ ; **c)**  $P = 2e + 1 = 6.437$ ;

**d)** Pokazati da je  $f[g(x)] = g[f(x)] = x$ .

**Zadatak 2.** Riješite sljedeće zadatke:

- Neka je  $A = \{x \in \mathbf{R}; 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 0\}$ ,  $B = \{x \in \mathbf{R}; 3|x-2| - x = 6\}$ . Odredite skup  $C = A \times B$  tako da napišete sve njegove elemente.
- Neka je  $D = \{x \in [0, 2\pi]; \cos x - \sin x = 0\}$  i  $E$  skup apscisa točaka u kojima funkcija  $f(x) = \sin 2x$  postiže maksimum na intervalu  $[0, \pi]$ . Odredite skup  $F = D \cup E$ . Odredite broj podskupova skupa  $F$ .
- Zadani su skupovi točaka u ravni:  $K = \{(x, y); 9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0\}$ ,  $L = \{(x, y); y - x + 3 \geq 0\}$  i  $M = \{(x, y); y > 2\}$ . Nacrtajte u koordinatnom sustavu skup točaka  $N = (K \cap L) \setminus M$ .

Rješenje: **a)**  $C = A \times B = \left\{ \left( -\frac{1}{2}, 0 \right), \left( -\frac{1}{2}, 6 \right) \right\}$ ;

**b)**  $F = \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \right\}$ . Broj podskupova skupa  $F$  je 4 (općenito  $2^n$ ).

**c)** Nacrtaj sliku! Skupovi su:  $K$  — elipsa  $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ ,  $L$  i  $M$  poluravnine.

**Zadatak 3.** Zadana su četiri različita trapeza  $ABCD$ . U svakom od njih duljine osnovica su  $|AB| = a = 16$  cm i  $|CD| = c = 2$  cm.

**a)** U prvom trapezu duljine stranica  $c, d, b, a$  uzastopni su članovi aritmetičkog niza. Izračunajte duljine krakova  $b = |BC|$  i  $d = |DA|$ .

**b)** U drugom trapezu pravci krakova sijeku se u točki  $E$ . Izračunajte duljinu kraka  $b$  ako je  $|CE| = 2$  cm i  $|DE| = 1$  cm.

**c)** U trećem trapezu je  $\alpha = \sphericalangle DAB = 70^\circ$  i  $\beta = \sphericalangle ABC = 60^\circ$ . Izračunajte duljinu kraka  $d$ .

**d)** U četvrtom trapezu krak  $b$  je za 2 cm veći od kraka  $d$ , a ploština trapeza iznosi  $108$  cm<sup>2</sup>. Izračunajte duljine krakova  $b$  i  $d$ .

Rješenje: **a)**  $b = \frac{34}{3}$  cm,  $d = \frac{20}{3}$  cm; **b)**  $b = 14$  cm;

**c)**  $d = \frac{14 \sin 60^\circ}{\sin 50^\circ} = 15.83$  cm; **d)**  $b = 15$  cm,  $d = 13$  cm.

## Jesenski rok, 2004. godine

### Osnovna razina

**Zadatak 1.** Nacrtajte u koordinatnom sustavu točke  $A(0, 1)$ ,  $B(3, 0)$ ,  $C(3, 4)$  i  $D(0, 4)$ . Izračunajte ploštinu četverokuta  $ABCD$ .

Rješenje:  $P = \frac{21}{2}$ .

**Zadatak 2.** Zadana je kvadratna funkcija  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ . Odredite nultočke, tjeme, sjecište s osi ordinata i nacrtajte graf te funkcije.

Rješenje:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 3$ ;  $V(1, -2)$ ;  $T\left(0, -\frac{3}{2}\right)$ .

**Zadatak 3.** Pravac je određen točkama  $A(-1, 3)$  i  $B(3, 5)$ . Izračunajte točno na stotinku stupnja kut  $\alpha$  pod kojim pravac siječe os  $x$  i kut  $\beta$  pod kojim siječe os  $y$ .



*Rješenje:*  $\alpha = 26.57^\circ$ ,  $\beta = 63.43^\circ$ .

**Zadatak 4.** Riješite jednađbu  $\frac{2x+1}{3(x-1)} - \frac{x+2}{3(x+1)} = \frac{1}{x-1}$ .

*Rješenje:*  $x = 0$ .

**Zadatak 5.** Pojednostavnite izraz:  $\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}(a^{-\frac{1}{2}}b)^{\frac{3}{2}}}{(a^0 + b^0)b\sqrt{b}}$ ;  $a, b > 0$ .

*Rješenje:*  $\frac{1}{2}$ .

**Zadatak 6.** Riješite jednađbu  $\cos x + \cos 2x = 0$ .

*Rješenje:*  $x = \pi + 2k\pi$ ,  $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ;  $k \in \mathbf{Z}$ .

**Zadatak 7.** Odredite jednađbu kružnice koja prolazi ishodištem koordinatnog sustava, a središte joj je u sjecištu pravaca  $2x - 3y - 9 = 0$  i  $y + 1 = 0$ .

*Rješenje:*  $S(3, -1)$ ,  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 10$ .

**Zadatak 8.** Riješite jednađbu  $\log_8(x^2 - 3x) = \frac{2}{3}$ .

*Rješenje:*  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 4$ .

**Zadatak 9.** Napišite početnih deset članova niza  $a_n = n^2 + 1$ . Kolika je vjerojatnost događaja da nasumice izabran broj od tih deset članova niza bude djeljiv s 5?

*Rješenje:* 2, 5, 10, 17, 26, 37, 50, 65, 82, 101;  $p = 0.4$ .

**Zadatak 10.** Odredite realan broj  $x$  tako da broj  $z = 5i^3 + 3xi^2 + (x - 1)i + 1$  bude realan ( $i$  je imaginarna jedinica).

*Rješenje:*  $x = 6$ .

**Zadatak 11.** Polinom  $p(x) = x^3 + 4x^2 + ax + 20$  ima lokalni minimum u točki  $A(-1, y_1)$ . Izračunajte realni broj  $a$  i ordinatu  $y_1$ .

*Rješenje:*  $a = 5$ ,  $y_1 = 18$ .

**Zadatak 12.** Nacrtajte graf funkcije  $f(x) = 3\sqrt{x}$ . Izračunajte ploštinu lika što ga čine na intervalu  $[0, 4]$  graf te funkcije i os apscisa.

*Rješenje:*  $P = 16$ .

## Viša razina

**Zadatak 1.** U jednakostraničnom trokutu  $ABC$  duljine stranice 4 označimo s  $\vec{AB} = \vec{a}$  i  $\vec{AC} = \vec{b}$ . Točka  $D$  je na stranici  $\vec{BC}$  tako da je  $|BD| : |DC| = 1 : 3$ .

- a) Izrazite vektor  $\vec{AD}$  s pomoću vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  i izračunajte točno duljinu tog vektora.  
 b) Izračunajte s točnošću na jednu minutu kut što ga određuju vektori  $\vec{AD}$  i  $\vec{AC}$ .  
 c) Izračunajte realan broj  $x$  tako da vektori  $x\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$  i  $2\vec{a} - \vec{b}$  budu usporedni.  
 d) Izračunajte realan broj  $y$  tako da vektori  $\vec{a} + y\vec{b}$  i  $5\vec{a} - 4\vec{b}$  budu međusobno okomiti.

*Rješenje:* a)  $\vec{AD} = \frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ ,  $|\vec{AD}| = \sqrt{13}$ ; b)  $\cos \varphi = \frac{5}{2\sqrt{13}}$ ,  $\varphi = 46^\circ 6'$ ;

c)  $x = -1$ ; d)  $y = 2$ .

**Zadatak 2.** Zadane su funkcije  $f(x) = \frac{6}{x-4} - \frac{6}{x+1}$  i  $g(x) = \frac{1}{4}(-x^2 + 7x - 30)$ .

- a) Odredite sjecište grafova zadanih funkcija.  
 b) Izračunajte kut  $\varphi$  pod kojim se sijeku grafovi tih funkcija u sjecištu s najvećom ordinatom. Rezultat zaokružite na desetinku stupnja.  
 c) Izračunajte  $\int_9^{19} f(x) dx$  s točnošću na jedno decimalno mjesto.

*Rješenje:* a)  $T_1\left(0, -\frac{15}{2}\right)$ ,  $T_2(2, -5)$ ; b)  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{38}{9}$ ,  $\varphi = 76.7^\circ$ ;

c)  $6 \ln \frac{3}{2} = 2.4$ .

**Zadatak 3.** Prva dva člana beskonačnoga geometrijskog reda su  $a_1 = x$  i  $a_2 = x^2 - x$  ( $x \in \mathbf{R}$ ,  $x \neq 0$ ,  $x \neq 1$ ).

- a) Za koje je vrijednosti od  $x$  red konvergentan (ima zbroj)?  
 b) Odredite  $x$  tako da zbroj reda bude jednak 5.  
 c) Izračunajte  $x$  tako da vrijedi  $4a_1^4 + a_2 = 0$ .  
 d) Neka je  $x = \frac{4}{3}$ . Koliko početnih članova niza moramo zbrojiti da se zbroj tih članova razlikuje za manje od  $10^{-8}$  od zbroja beskonačnog reda?

*Rješenje:* a)  $x \in \langle 0, 2 \rangle$ ,  $x \neq 1$ ; b)  $x = \frac{5}{3}$ ; c)  $x = \frac{1}{2}$ ;

d)  $\left| \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{4 \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}{\frac{1}{3} - 1} \right| < 10^{-8} \implies n > \frac{\log(2 \cdot 10^8)}{\log 3} \doteq 17.4$ . Treba zbrojiti 18 članova.

Ljetni rok, 2005. godine

### Osnovna razina

**Zadatak 1.** Napišite jednadžbu pravca  $p$  koji prolazi točkom  $A(1, 0)$  i usporedan je s pravcem  $2x + y = 4$ . Odredite sjecište pravca  $p$  i osi ordinata.

*Rješenje:*  $2x + y - 2 = 0$ ,  $N(0, 2)$ .

**Zadatak 2.** U pravokutnom trokutu  $ABC$  (s pravim kutom pri vrhu  $C$ ) duljine dviju stranica su  $a = 3$  cm i  $c = 6$  cm. Izračunajte točnu vrijednost duljine stranice  $b$  i mjere kutova  $\alpha$  i  $\beta$ .

*Rješenje:*  $b = 3\sqrt{3}$ ;  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\beta = 60^\circ$ .

**Zadatak 3.** Zadan je aritmetički niz  $1, 7, 13, \dots$ . Izračunajte tisućiti član i zbroj tisuću početnih članova niza.

*Rješenje:*  $a_{1000} = 5995$ ,  $s_{1000} = 2998000$ .

**Zadatak 4.** Pokažite da za svaki  $x \neq \frac{k\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$  vrijedi jednakost  $\frac{\sin x(\cos 2x + 1)}{\cos x \sin 2x} = 1$ .

**Zadatak 5.** Gljivar ima u košari lisičarke, vrganje i rujnice. Tri su četvrtine svih gljiva lisičarke, dvadeset posto svih gljiva su vrganji, rujnica ima 2 komada. Koliko ukupno gljiva ima u košari?

*Rješenje:* 40.

**Zadatak 6.** Riješite kvadratnu jednadžbu  $x^2 - ax + a = 0$ , za  $a = -2$ . Napišite točno rješenje. Za koje realne vrijednosti parametra  $a$  zadana jednadžba ima samo jedno rješenje?

*Rješenje:*  $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$ ;  $a = 0$ ,  $a = 4$ .

**Zadatak 7.** Koji kompleksni broj  $z$  zadovoljava jednadžbu  $(1 - i)z = 3 + 4i$ ? Odredite  $\operatorname{Re} z$ ,  $\operatorname{Im} z$  i izračunajte  $|z|$ . Vrijednost  $|z|$  djelomično korjenujte.

*Rješenje:*  $z = -\frac{1}{2} + \frac{7}{2}i$ ,  $\operatorname{Re} z = -\frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{Im} z = \frac{7}{2}$ ;  $|z| = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$ .

**Zadatak 8.** Zadane su točke  $A(2, 1)$ ,  $B(-2, 3)$  i  $C(3, -2)$ . Odredite vektore  $\vec{AB}$  i  $\vec{AC}$ . Izračunajte skalarni umnožak i kut što određuju ta dva vektora.

*Rješenje:*  $\vec{AB} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $\vec{AC} = \vec{i} - 3\vec{j}$ ;  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -10$ ,  $\cos \varphi = \frac{-10}{\sqrt{400}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  
 $\varphi = 135^\circ$ .

**Zadatak 9.** Napišite jednadžbu elipse kojoj je središte u ishodištu koordinatnog sustava, jedno tjeme točka  $B(0, 1)$  i jedno žarište  $F(\sqrt{3}, 0)$ . Nacrtajte elipsu.

*Rješenje:*  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

**Zadatak 10.** Pojednostavnite izraz:  $\log_2 a + \log_2 4a - \log_2 \sqrt{2} - \log_2 2a^2$ ,  $a > 0$ .

*Rješenje:*  $\frac{1}{2}$ .

**Zadatak 11.** U skupini ima 10 djevojaka i 10 mladića. Od njih 3 djevojke i 8 mladića imaju vozačku dozvolu. Nasumice izaberemo jednog mladića i jednu djevojku. Kolika je vjerojatnost da barem jedno od njih ima vozačku dozvolu?

*Rješenje:*  $p = \frac{43}{50}$ .

**Zadatak 12.** Izračunajte sjecište i kut pod kojim se sijeku krivulje  $y = \frac{2x^2 - 8}{x + 3}$  i  $y = 2x - 1$ .

*Rješenje:*  $A(-1, -3)$ ,  $\varphi = 90^\circ$ .

### Viša razina

**Zadatak 1.** Zadane su funkcije  $f(x) = e^x$  i  $g(x) = 2e^{-x}$ .

- Skicirajte grafove funkcija  $f$  i  $g$ . Izračunajte s točnošću na jednu kutnu minutu kut pod kojim graf funkcije  $g$  siječe os ordinata.
- Izračunajte točne vrijednosti koordinata sjecišta zadanih funkcija.
- Neka je  $L$  lik u prvom kvadrantu omeđen grafovima funkcija  $f$ ,  $g$  i osi ordinata. Pokažite da je ploština lika  $L$  jednaka  $3 - 2\sqrt{2}$ .
- Odredite inverznu funkciju  $g^{-1}$  funkcije  $g$ . Pokažite da vrijedi:  
 $(g^{-1} \circ f)(x) = g^{-1}[f(x)] = \ln 2 - x$ .

*Rješenje:* **a)**  $\varphi = 26^\circ 34'$ ; **b)**  $A(\ln \sqrt{2}, \sqrt{2})$ ; **d)**  $g^{-1}(x) = \ln 2 - x$ .

**Zadatak 2.** Zadane su koordinate točkа u prostoru  $A(3, t, -5)$ ,  $B(2t, 4, -1)$  i  $C(6, 8, 7)$ . Radijvektore tih točkа označimo s:  $\vec{a} = \vec{r}_A$ ,  $\vec{b} = \vec{r}_B$ ,  $\vec{c} = \vec{r}_C$ .

- a) Za koju je vrijednost realnog broja  $t$  duljina vektora  $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$  jednaka 11?  
 b) Odredite realan broj  $t$  tako da trokut  $ABC$  bude pravokutan s pravim kutom pri vrhu  $C$ .  
 c) Pokažite da su za  $t = 2$  vektori  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  i  $\vec{c}$  u istoj ravnini.

*Rješenje:* a)  $t_1 = -6$ ,  $t_2 = 2$ ; b)  $t = \frac{75}{3}$ ;

- c) Naputak: Pokažite da se jedan od tih vektora može pokazati kao linearna kombinacija inih dvaju vektora.

**Zadatak 3.** U kružnici sa središtem  $S$  i polumjera  $r = 2$  cm zadana je tetiva  $\overline{MN}$  duljine  $2\sqrt{3}$  cm.

- a) Izračunajte središnji kut  $\varphi = \sphericalangle MSN$ .  
 b) Izračunajte točnu vrijednost ploštine trapeza kojemu su osnovice tetiva  $\overline{MN}$  i promjer kružnice.  
 c) Koliko postotaka ploštine pripadnog kruga predstavlja ploština manjeg od dvaju kružnih odsječaka što ih određuje tetiva  $\overline{MN}$ ?  
 d) Neka je  $P$  treći vrh trokuta  $MNP$  upisanog u zadanu kružnicu pri čemu je  $\sphericalangle MPN$  šiljast, a duljine stranica  $\overline{MP}$  i  $\overline{NP}$  su u omjeru  $2 : 1$ . Izračunajte mjeru  $\sphericalangle MPN$  i duljine stranica  $\overline{MP}$  i  $\overline{NP}$ .

*Rješenje:* a)  $\varphi = 120^\circ$ ; b)  $P = (\sqrt{3} + 2) \text{ cm}^2$ ; c) 19,6%;

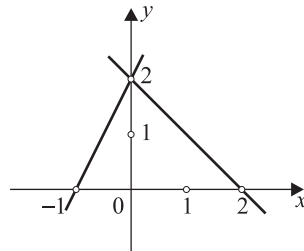
- d)  $\alpha = \frac{\varphi}{2} = 60^\circ$ ,  $|MP| = 4$  cm i  $|NP| = 2$  cm.

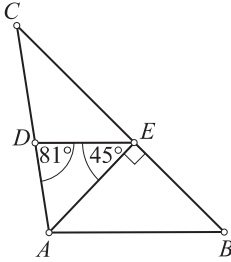
Jesenski rok, 2005. godine

### Osnovna razina

**Zadatak 1.** Na slici su nacrtana dva pravca. Napišite jednadžbe tih pravaca i izračunajte ploštinu trokuta što ga ti pravci određuju s osi  $x$ .

*Rješenje:*  $y = 2x + 2$ ,  $y = -x + 2$ ;  $P = 3$ .



**Zadatak 2.**

Na stranicama trokuta  $ABC$  su točke  $D$  i  $E$ , kao na slici, pri čemu je  $DE \parallel AB$ ,  $\sphericalangle DEA = 45^\circ$ ,  $\sphericalangle EDA = 81^\circ$  i  $\sphericalangle BEA = 90^\circ$ . Izračunajte unutarnje kutove trokuta  $ABC$ . Izračunajte duljinu stranice  $c = |AB|$  ako je  $|BE| = 3\sqrt{2}$  cm.

*Rješenje:*  $\alpha = 99^\circ$ ,  $\beta = 45^\circ$ ,  $\gamma = 36^\circ$ ;  
 $c = 6$  cm.

**Zadatak 3.** Nacrtajte graf funkcije  $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ . Odredite interval na kojem je ta funkcija padajuća.

*Rješenje:*  $\langle -1, +\infty \rangle$ .

**Zadatak 4.** Rješenja jednadžbe  $\sqrt{2}x^2 - 4x - 2\sqrt{2} = 0$  su  $x_1$  i  $x_2$ . Izračunajte vrijednost izraza  $(x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2$ .

*Rješenje:* 4.

**Zadatak 5.** Kvadratu kojemu su vrhovi  $A(0, -2)$ ,  $B(4, -2)$ ,  $C(4, 2)$  i  $D(0, 2)$  upišemo i opišemo kružnicu. Odredite središta, polumjere i napišite jednadžbe tih kružnica. Nacrtajte skicu.

*Rješenje:*  $S_1(2, 0)$ ,  $S_2(2, 0)$ ;  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 2\sqrt{2}$ ;  $(x-2)^2 + y^2 = 4$ ,  $(x-2)^2 + y^2 = 8$ .

**Zadatak 6.** Napišite tri početna člana niza kojemu je opći član  $a_n = 100 - 2n$ . Pokažite da je niz aritmetički i izračunajte zbroj početnih 5 000 članova.

*Rješenje:*  $a_1 = 98$ ,  $a_2 = 96$ ,  $a_3 = 94$ ,  $s_{5000} = -24\,505\,000$ .

**Zadatak 7.** Kompleksan broj  $(5 - 10i)^2 \cdot (2 + i)^{-1}$  napišite u obliku  $a + bi$ ;  $a, b \in \mathbf{R}$ .

*Rješenje:*  $-50 - 25i$ .

**Zadatak 8.** Odredite jednadžbu tangente grafa funkcije  $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$  u točki apscise  $x = -1$ .

*Rješenje:*  $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ .

**Zadatak 9.** Izračunajte ploštinu lika što ga određuju graf funkcije  $f(x) = 2x + 3 \cos x$ , os apscisa i pravci  $x = 0$ ,  $x = \pi$ .

*Rješenje:*  $P = \pi^2$ .

**Zadatak 10.** Izračunajte sjecište grafova funkcija  $f(x) = 2^x$  i  $g(x) = 65 \cdot 2^x - 1$ .

*Rješenje:*  $\left(-6, \frac{1}{64}\right)$ .

**Zadatak 11.** Zadana je funkcija  $f(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$ . Odredite domenu, nultočke i sjecište grafa funkcije s osi ordinata.

*Rješenje:*  $D = \mathbf{R} \setminus \left\{ \pi + \frac{3}{2}k\pi; k \in \mathbf{Z} \right\}; x = \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}k\pi, k \in \mathbf{Z}; P\left(0, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ .

**Zadatak 12.** Kut što ga određuju vektori  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$  iznosi  $60^\circ$ . Skalarni umnožak tih vektora jednak je 15, a skalarni umnožak vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{a} + \vec{b}$  jednak je 51. Izračunajte duljine vektora  $\vec{a}$  i  $\vec{b}$ .

*Rješenje:*  $|\vec{a}| = 6, |\vec{b}| = 5$ .

### Viša razina

**Zadatak 1.** Zadana je funkcija  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{2x-2}$ .

- Izračunajte lokalne ekstreme funkcije.
- Odredite nultočke, polove i asimptote funkcije  $f(x)$ . Nacrtajte graf funkcije.
- Pokažite da je funkcija  $g(x) = f(x+1) - 2$  neparna.

*Rješenje:* a)  $T_1(-1, 0), T_2(3, 4)$ ;

b) nultočke  $x_{1,2} = -1$ ; pol  $x = 1$ ; uspravna asimptota  $x = 1$ , kosa asimptota  $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ ;

c)  $g(x) = \frac{x^2+4}{2x} \implies g(-x) = -g(x)$ .

**Zadatak 2.** Kružnica  $K$  zadana jednadžbom  $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$  siječe os  $x$  u dvjema točkama. Lijevo sjecište označimo s  $A$ , desno s  $B$ .

- Izračunajte točke  $A$  i  $B$ .
- Izračunajte ploštinu manjeg kružnog odsječka što ga od pripadnog kruga odsijeca tetiva  $\overline{AB}$ . Rezultat zaokružite na jedno decimalno mjesto.
- Odredite jednadžbu tangente kružnice  $K$  s diralištem u točki  $B$ .
- Za koje realne brojeve  $m$  jednadžba  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 2m^2 - 9m + 10 = 0$  predodčuje kružnicu?

Rješenje: a)  $A(0, 0)$ ,  $B(4, 0)$ ; b)  $P \doteq 3.5$ ; c)  $y = 2x - 8$ ;

d)  $m \in \langle -\infty, -5 \rangle \cup \langle \frac{1}{2}, +\infty \rangle$ .

**Zadatak 3.** U posudi se nalazi 10 kuglica: 5 crvenih, 3 modre i 2 bijele.

a) Iz posude izvučemo nasumice istodobno 4 kuglice. Izračunajte vjerojatnost događaja:

A – sve izvučene kuglice su crvene;

B – dvije kuglice su crvene i dvije modre;

C – barem jedna izvučena kuglica je bijela.

b) Iz posude izvučemo nasumice istodobno 2 kuglice. Izračunajte vjerojatnost događaja da su obje kuglice modre ako znamo da je barem jedna od njih modra.

c) Sve kuglice iz posude poredamo nasumice jednu do druge. Kolika je vjerojatnost da su sve tri modre kuglice zajedno?

Rješenje: a)  $p(A) = \frac{1}{42}$ ,  $p(B) = \frac{1}{7}$ ,  $p(C) = \frac{2}{3}$ ; b)  $p(D) = \frac{1}{8}$ ; c)  $p(E) = \frac{1}{15}$ .

## Ljetni rok, 2006. godine

### Osnovna razina

**Zadatak 1.** Izračunajte sjecište grafa funkcije  $f(x) = -\log_5 x + 1$  s osi apscisa. Nacrtajte graf funkcije  $f(x)$ .

Rješenje:  $A(5, 0)$ .

**Zadatak 2.** U prazne pravokutnike upišite po jedan broj tako da upisani brojevi u svakom retku budu članovi aritmetičkog niza. Na kraju upišite razliku ( $d$ ) svakog od tih nizova.

a) 2, 5, 8, 11, , ...;  $d =$  ;

b) -5, , 3, 7, 11, ...;  $d =$  ;

c) 11, , 1, , -9, ...;  $d =$  .

Rješenje: a) 14,  $d = 3$ ; b) -1,  $d = 4$ ; c) 6, -4,  $d = -5$ .

**Zadatak 3.** Nacrtajte graf funkcije  $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ . Odredite nultočku, pol, vodoravnu asimptotu i sjecište grafa funkcije s osi ordinata.



Rješenje:  $x = \frac{1}{2}$ ;  $x = -2$ ;  $y = 2$ ;  $A\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ .

**Zadatak 4.** Izračunajte točnu vrijednost određenog integrala  $\int_0^{\frac{\pi}{6}} (6 \cos x + 1) dx$ .

Rješenje:  $3 + \frac{\pi}{6}$ .

**Zadatak 5.** Odredite sve realne brojeve  $x$  za koje je kompleksan broj  $z = (x + i)^4$  realan.

Rješenje:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 1$ .

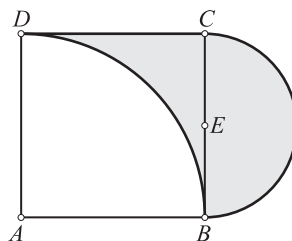
**Zadatak 6.** Napišite jednađbe dviju tangenata grafa funkcije  $f(x) = x^3 - x$  koje su usporedne s pravcem  $2x - y - 3 = 0$ .

Rješenje:  $y = 2x - 2$ ,  $y = 2x + 2$ .

**Zadatak 7.** Marko je u cvjećarnici za 7 ruža i 3 orhideje platio 4700 SIT. Sandi je u istoj cvjećarnici za 3 ruže i 5 orhideja platio 4800 SIT. Kolika je cijena jedne ruže, a kolika jedne orhideje?

Rješenje: 350 SIT, 750 SIT.

**Zadatak 8.** Duljina je stranice kvadrata  $ABCD$  4 cm. Na slici su nacrtana dva kružna luka. Središte jednog je u točki  $A$ , a drugog u polovištu stranice  $\overline{BC}$ , točki  $E$ . Izračunajte točnu vrijednost ploštine osjenčanog lika.



Rješenje:  $P = 16 - 2\pi$ .

**Zadatak 9.** Slova imena HUBERT nasumice rasporedimo u vodoravni red, jedno iza drugoga. Kolika je vjerojatnost događaja:

- A — nastala riječ počinje slovom T,
- B — nastala riječ je TREBUH?

Rješenje:  $p(A) = \frac{1}{6}$ ,  $p(B) = \frac{1}{720}$ .

**Zadatak 10.** Zadana je funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} 1; & x \leq 1 \\ x; & x > 1 \end{cases}$$

Nacrtajte graf funkcije i izračunajte ploštinu lika što ga taj graf omeđuje s osi apscisa na intervalu  $[0, 2]$ .

Rješenje:  $P = \frac{5}{2}$ .

**Zadatak 11.** Zadani su vektori  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$  i  $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ . Izračunajte skalarni umnožak tih vektora. Izračunajte točnu vrijednost duljine vektora  $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$ .

Rješenje:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 19$ ,  $|\vec{x}| = \sqrt{10}$ .

**Zadatak 12.** Vodeći koeficijent kvadratne funkcije je  $a = 1$ . Jedna nultočka funkcije je  $x_1 = 3$ . Funkcija poprima ekstremnu vrijednost za  $x_0 = 1$ . Napišite funkciju.

Rješenje:  $f(x) = x^2 - 2x - 3$ .

### Viša razina

**Zadatak 1.** U pravokutnom koordinatnom sustavu zadane su točke  $A(-2, 4)$ ,  $B(4, 4)$ ,  $C(5, 3)$ .

- Izračunajte s točnošću na jednu kutnu minutu kut pravaca  $OB$  i  $AC$ . ( $O$  je ishodište sustava.)
- Odredite jednadžbu kružnice koja prolazi točkama  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Koliki je polumjer kružnice?
- Odredite jednadžbu elipse kojoj su točke  $A$  i  $B$  žarišta, a prolazi točkom  $C$ . Skicirajte tu elipsu.

Rješenje: **a)**  $\varphi = 53^\circ 8'$ ; **b)**  $(x-1)^2 + y^2 = 25$ ,  $r = 5$ ; **c)**  $\frac{(x-1)^2}{18} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$ .

**Zadatak 2.** Riješite sljedeće zadatke o kompleksnim brojevima.

- U kompleksnoj ravni zadani su skupovi:  $A = \{z; |z| \leq 2\}$ ,  $B = \{z; \text{Im } z = \text{Re } z\}$ ,  $C = \{z; |\text{Re } z| < 3\}$ . Odredite i skicirajte skup  $(B \cap C) \setminus A$ .
- Izračunajte realne brojeve  $a$  i  $b$  tako da vrijedi  $(-3 + ai) \cdot (b + 3i) = -30 + 15i$ .
- Dokažite da kompleksan broj  $z = \sqrt{\log_2 a - 3} + i \log(a^2 - 13a + 44)$  nije realan ako je  $a \in \mathbf{R}$  i  $a \geq 8$ . Za koji realan broj  $a$  je  $\text{Re } z = 0$ ?

Rješenje: **a)**  $A$  je krug određen kružnicom sa središtem u ishodištu, polumjera 2.  $B$  je pravac  $y = x$ .  $C$  je pruga određena pravcima  $x = -3$  i  $x = 3$ ;

**b)**  $a = 4$ ,  $b = 6$  ili  $a = 6$ ,  $b = 4$ ; **c)**  $a = 8$ .

**Zadatak 3.** Zadane su funkcije  $f(x) = \sin 2x$  i  $g(x) = \sin x$ .

- a)** Nacrtajte grafove tih funkcija na intervalu  $[0, \pi]$ . Odredite sjecišta tih grafova na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ .
- b)** Odredite kut pod kojim se sijeku grafovi funkcija  $f$  i  $g$  na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ .
- c)** Izračunajte ploštinu lika što ga omeđuju grafovi zadanih funkcija na intervalu  $[0, \pi]$ .
- d)** Za koje se realne brojeve  $a$ ,  $a \neq 0$  krivulje  $y = a \sin 2x$  i  $y = \sin x$  sijeku na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ ?

*Rješenje:* **a)** Sjecište je točka  $A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ; **b)**  $\operatorname{tg} \varphi = 3$ ,  $\varphi = 71.57^\circ$ ;

**c)**  $P = \frac{5}{2}$ ; **d)**  $|a| > \frac{1}{2}$ .