1.

Elementi simboličke logike

1.1. Napomena

Namjera ovog teksta je nadopuniti udžbenik pokojnog profesora Gaje Petrovića. Obrađena su ključna uvodna područja suvremene simboličke logike, kako bi se postojeći udžbenik uskladio sa znanstvenim i metodičkim dostignućima, kao i promjenama nastavnog plana nastalim od posljednje izmjene udžbenika. Pojedine teme koje su već obrađene u udžbeniku dijelom su ponovljene u ovom tekstu na nešto drugačiji način, te je tekst tako zadržao koherentnost.

Uz obradu temeljnih tema simboličke logike, posebno su naglašene primjene suvremene logike u trima najznačajnijim područjima — informatici, matematici i znanostima o jeziku. Ove su primjene obrađene kroz dodatne zadatke i probleme uz svako poglavlje, te dodatke koji obrađuju pojedine teme ovih primjena logike u područjima koja su učenicima dobrim dijelom poznata. Dodaci su prvenstveno namijenjeni učenicima odgovarajućih usmjerenja kao primjeri važnosti suvremene primjene logike, ali mogu biti korisni i drugim usmjerenjima.

Važno je naglasiti da simboličku logiku nije moguće naučiti bez vježbe i praktičnog rada. Na kraju svakog poglavlja nalaze se riješeni zadaci, te dodatni zadaci i problemi. Izuzetno je važno pokušati samostalno riješiti zadatke prije nego što se rješenja provjere u knjizi. Također, novo gradivo nemoguće je razumjeti bez razumijevanja prethodnog. Zbog toga je bolje, ako je potrebno, više puta pročitati tekst, a ne preskakati dijelove koji nisu shvaćeni. Uspješno riješeni zadaci i problemi najvažniji su pokazatelj razumijevanja.

1.2. Valjani zaključak — logički slijed

Napomena 1. *Ovo se poglavlje nadovezuje na poglavlja iz udžbenika "Uvod: Što je logika" i "Suvremeno učenje o zaključku". Utvrđuje se ključni pojam valjanog zaključka, odnosno logičkog slijeda, te se naglašavaju svojstva zaključka u simboličkoj logici.*

Središnji pojam suvremene simboličke logike pojam je logičkog slijeda. Najznačajnija vrsta logičkog slijeda je deduktivni logički slijed — deduktivni valjani zaključak. To je poseban odnos između premisa i konkluzije — sudova koji mogu biti ili istiniti ili neistiniti.

Konkluzija logički slijedi iz premisa ako uvijek kada su istinite premise, mora biti istinita i konkluzija.

Pogledajmo sljedeći primjer:

$$\begin{array}{l} \text{Pada kiša ili susjed zalijeva cvijeće.} \\ \text{Ne pada kiša.} \\ \hline \text{Susjed zalijeva cvijeće} \end{array}$$

Ako gledamo kroz prozor te vidimo kapljice vode i znamo da njihov izvor može biti kiša ili susjedovo zalijevanje cvijeća, te vidimo da kiša ne pada, tada možemo logički zaključiti, premda susjeda ne vidimo, da on zalijeva cvijeće. Kako je gornji zaključak valjan, u svakoj situaciji kada su obje premise istinite mora biti istinita i konkluzija, odnosno, nije moguće da su premise istinite, a konkluzija neistinita.

Važno je naglasiti da nije ništa rečeno o istinitosti konkluzije u slučaju kada barem jedna premisa nije istinita. Dakle, na primjer, ako nije istinita druga premisa, te kiša pada, nije važno je li konkluzija istinita, to jest zalijeva li susjed cvijeće ili ne, jer uvjet logičkog slijeda nije prekršen. Ovaj odnos možemo usporediti s pogodbom ili opkladom. Kada nekome kažemo, na primjer, "Ako Hrvatska bude prvak svijeta u nogometu, slavit će se cijelu noć.", to smo prekršili samo u jednom slučaju — kada je uvjet ispunjen, Hrvatska je postala prvak, a nije se slavilo cijelu noć. U svim ostalim slučajevima pogodba je ispunjena. Čak i u slučaju ako Hrvatska nije prvak, a slavilo se cijelu noć, pogodba nije prekršena, budući da nismo obećali "Ako i samo ako Hrvatska bude prvak svijeta u nogometu, slavit će se cijelu noć.", jer slaviti se moglo i iz drugih razloga.

Također je važno naglasiti kako ne moraju postojati točno dvije premise. Zaključci mogu imati samo jednu premisu ili ih može biti više. Poseban, rubni slučaj valjanog zaključka nema niti jednu premisu — tada je konkluzija uvijek istinita — tautologija.

Logika proučava svojstva zaključaka, neovisno radi li se svakodnevnom zaključivanju o susjedima, kiši i cvijeću, matematičkom dokazu ili zaključku u fizici, biologiji, kemiji ili nekoj drugoj znanosti ili području. Zbog toga je sljedeći primjer iz perspektive ispitivanja valjanosti zaključka jednak kao i prethodni:

$$\begin{array}{l} \text{Postoji najveći prirodni broj ili svaki prirodni broj ima sljedbenika.} \\ \text{Ne postoji najveći prirodni broj.} \\ \hline \text{Svaki prirodni broj ima sljedbenika.} \end{array}$$

Logička analiza zaključivanja ne bavi se pitanjima poput pada li doista kiša ili postoji li najveći prirodni broj, ona apstrahira sadržaj premisa i konkluzije, važno je samo znati njihove uvjete istinitosti. Kako bi prikazali samo ono što je za logički slijed bitno — logičku formu ili oblik, logičari koriste posebno konstruiran formalni jezik. Najjednostavniji takav jezik je jezik logike sudova.

1.3. Jezik logike sudova

Napomena 2. *Poglavljima "Vrste sudova" i "Račun sudova" u udžbeniku se na neformalan način uvodi jezik logike sudova. U ovom se poglavlju eksplicitno i preciznije definira pravilno sastavljena formula, što je nužno za daljnje izlaganje simboličke logike. Također se uvodi nova vrsta definicije — induktivna definicija. Induktivna definicija je najznačajnija vrsta definicije u simboličkoj logici.*

Prirodni jezici poput hrvatskog, engleskog ili njemačkog nastajali su kroz razvoj civilizacije. Za razliku od njih, formalni jezici poput jezika logike, aritmetike ili programskih jeziku nastaju tako da ih se definira. Prvi cilj definicije jezika jest precizno i nedvosmisleno propisati koji nizovi simbola — izrazi pripadaju jeziku, a koji ne. Dakako, najjednostavnija definicija bila bi jednostavno nabrajanje svih izraza koji sačinjavaju određen formalni jezik. Problem takve definicije jest to što izraza u bilo kojem zanimljivom jeziku ima proizvoljno mnogo. Zbog toga definicijom utvrđujemo pravila na temelju kojih možemo izgraditi bilo koji izraz, odnosno pomoću kojih možemo provjeriti pripada li neki izraz određenom jeziku ili ne. Dva su glavna dijela definicije izraza bilo kojeg formalnog jezika. Prvo treba točno definirati skup primitivnih znakova — simbola koji mogu sačinjavati izraze. Nakon toga je potrebno definirati na koji se način ti simboli kombiniraju u izraze jezika. Pojednostavljena usporedba s prirodnim jezikom bila bi da su riječi primitivni simboli, a gramatička pravila sintakse definiraju kako se riječi kombiniraju u izraze jezika — rečenice.

U jeziku logike razlikujemo dvije vrste primitivnih simbola; izvanlogičke i logičke. Izvanlogički simboli logike sudova su: $p, q, r, s \ldots$. To su sudne varijable kojima označavamo istinitosnu vrijednost suda. Ako nam u izrazu zatreba više sudnih varijabli nego što postoji slova, nove sudne varijable tvorimo dodavajući brojevne indekse: $p_1, p_2 \ldots$. Logički simboli logike sudova su logički veznici: implikacija $(\supset)$, disjunkcija $(\vee)$, konjunkcija $(\wedge$, u udžbeniku $\cdot)$, ekvivalencija $(\equiv)$ i negacija $(\neg)$, te otvorena i zatvorena zagrada: $($, $)$. Implikacija, disjunkcija, konjunkcija i ekvivalencija spajaju dvije formule te ih nazivamo binarnim veznicima, a negaciju unarnim. Izrazi u logici sudova moraju sadržavati samo navedene simbole.

Izrazi koji pripadaju jeziku logike nazivaju se pravilno sastavljene formule, a skraćeno ih nazivamo psf. Tako, na primjer, izraz (p/q) ne može biti pravilno sastavljena formula (psf) budući da sadrži simbol $/$. Ali uvjet da izraz sadrži samo navedene primitivne simbole nije dovoljan. Na primjer, izraz $))\vee((\neg$ nije pravilno sastavljena formula, premda sadrži samo dozvoljene simbole. Da bi neki izraz bio psf, mora biti sastavljen prema strogo određenim pravilima. Posebno je važan način na koji se ta pravila definiraju, budući da je to najvažniji način definiranja u suvremenoj logici. Vrstu definicije kojom definiramo psf nazivamo **induktivnom definicijom**. Induktivna definicija sastoji se od dvaju dijelova.

Prvi, u kojem definiramo temeljni slučaj, naziva se baza indukcije. U našoj definiciji psf baza indukcije definira da su sve sudne varijable pravilno sastavljene formule:

1. $p, q, r, s, \ldots$ su psf

   Dakle, bilo koja sudna varijabla koja stoji sama jest pravilno sastavljena formula. Naravno, tako nećemo moći doći do izraza dužeg od jednog znaka. Zato koristimo drugi dio induktivne definicije, koja se naziva korakom indukcije. Korak indukcije posebno je značajan budući da nam omogućuje da iz jedne ili više jednostavnih psf-a izvedemo novu složeniju psf.

2. Ako su A i B psf, onda su i

   (a) $(A \supset B)$
   (b) $(A \vee B)$
   (c) $(A \wedge B)$
   (d) $(A \equiv B)$
   (e) $\neg A$

   psf.

3. Pravilno sastavljene formule možemo dobiti samo primjenom prvog i drugog pravila.

Osnovna je ideja koraka indukcije da ga možemo primijeniti više puta i to na vlastitim rezultatima, te tako možemo izvesti proizvoljno dugačke izraze. Tako najprije primijenimo pravilo na primitivne simbole, te izvedemo duže formule. Nakon toga primijenimo pravilo na te duže formule, te izvedemo još duže formule, te tako nastavimo sve dok ne izvedemo željenu formulu.

Pogledajmo primjenu definicije psf-a na primjeru prve premise u gornjem primjeru. Tako ćemo istinosnu vrijednost suda "Kiša pada." označiti simbolom p, a suda "Susjed zalijeva cvijeće." simbolom q. Prvu premisu prikazat ćemo kao $(p \vee q)$. Dakle, zaključak ima sljedeću logičku formu:

$$\begin{array}{l} (p \vee q) \\ \neg p \\ \hline q \end{array} \quad .$$

Cijeli ćemo zaključak prikazati jednom pravilno sastavljenom formulom tako da konjunkcija premisa implicira konkluziju, čime dobivamo formulu (*usporedi s udžbenikom, poglavlje "Tautološki implikativni sudovi kao osnova valjanih shema zaključka"*):

$$(((p \vee q) \wedge \neg p) \supset q).$$

Nju možemo izvesti pomoću definicije na sljedeći način: najprije primijenimo prvo pravilo i izvedemo dvije pravilno sastavljene formule p i q. Nakon toga primijenimo pravilo 2b), uzmemo da je $A = p$, a $B = q$, te izvedemo novu psf $(p \vee q)$. Nakon toga primijenimo pravilo 2e) te uzmemo da je $A = p$ te izvedemo $\neg p$. Pravilom 2b), gdje je

$A = (p \vee q)$, a $B = \neg p$, ponovo izvodimo formulu $((p \vee q) \wedge \neg p)$. Napokon, kada u pravilu 2a) uzmemo da je $A = ((p \vee q) \wedge \neg p)$; a $B = q$, izvodimo našu formulu $(((p \vee q) \wedge \neg p) \supset q)$.

Na navedeni način možemo izvesti bilo koju pravilno sastavljenu formulu. Na isti način, samo primjenjujući pravila obrnutim redom možemo provjeriti je li neki izraz *psf*. Pogledajmo to na primjeru izraza $(((p \supset q) \vee r) \supset p)$. Najprije gledamo koje je pravilo zadnje primijenjeno, odnosno kojeg je oblika zadani izraz. U našem slučaju radi se o pravilu 2a), te je izraz oblika $(A \supset B)$, gdje je $A = ((p \supset q) \vee r)$, a $B = p$. Sada za oba sastavna izraza A i B treba pronaći pravila po kojima su izvedena, te tako nastaviti sve dok u svim izvodima ne dođemo do baze indukcije — prvog pravila. Dalje analiziramo izraz $((p \supset q) \vee r)$. On je dobiven primjenom pravila 2b), gdje je $A = (p \supset q)$, a $B = r$. Konačno, $(p \supset q)$ je dobiven pravilom 2a). Dakle, budući da smo u svim izvodima pronašli primijenjeno pravilo, možemo zaključiti da je naš izraz *psf*.

Pogledajmo kako bi izgledala analiza izraza koji nije *psf*, na primjer $((p \supset) \vee r)$. Prvo bismo primijenili pravilo 2b), gdje je $A = (p \supset)$, a $B = r$. No, sada treba pronaći pravilo kojim je dobiven izraz $(p \supset)$, a takvo pravilo ne postoji. Stoga možemo zaključiti da izraz nije *psf*. Općeniti postupak za provjeru je li neki izraz *psf* je jednostavan. Pokušaj pronaći koje je pravilo u izvođenju izraza posljednje primijenjeno. Ako takvo ne postoji, izraz nije *psf*. Ako je pravilo pronađeno, cijeli se postupak ponavlja na svim izrazima koji su korišteni u pravilu. Postupak završava kada nije moguće pronaći primijenjeno pravilo — tada izraz nije *psf*, ili kada je rastavljanje svih izraza dovedeno do sudnih varijabli — tada jest izraz *psf*.

1.3.1. Riješeni zadaci

Za sljedeće primjere pokušajte odrediti jesu li ili nisu *psf*, te za svaki primjer argumentirati odgovore. Riješite ih sami, prije nego ih provjerite u rješenjima.

1. $\neg\neg\neg\neg p$
2. p
3. $(\neg p)$
4. $((p \wedge q) \vee (q \wedge \neg p))$
5. $(q \vee q))$
6. $((r \wedge q) \vee p \supset (q \supset r))$
7. $(A \supset B)$
8. $(r \supset (p \supset (r \supset (q \supset r))))$
9. $(p \supset \neg p) \supset (p \vee q)$
10. Odredite oblik, temeljnu logičku formu formula iz prethodnih zadataka, tako da slovima A i B označite pravilno sastavljene formule.

Rješenja

1. Izraz je psf. Izveden je tako da je pravilo 2e) primijenjeno četiri puta.
2. Izraz je psf. Prema prvom pravilu, sve su sudne varijable pravilno sastavljene formule.
3. Izraz nije psf. Pravilo 2e) ne uključuje zagrade.
4. Izraz je psf. Za prvi dio izraza primijenjeno je pravilo 2c), a za drugi 2e, te potom 2c. Na kraju je primijenjeno pravilo 2b.
5. Izraz nije psf. Na kraju izraza nalazi se jedna desna zagrada viška. U psf broj lijevih zagrada isti je kao i broj desnih budući da sva pravila koja uključuju zagrade dodaju u izraz jednu lijevu i jednu desnu zagradu.
6. Izraz nije psf. Oblik izraza je $(A \vee B \supset C)$, što ne odgovara niti jednom pravilu. Da bi izraz bio ispravan, trebalo bi postaviti zagrade oko dvaju prvih ili zadnjih dijela izraza.
7. Izraz nije psf. Simboli A i B nisu primitivni simboli logike sudova. Njih koristimo za označavanje bilo koje pravilno sastavljene formule, te ih nazivamo metavarijablama.
8. Izraz je psf. Izveden je pomoću četiri primjene pravila 2a).
9. Izraz nije psf, barem ne strogo prema definiciji, budući da nedostaju vanjske zagrade. Ipak, u pisanju formula može se dozvoliti izostavljanje vanjskih zagrada radi kraćeg pisanja.
10. $\neg A$, A, nema, $(A \vee B)$, nema, nema, nema, $(A \supset B)$, nema.

1.3.2. Zadaci i problemi

1. Izgradite nekoliko psf-a duljine devet simbola. Koliko je različitih psf-a ove duljine moguće izgraditi?
2. (informatičari) Jezik logike sudova vrlo je jednostavan umjetni jezik, mnogo jednostavniji od programskih. Ako vladate nekim programskim jezikom, pokušajte napisati program koji na zadani niz znakova uzvraća je li on psf ili ne. Upute: predstavite logičke veznike odgovarajućim znakovima (na primjer $(>, v, ., -, =)$. Definirajte funkciju koja pronalazi glavni logički veznik u izrazu (brojeći otvorene i zatvorene zagrade), te rastavlja izraz na dva dijela (osim u slučaju negacije). Ako su dobiveni dijelovi izraza različiti od sudnih varijabli (p, q, r), funkciju rekurzivno primijenite na njima.
3. (informatičari) Ako ste uspjeli riješiti prethodni zadatak, nešto teži problem je napisati program koji generira sve različite psf-e zadane duljine.

4. (jezičari/informatičari) Umjetni, odnosno formalni jezici važan su dio suvremene znanosti o jeziku, kao i računalnih znanosti. Na način sličan gornjem pokušajte definirati druge jezike koje su vam poznati. Na primjer, jezik jednostavne aritmetike (brojevi, varijable i aritmetičke operacije) ili možda neki mali dio hrvatskog jezika.

1.4. Semantika logike sudova

Napomena 3. *Poglavljima "Vrste sudova" i "Račun sudova" u udžbeniku se na neformalani način uvodi semantika logike sudova. U ovom se poglavlju semantika logike sudova eksplicitno i preciznije definira. To je bitno za daljnje izlaganje simboličke logike, posebno razumijevanje istinosnih stabala.*

Nakon što smo definirali sintaksu jezika logike sudova — odredili što jest, a što nije pravilno sastavljena formula, sljedeći korak je definiranje značenja izraza — semantike jezika. Određivanje značenja izraza u logici se svodi na određivanje njihove istinitosti. Koje je onda značenje izraza: $(p \supset q)$, je li izraz istinit ili neistinit? Odgovor je isti kao i na pitanje koliko je $x + y$, zavisi, naravno, o vrijednostima sudnih varijabli p i q. Pravilno sastavljena formula ima određeno značenje (istinita je ili neistinita) samo ako je poznato značenje njezinih sudnih varijabli.

Prvi je korak u određivanju značenja određivanje značenja sudnih varijabli. Za svaku sudnu varijablu određujemo je li istinita ili nije. Kada je vrijednost istinita, koristit ćemo simbol $\top$, a za neistinitost ćemo koristiti simbol $\bot$. Takvo dodjeljivanje jedne od dviju istinosnih vrijednosti svakoj sudnoj varijabli naziva se interpretacija.

Osnovna je ideja definicije značenja u logici definirati na koji način istinitost složenih, dugačkih izraza ovisi o istinitosti jednostavnijih. Na taj način, induktivnom definicijom, isto kao i kod definicije psf-a, polazimo, odnosno na kraju dolazimo do sudnih varijabli. Definicija značenja izraza logike sudova izgledala bi ovako:

Pravilno sastavljena formula C istinita je u određenoj interpretaciji kada je:

1. C sudna varijabla koja je istinita,

2. C oblika:

   (a) $(A \land B)$ ako su obje, i A i B istinite;

   (b) $(A \lor B)$ ako je barem jedna istinita, odnosno ako je A istinita ili B istinita ili su obje istinite;

   (c) $(A \supset B)$ ako je A neistinita ili B istinita, odnosno u svim slučajevima osim kada je A istinita, a B neistinita;

   (d) $(A \equiv B)$ ako su obje istovremeno istinite ili neistinite, odnosno ako je njihova istinosna vrijednost jednaka;

   (e) $\neg A$ ako je A neistinita,

3. inače je C neistinita.

Pogledajmo primjer kako se pomoću ove definicije određuje istinitost formule $(p \supset (q \vee p))$, u interpretaciji u kojoj je p istinito, a q neistinito. Forma ove formule je $(A \supset B)$, gdje je $A = p$, a $B = (q \vee p)$, te stoga najprije primjenjujemo pravilo 2c. Nadalje, na prvi dio (p) primjenjujemo pravilo 1, te zaključujemo da je on istinit, te stoga drugi dio mora biti istinit kako bi cijela formula bila istinita. Nadalje, na drugi dio primjenjujemo pravilo 2b, te barem jedan dio drugog dijela formule $(q$ ili $p)$ mora biti istinit. Pomoću dviju primjena pravila 1 zaključujemo da je prvi dio drugog dijela neistinit, a drugi istinit, te je stoga B istinit, a konačno i cijela formula istinita.

U praksi ćemo istinitost formule u određenoj interpretaciji najlakše odrediti tako da potpišemo vrijednosti ispod sudnih varijabli, te dalje rješavamo formulu "iznutra prema van", od jednostavnijih prema složenijim izrazima.

Dakle, u prvom bismo koraku potpisali vrijednosti:

$$\begin{array}{ccccccccc} (& p & \supset & (& q & \vee & p &) &) \\ & \top & & & \bot & & \top & & \end{array}$$

te dalje riješili drugi dio formule

$$\begin{array}{ccccccccc} (& p & \supset & (& q & \vee & p &) &) \\ & \top & & & \bot & \top & \top & & \end{array},$$

i konačno cijelu formulu

$$\begin{array}{ccccccccc} (& p & \supset & (& q & \vee & p &) &) \\ & \top & \top & & \bot & \top & \top & & \end{array}.$$

1.4.1. Riješeni zadaci

Zajedno odredimo istinitost sljedećih primjera u interpretaciji gdje je p istinit, a q i r neistiniti:

1. $(p \supset q)$,
2. $(p \vee (q \wedge r))$,
3. $(p \equiv (q \supset r))$,
4. $((\neg p \supset \neg q) \wedge r)$,
5. $(((p \wedge r) \supset r) \vee \neg q)$.

Rješenja:

1. $$\begin{array}{ccccc} (& p & \supset & q &) \\ & \top & \bot & \bot & \end{array}$$

2. $$\begin{array}{ccccccccc} (& p & \vee & (& q & \wedge & r &) &) \\ & \top & \top & & \bot & \bot & \bot & & \end{array}$$

3. $\begin{array}{ccccccccc} (& p & \equiv & (& q & \supset & r &) &) \\ & \top & \top & & \bot & \top & \bot & & \end{array}$

4. $\begin{array}{ccccccccccc} (& (& \neg & p & \supset & \neg & q &) & \land & r &) \\ & & \bot & \top & \top & \top & \bot & & \top & \top & \end{array}$

5. $\begin{array}{cccccccccccccc} (& (& (& p & \land & r &) & \supset & r &) & \land & \neg & q &) \\ & & & \top & \bot & \bot & \bot & \top & \bot & & \top & \top & \bot & \end{array}$

1.4.2. Zadaci i problemi

1. Za svaku od sljedećih formula pronađite sve interpretacije u kojima su istinite: $(p \supset q)$, $(p \lor q)$, $(p \land q)$, $(p \equiv q)$, $(p \lor \neg p)$, $(p \supset (p \land p))$, $((p \lor r) \land (\neg p \land \neg q))$.

2. Zamislite otok na kojemu žive samo dvije vrste ljudi: istinoljupci i lažljivci. Istinoljupci izriču samo istinite sudove, a lažljivci lažne. Došli ste na taj otok i susreli dva otočana, Peru i Stipu, za koje ne znate jesu li istinoljupci ili lažljivci. Na temelju njihovih izjava pokušajte formulirati odgovarajuće sudove te u svakom slučaju odredite je li govornik istinoljubac ili lažljivac.

   - Stipe: "Ja sam istinoljubac ili lažljivac". Upute: Sa s označimo da je Stipe istinoljubac, a sa $\neg s$ da je lažljivac. Stipe tvrdi: $s \lor \neg s$. Znamo da je njegova tvrdnja istinita ako i samo ako je on istinoljubac. Dakle, ako je sud $s \equiv (s \lor \neg s)$ istinit u interpretaciji u kojoj je s istinit, Stipe je istinoljubac, a ako je istinit kada je s neistinito, Stipe je lažljivac.
   - Pero: "Stipe je lažljivac i istinoljubac".
   - Pero: "Stipe je lažljivac.". Stipe: "Pero je lažljivac.". (dva rješenja!)
   - Stipe: "Ja sam lažljivac." (Razmislite, usporedite s četvrtim zadatkom!)

3. U istoj situaciji kao i u prethodnom zadatku susreli ste trojicu otočana: Peru, Stipu i Radovana. Pero izjavi da je Stipe lažljivac, Stipe tvrdi da su Pero i Radovan jednaki, odnosno obojica lažljivci ili obojica istinoljupci. Predstavite problem logikom sudova i odredite kojoj grupi pripada je Radovan.

4. U istoj situaciji kao i u prethodnom zadatku pitali ste Peru: "Jesi li istinoljubac ili lažljivac?". Pero je nešto odgovorio, ali ga niste čuli. Tada pitate Stipu: "Što je Pero rekao?". Stipe odgovori "Rekao je da je lažljivac", a tada i Radovan reče: "Nemoj vjerovati Stipi. On laže!" Predstavite problem logikom sudova i odredite je li Pero istinoljubac ili lažljivac.

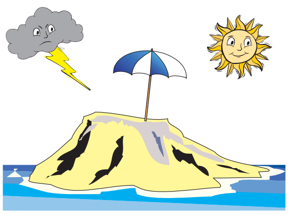
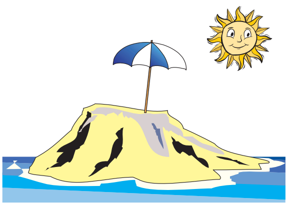
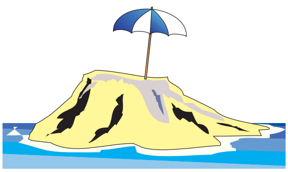
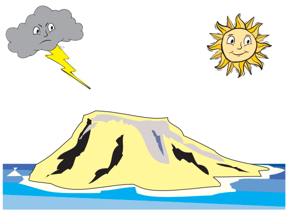
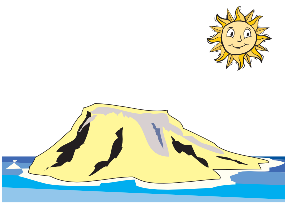
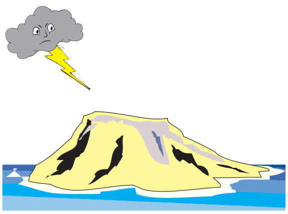
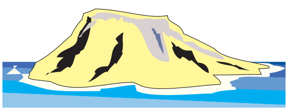
5. (jezičari) Veznici logike sudova u određenoj mjeri odgovaraju veznicima u prirodnim jezicima, ali ne u potpunosti. Značenje logičkih veznika precizno je određeno, dok su u prirodnim jezicima rečenice često višeznačne i neprecizne. Pronađite primjere rečenica gdje disjunkcija, konjunkcija i implikacija odgovaraju, te one gdje u potpunosti ne odgovaraju logičkoj formalizaciji.

6. (matematičari, informatičari) Definirajte odgovarajuću aritmetičku funkciju za izračunavanje semantičke vrijednosti logičkih veznika. Za vrijednost istinitosti uzmite 1, a neistinitosti 0. Od aritmetičkih funkcija upotrijebite zbrajanje, oduzimanje i množenje. Obratite pažnju na to da je vrijednost funkcije isključivo 0 ili 1. Na primjer, konjunkciju ćemo definirati kao $k(p, q) = p \times q$.

1.4.3. Otok logike sudova

Napomena 4. *U ovom poglavlju izlaže se ilustracija primjene logike sudova, u jednostavnom području prikladnom za učenike. Primjena ove metode olakšava savladavanje jezika i semantike logike sudova, te stvara podlogu za bolje razumijevanje ključnih pojmova poput interpretacije i valjanosti.*

Na jednom primjeru pogledajmo kako bi izgledala primjena logike sudova. Zamislimo jedan otok na kojem se mogu vidjeti samo tri pojave; sunce, oblak i suncobran. Prvo je pitanje koliko je različitih mogućih otoka vidljivo, uz pretpostavku da se sve tri pojave pojavljuju nezavisno jedna od druge. Imamo, dakle, tri moguća otoka sa po jednom pojavom, tri otoka sa po dvjema pojavama, jedan otok sa svim trima pojavama, te konačno goli otok bez ijedne pojave. Postoji, dakle, osam mogućih različitih otoka, koje možemo grafički predstaviti na sljedeći način:

1. 
2. 
3. 
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 

Kada ovaj otok želimo opisati logikom sudova, sunce ćemo predstaviti sudnom varijablom p, koja je istinita kada je sunce vidljivo, a neistinita kada nije. Oblak ćemo predstaviti sa q, a suncobran sa r. Pogledajmo sada koje otoke opisuje, odnosno o kojim su otocima istinite pojedine formule. Način na koji ćemo to provjeriti vrlo je jednostavan. Primjenjivat ćemo definiciju istinitosti, gdje ćemo prvi uvjet provjeriti na slici; ako je pojava koju predstavlja sudna varijabla vidljiva, ona je istinita, a inače nije.

Na primjer, formula r istinita je o prvim četirima otocima, a nije o zadnjim četirima. Obrnuto vrijedi za $\neg r$, koja je istinita o zadnjim četirima, a nije o prvim dvjema. Formula $(q \vee p)$ istinita je o svim otocima osim 4 i 8, gdje niti oblak niti sunce nisu vidljivi. O točno istim otocima istinita je i formula $\neg(\neg q \wedge \neg p)$, kao i $(\neg q \supset p)$ (provjerite gore!). Formula $((p \wedge q) \wedge r)$ istinita je samo o prvom otoku, gdje su sve tri pojave vidljive.

Osim što možemo tumačiti pojedine formule, gledati o kojim su otocima istinite, možemo krenuti i obrnutim putem. Za jedan ili više otoka možemo konstruirati formulu koja ih opisuje, odnosno koja je istinita o tim i točno tim otocima. Važno je uvidjeti da odabrane otoke možemo opisati pomoću više različitih formula, koje se eventualno razlikuju u eleganciji, odnosno dužini. Recimo da želimo opisati otoke 2 i 5, otoke na kojima su vidljivi suncobran i sunce ili sunce i oblak. Najjednostavniji način jest da prethodnu rečenicu zapišemo ekvivalentnom formulom: $((r \wedge p) \vee (p \wedge q))$, ona je, dakle, istinita o otoku 2 — $(r \wedge p)$ ili o otoku 5 — $(p \wedge q)$. Dakle, ostaje pitanje je li istinita samo o njima (razmislite!). Odgovor je, naravno, ne. Formula je istinita i o prvom otoku, te ako želimo točno opisati drugi i peti otok, moramo isključiti prvi. Precizna rečenica je, dakle: "Vidljivi su suncobran i sunce ili sunce i oblak, a ne istovremeno suncobran, sunce i oblak", a odgovarajuća formula $((r \wedge p) \vee (p \wedge q)) \wedge \neg(r \wedge (p \wedge q))$.

Pogledajmo drugi primjer, rečenicu koja opisuje sve otoke osim trećeg i četvrtog. Mogli bismo, dakle, opisati otok po otok, te ih međusobno povezati disjunkcijom. Prvi otok je $(r \wedge (p \wedge q))$, drugi $(r \wedge (p \wedge \neg q))$, te tako dalje. Cijela formula bila bi: $((((((r \wedge (p \wedge q)) \vee (r \wedge (p \wedge \neg q))) \vee (\neg r \wedge (p \wedge q))) \vee (\neg r \wedge (p \wedge \neg q))) \vee (\neg r \wedge (\neg p \wedge q))) \vee (\neg r \wedge (\neg p \wedge \neg q)))$.

Gornju formulu je, naravno, moguće pojednostaviti. Umjesto opisivanja svakog pojedinog otoka možemo uočiti da je na odabranim otocima vidljivo sunce ili samo oblak ili ništa. Odgovarajuća formula je: $(p \vee ((\neg r \wedge (\neg p \wedge q))) \vee (\neg r \wedge (\neg p \wedge \neg q)))$. Formulu možemo dodatno pojednostaviti ako potražimo pravilnosti koje vrijede na odabranim otocima, te uočimo da je uvijek kada je vidljiv suncobran, vidljivo i sunce, dakle, suncobran implicira sunce, ili formulom $(r \supset p)$.

1.4.4. Riješeni zadaci

1. O kojim su otocima istinite formule:

   (a) $(p \vee q)$,

   (b) $(p \supset q)$,

   (c) $\neg((p \wedge q) \wedge r)$,

(d) $(p \supset (p \wedge p))$,
(e) $(\neg p \wedge (p \wedge p))$?

2. Konstruirajte formule koje su istinite samo o sljedećim otocima:

   (a) 1–4,
   (b) 1–6,
   (c) 5, 6,
   (d) 1–8,
   (e) niti o jednom.

Rješenja

1. (a) 1, 2, 3, 5, 6, 7
   (b) 1, 3, 4, 5, 7, 8
   (c) 2–8
   (d) 1–8
   (e) niti o jednom.

2. Napomena: Zadani otoci mogu se opisati pomoću više različitih formula, ovdje su dani najjednostavniji primjeri.

   (a) r
   (b) $(r \vee p)$
   (c) $(p \wedge \neg r)$
   (d) $(p \vee \neg p)$
   (e) $(\neg p \wedge p)$

1.4.5. Zadaci i problemi

1. Pokušajte odigrati sljedeću igru. U igri sudjeluju dvije ekipe, odnosno dva pojedinca. Ekipa $\perp$ bira jedan od gornjih otoka. Nakon toga ekipa $\top$ konstruira *psf* koji sadrži do tri varijable p, q i r. Dalje ekipa $\top$ pokušava potvrditi formulu — pokušava pokazati da je istinita na odabranom otoku, dok je ekipa $\perp$ pokušava opovrgnuti. Igra se prema sljedećim pravilima. Ako je formula oblika

   $(A \vee B)$ — ekipa $\top$ bira A ili bira B, te je pokušava potvrditi;

   $(A \wedge B)$ — ekipa $\perp$ bira A ili bira B, te je pokušava opovrgnuti;

   $(A \supset B)$ — ekipa $\top$ bira $\neg A$ ili bira B, te je pokušava potvrditi;

$(A \equiv B)$ — ekipa $\bot$ bira $A \supset B$ ili bira $B \supset A$, te je pokušava opovrgnuti;

$\neg A$ — ekipa $\top$ i ekipa $\bot$ mijenjaju uloge, $\top$ pokušava opovrgnuti A, a $\bot$ je pokušava potvrditi;

p, q ili r — ako je sudna varijabla istinita u odabranom otoku, pobjeđuje ekipa $\top$, a ako nije, pobjeđuje ekipa $\bot$.

Odigrajte nekoliko igara mijenjajući ekipe. Razmislite o sličnosti igre s definicijom istinitosti formula logike sudova.

2. Dodajte otoku još jednu pojavu, na primjer palmu. Koliko različitih otoka sada postoji? Označite palmu sudnom varijablom s, te konstruirajte formule koje sada opisuju pojedine otoke. Na primjer, prva četiri otoka, sve parne otoke i slično.

1.4.6. Valjanost i logički slijed

Nakon što smo definirali kada je formula logike sudova istinita, možemo preciznije definirati i semantički logički slijed. Ako s Γ označimo skup premisa, a sa C konkluziju, semantički logički slijed označavat ćemo ovako:

$$\Gamma \models C$$

Kao što je gore navedeno, za logički slijed vrijedi da uvijek kada su istinite premise, mora biti istinita i konkluzija. Preciznije rečeno, sve interpretacije koje čine istinitim sve premise, čine istinitom i konkluziju. Isto smo rekli ako definiramo da ne postoji interpretacija u kojoj su sve premise istinite, a konkluzija nije.

Ispitivanje valjanosti logičkog slijeda u logici sudova vrlo je jednostavan postupak, jednostavno u svim mogućim interpretacijama treba provjeriti vrijedi li tvrdnja da je konkluzija istinita ako su istinite premise. U praksi ćemo to najjednostavnije ispitati istinosnim tablicama. Istinosne tablice konstruiramo tako da sve premise konjunkcijom povežemo u jednu formulu, koja implicira konkluziju. Ispod sudnih varijabli potpišemo sve moguće interpretacije, što možemo jednostavno izvesti. Najprije odredimo koliko različitih interpretacija postoji; ako ima n sudnih varijabli, broj interpretacija je 2^n. Ispod svih pojavljivanja prve sudne varijable prvo ispišemo do pola ($\frac{2^n}{2}$), simbol istinitosti, a drugu polovinu popunimo simbolom neistinitosti. Ispod druge varijable do prve četvrtine ispišemo simbol istinitosti, sljedeću četvrtinu neistinitost, te ponovno istinitost pa neistinitost. Tako dođemo do zadnje varijable u kojoj naizmjenično pišemo istinitost pa neistinitost. Sada jednostavno odredimo istinitost formule u svim tim interpretacijama. Ako je formula istinita u svim interpretacijama, logički slijed vrijedi, a ako je neistinita u barem jednoj, logički slijed ne vrijedi. Interpretaciju u kojoj formula nije istinita nazivamo kontraprimjerom. Pogledajmo to na primjeru: $p \supset q, \neg q \models \neg p$:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
(& (& p & \supset & q &) & \wedge & \neg & q &) & \supset & \neg & p \\
 & & \top & \top & \top & & \bot & \bot & \top & & \top & \bot & \top \\
 & & \top & \bot & \bot & & \bot & \top & \bot & & \top & \bot & \top \\
 & & \bot & \top & \top & & \bot & \bot & \top & & \top & \top & \bot \\
 & & \bot & \top & \bot & & \top & \top & \bot & & \top & \top & \bot
\end{array}.
$$

Poseban slučaj logičkog slijeda je kada nema premisa, odnosno kada konkluzija bezuvjetno vrijedi u svim interpretacijama. Takvu se formula označava s

$$\models C,$$

te je u slučaju logike sudova nazivamo tautologijom. Važno je primijetiti da je formula koja predstavlja logički slijed, odnosno valjan zaključak tautologija.

1.4.7. Riješeni zadaci

1. Metodom istinosnih tablica provjerite jesu li sljedeće formule tautologije:

   (a) $(p \supset p)$,

   (b) $(p \supset \neg p)$,

   (c) $((p \wedge q) \supset (p \vee q))$,

   (d) $((p \vee r) \wedge p)$,

   (e) $\neg(p \wedge \neg p)$.

Rješenja

1. (a) Da

   (b) ne

   (c) da

   (d) ne

   (e) da.

1.4.8. Zadaci i problemi

1. Čuveni pisac i matematičar Lewis Carrol izmislio je zagonetku koja uključuje 18 različitih sudova. Koliko bi redova imala istinosna tablica koja bi predstavljala ovu zagonetku?