1. Realni brojevi

1.1. Skupovi brojeva

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$

Skup prirodnih brojeva zatvoren je s obzirom na operacije zbrajanja i množenja. To znači da se bilo koja dva broja (ili više njih) mogu zbrajati i množiti i kao rezultat opet dobivamo prirodni broj.

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, n, n+1, \ldots\}$

Skup cijelih brojeva je osim operacija zbrajanja i množenja zatvoren i s obzirom na operaciju oduzimanja.

$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbf{Z}, b \neq 0 \right\}$

U skupu racionalnih brojeva osim već navedenih operacija definirano je i dijeljenje, pri čemu je djelitelj različit od 0.

$\mathbf{I} = \left\{ \mathbf{x} : \mathbf{x} \quad \textbf{se ne može prikazati u obliku} \quad \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} \right\}$

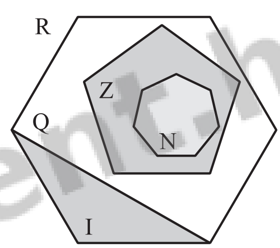
U skupu iracionalnih brojeva nalaze se oni brojevi koje ne možemo prikazati kao količnike dvaju cijelih brojeva.

$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$

Skup realnih brojeva je unija skupova racionalnih i iracionalnih brojeva. Svaki realni broj a možemo prikazati u konačnom ili beskonačnom decimalnom prikazu $a = \pm a_0.a_1a_2\ldots$ gdje je a_0 prirodni broj ili nula, a a_1, a_2, $\ldots$ su neke od znamenaka 0, $1, \ldots, 9$.

Vrijede sljedeći skupovni odnosi:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}, \quad \mathbf{I} \subset \mathbf{R}$$
$$\mathbf{Q} \cap \mathbf{I} = \emptyset, \quad \mathbf{Q} \cup \mathbf{I} = \mathbf{R}$$



Svojstva skupova N, Z i Q:

- Skup $\mathbf{N}$ ima najmanji element 1, ali nema najveći.
- Skup $\mathbf{Z}$ nema ni najmanji ni najveći element. Ako je $a \in \mathbf{Z}$, onda nema elementa u $\mathbf{Z}$ koji bi bio između $a-1$ i a, tj. između a i $a+1$.

- Skup $\mathbf{Q}$ nema ni najmanji ni najveći element. Između bilo koja dva racionalna broja a i b $(a < b)$ postoji barem jedan racionalan broj c takav da vrijedi $a < c < b$. To svojstvo zove se gustoća skupa $\mathbf{Q}$.

Jednakost racionalnih brojeva:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Longleftrightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Operacije s racionalnim brojevima:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Svaki racionalni broj može se kraćenjem dovesti na oblik u kojem brojnik i nazivnik nemaju zajedničkih djelitelja.

Svojstva zbrajanja i množenja realnih brojeva:

1. **Komutativnost**: $a+b=b+a, \quad a \cdot b = b \cdot a$
2. **Asocijativnost**: $(a+b)+c = a+(b+c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. **Distributivnost** množenja prema zbrajanju (obostrana):

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

4. **Postojanje neutralnih elemenata**, 0 za zbrajanje i 1 za množenje:

$$a+0 = 0+a = a, \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

5. **Postojanje suprotnog elementa** za zbrajanje i **recipročnog elementa** za množenje:

$$a+(-a) = (-a)+a = 0, \quad a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$$

Skup $\mathbf{R}$ je **uređen**, tj. njegovi elementi mogu se međusobno uspoređivati:

1. $a \le b$ ili $b \le a$.
2. Ako je $a \le b$ i $b \le a$, onda je $a = b$.
3. Ako je $a \le b$ i $b \le c$, onda je $a \le c$.
4. Ako je $a \le b$, tada za svaki $c \in \mathbf{R}$ vrijedi $a+c \le b+c$.
5. Ako je $0 \le a$ i $0 \le b$, onda je $0 \le a \cdot b$.

1.2. Zadaci

Zadatak 1.

Odredi pet uzastopnih:

a) prirodnih brojeva čiji je zbroj 70

b) parnih prirodnih brojeva čiji je zbroj 90

c) neparnih prirodnih brojeva čiji je zbroj 125

Rješenje:

a) $n-2, n-1, n, n+1, n+2 \implies$ pet uzastopnih prirodnih brojeva

$n-2+n-1+n+n+1+n+2=70$

$5n=70\ /:5$

$n=14 \implies 12, 13, 14, 15, 16$

b) $2n-4, 2n-2, 2n, 2n+2, 2n+4 \implies$ pet uzastopnih parnih prirodnih brojeva

$2n-4+2n-2+2n+2n+2+2n+4=90$

$10n=90\ /:10$

$n=9 \implies 14, 16, 18, 20, 22$

c) $2n-3, 2n-1, 2n+1, 2n+3, 2n+5 \implies$ pet uzastopnih neparnih prirodnih brojeva

$2n-3+2n-1+2n+1+2n+3+2n+5=125$

$10n+5=125$

$10n=120\ /:10$

$n=12 \implies 21, 23, 25, 27, 29$

Zadatak 2.

Izračunaj:

a) $1+2+3+\ldots+22+23+24$ **b)** $12+15+18+\ldots+105+108+111$

Rješenje:

a) Traženi zbroj označimo sa S. Zatim pribrojnike napišemo u obrnutom poretku i zbrojimo te dvije jednakosti.

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \ldots + 22 + 23 + 24 \\ \underline{S} &\underline{= 24 + 23 + 22 + \ldots + 3 + 2 + 1} \\ 2S &= \underbrace{25 + 25 + 25 + \ldots + 25 + 25 + 25}_{\text{24 pribrojnika}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2S &= 24 \cdot 25 \ / : 2 \\ S &= 12 \cdot 25 \\ S &= 300 \end{aligned}$$

b) Postupamo kao i u **a)** dijelu zadatka:

$$\begin{aligned} S &= 12 + 15 + 18 + \ldots + 105 + 108 + 111 \\ \underline{S} &\underline{= 111 + 108 + 105 + \ldots + 18 + 15 + 12} \\ 2S &= \underbrace{123 + 123 + 123 + \ldots + 123 + 123 + 123}_{\text{34 pribrojnika}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2S &= 34 \cdot 123 \ / : 2 \\ S &= 17 \cdot 123 \\ S &= 2091 \end{aligned}$$

Kako određujemo broj pribrojnika? Od zadnjeg člana traženog zbroja oduzmemo prvi član, $111 - 12 = 99$, te dobiveni rezultat podijelimo s razlikom između svaka dva člana koja u ovom zadatku iznosi 3, $99 : 3 = 33$. Dodamo 1 jer se broje i prvi i zadnji član, $33 + 1 = 34$.

Zadatak 3.

Nađi najveći zajednički djelitelj (mjeru) i najmanji zajednički višekratnik brojeva 120 i 192.

Rješenje: Najveća zajednička mjera je umnožak svih prostih faktora koji su zajednički i jednom i drugom broju. Najmanji zajednički višekratnik jednak je umnošku svih prostih faktora koji se javljaju ili u jednom ili u drugom broju.

$$\begin{array}{cc|c} 120 & 192 & 2 \\ 60 & 96 & 2 \\ 30 & 48 & 2 \\ 15 & 24 & 3 \\ \hline 5 & 8 & 5 \\ 1 & 8 & 8 \\ 1 & 1 & \end{array}$$

$\text{NZD}(120, 192) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$

$\text{NZV}(120, 192) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 = 960$

Zadatak 4.

Izračunaj:

a) $\left(85\frac{7}{30}-\frac{1499}{18}\right):\frac{8}{3}$ **b)** $\left(3.5-\frac{5}{4}\right):\left(-2\frac{1}{4}\right)+0.75:\frac{3}{4}$

Rješenje:

a)
$$\left(85\frac{7}{30}-\frac{1499}{18}\right):\frac{8}{3}=\left(\frac{85\cdot 30+7}{30}-\frac{1499}{18}\right)\cdot\frac{3}{8}$$
$$=\left(\frac{2557}{30}-\frac{1499}{18}\right)\cdot\frac{3}{8}=\frac{3\cdot 2557-5\cdot 1499}{90}\cdot\frac{3}{8}$$
$$=\frac{7671-7495}{90}\cdot\frac{3}{8}=\frac{176}{90}\cdot\frac{3}{8}=\frac{88}{45}\cdot\frac{3}{8}=\frac{11}{15}$$

b)
$$\left(3.5-\frac{5}{4}\right):\left(-2\frac{1}{4}\right)+0.75:\frac{3}{4}$$
$$=\left(\frac{35}{10}-\frac{5}{4}\right):\left(-\frac{2\cdot 4+1}{4}\right)+\frac{75}{100}\cdot\frac{4}{3}$$
$$=\left(\frac{7}{2}-\frac{5}{4}\right):\left(-\frac{9}{4}\right)+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{14-5}{4}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)+1$$
$$=\frac{9}{4}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)+1=-1+1=0$$

Zadatak 5.

Izračunaj:

a) $\frac{1}{3}:\left\{\frac{3}{4}-2\cdot\left[\frac{1}{6}-5\cdot\left(-2+2\frac{1}{12}\right):\frac{3}{2}\right]\right\}$

b) $\frac{0.875}{3.2-1\frac{1}{3}}\cdot\frac{1.2}{3+\frac{3}{4}}\cdot\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{4}}$

c) $\left[\frac{\left(2\frac{2}{5}+\frac{12}{7}\right):\frac{8}{35}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}-\frac{\left(2\frac{3}{4}-\frac{11}{6}\right)\cdot 21}{8\frac{3}{20}-\frac{9}{20}}\right]:\frac{67}{20}$

Rješenje:

a)

$$\frac{1}{3}:\left\{\frac{3}{4}-2\cdot\left[\frac{1}{6}-5\cdot\left(-2+2\frac{1}{12}\right):\frac{3}{2}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{3}:\left\{\frac{3}{4}-2\cdot\left[\frac{1}{6}-5\cdot\left(-2+\frac{2\cdot 12+1}{12}\right)\cdot\frac{2}{3}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{3}:\left\{\frac{3}{4}-2\cdot\left[\frac{1}{6}-5\cdot\left(-2+\frac{25}{12}\right)\cdot\frac{2}{3}\right]\right\}=\frac{1}{3}:\left\{\frac{3}{4}-2\cdot\left[\frac{1}{6}-5\cdot\frac{-24+25}{12}\cdot\frac{2}{3}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{3}:\left\{\frac{3}{4}-2\cdot\left[\frac{1}{6}-5\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{3}\right]\right\}=\frac{1}{3}:\left\{\frac{3}{4}-2\cdot\left[\frac{1}{6}-\frac{5}{18}\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{3}:\left\{\frac{3}{4}-2\cdot\frac{3-5}{18}\right\}=\frac{1}{3}:\left\{\frac{3}{4}+\frac{2}{9}\right\}=\frac{1}{3}:\frac{27+8}{36}=\frac{1}{3}\cdot\frac{36}{35}=\frac{12}{35}$$

b)

$$\frac{0.875}{3.2-1\frac{1}{3}}\cdot\frac{1.2}{3+\frac{3}{4}}\cdot\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{875}{1000}}{\frac{32}{10}-\frac{1\cdot 3+1}{3}}\cdot\frac{\frac{12}{10}}{\frac{12+3}{4}}\cdot\frac{\frac{3-1}{3}}{\frac{4+1}{4}}$$

$$=\frac{\frac{7}{8}}{\frac{16}{5}-\frac{4}{3}}\cdot\frac{\frac{6}{5}}{\frac{15}{4}}\cdot\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}}=\frac{\frac{7}{8}}{\frac{48-20}{15}}\cdot\frac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{4}}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}=\frac{\frac{7}{8}}{\frac{28}{15}}\cdot\frac{2\cdot 4}{5\cdot 5}\cdot\frac{8}{15}$$

$$=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{15}}\cdot\frac{8}{25}\cdot\frac{8}{15}=\frac{15}{32}\cdot\frac{8}{25}\cdot\frac{8}{15}=\frac{2}{25}$$

c)

$$\left[\frac{\left(2\frac{2}{5}+\frac{12}{7}\right):\frac{8}{35}}{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}-\frac{\left(2\frac{3}{4}-\frac{11}{6}\right)\cdot 21}{8\frac{3}{20}-\frac{9}{20}}\right]:\frac{67}{20}$$

$$=\left[\frac{\left(\frac{2\cdot 5+2}{5}+\frac{12}{7}\right)\cdot\frac{35}{8}}{\frac{4-1}{6}}-\frac{\left(\frac{2\cdot 4+3}{4}-\frac{11}{6}\right)\cdot 21}{\frac{8\cdot 20+3}{20}-\frac{9}{20}}\right]\cdot\frac{20}{67}$$

$$=\left[\frac{\left(\frac{12}{5}+\frac{12}{7}\right)\cdot\frac{35}{8}}{\frac{1}{2}}-\frac{\left(\frac{11}{4}-\frac{11}{6}\right)\cdot 21}{\frac{163}{20}-\frac{9}{20}}\right]\cdot\frac{20}{67}$$

$$= \left[\frac{\frac{84+60}{35}\cdot\frac{35}{8}}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{33-22}{12}\cdot 21}{\frac{154}{20}}\right]\cdot\frac{20}{67} = \left[\frac{\frac{144}{35}\cdot\frac{35}{8}}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{11}{12}\cdot 21}{\frac{77}{10}}\right]\cdot\frac{20}{67}$$

$$= \left[\frac{18}{\frac{1}{2}} - \frac{\frac{77}{4}}{\frac{77}{10}}\right]\cdot\frac{20}{67} = \left[36-\frac{5}{2}\right]\cdot\frac{20}{67} = \frac{72-5}{2}\cdot\frac{20}{67} = \frac{67}{2}\cdot\frac{20}{67} = 10$$

Zadatak 6.

Izračunaj x iz sljedećih jednakosti:

a) $$\frac{5}{(4x+12):2.5\cdot\frac{1}{2}+3} = 1$$

b) $$\left[68-\frac{(100-3x)\cdot 2}{13}\right]:52 = 3$$

Rješenje:

a)

$$\frac{5}{(4x+12):2.5\cdot\frac{1}{2}+3} = \frac{1}{1}$$

$$(4x+12):\frac{25}{10}\cdot\frac{1}{2}+3 = 5$$

$$(4x+12)\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2} = 5-3$$

$$\frac{4x+12}{5} = \frac{2}{1}$$

$$4x+12 = 10$$

$$4x = -2 \ / :4$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

b)

$$\frac{\left[68-\frac{(100-3x)\cdot 2}{13}\right]}{52} = \frac{3}{1}$$

$$68-\frac{(100-3x)\cdot 2}{13} = 156$$

$$-\frac{200-6x}{13} = 156-68$$

$$\frac{6x-200}{13} = \frac{88}{1}$$

$$6x-200 = 1144$$

$$6x = 1344 \ / :6$$

$$x = 224$$

Zadatak 7.

Izračunaj vrijednost brojevnog izraza $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right):\frac{a+b}{ab}$ za $a = 1\frac{1}{2}$ i $b = -0.6$.

Rješenje: $a = 1\frac{1}{2} = \frac{1\cdot 2+1}{2} = \frac{3}{2}$ $\qquad b = -0.6 = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right) : \frac{a+b}{ab} = \left(\frac{1}{\frac{3}{2}} - \frac{1}{-\frac{3}{5}}\right) : \frac{\frac{3}{2}-\frac{3}{5}}{\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)}$$

$$= \left(\frac{2}{3}+\frac{5}{3}\right) : \frac{\frac{3\cdot 5 - 3\cdot 2}{10}}{-\frac{9}{10}} = \frac{7}{3} : \frac{\frac{9}{10}}{-\frac{9}{10}} = \frac{7}{3} : (-1) = -\frac{7}{3}$$

Zadatak 8.

Izračunaj $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{a-b}$, $\frac{a+b}{a-b}$ ako je $\frac{a}{a+b} = \frac{1}{3}$.

Rješenje: Iz $\frac{a}{a+b} = \frac{1}{3}$ slijedi $a+b = 3a$, $b = 2a$.
U tražene brojevne izraze umjesto b uvrstit ćemo $2a$:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{a}{a-b} = \frac{a}{a-2a} = \frac{a}{-a} = -1$$
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{a+2a}{a-2a} = \frac{3a}{-a} = -3$$

Zadatak 9.

Poredaj po veličini brojeve $2\frac{3}{4}$, $\frac{8}{3}$, $1\frac{13}{12}$, $\frac{5}{2}$ počevši od najmanjeg.

Rješenje: Razlomke ćemo proširiti tako da njihovi nazivnici budu jednaki. Najmanji zajednički višekratnik brojeva 4, 3, 12 i 2 je broj 12.

$$2\frac{3}{4} = \frac{2\cdot 4+3}{4} = \frac{11}{4} = \frac{33}{12} \qquad \frac{8}{3} = \frac{32}{12}$$
$$1\frac{13}{12} = \frac{1\cdot 12+13}{12} = \frac{25}{12} \qquad \frac{5}{2} = \frac{30}{12}$$
$$\frac{25}{12} < \frac{30}{12} < \frac{32}{12} < \frac{33}{12} \implies 1\frac{13}{12} < \frac{5}{2} < \frac{8}{3} < 2\frac{3}{4}$$

Zadatak 10.

Poredaj po veličini brojeve $-\frac{7}{3}$, $-2\frac{5}{6}$, $-\frac{11}{4}$, -2.5 počevši od najvećeg.

Rješenje:

$$-\frac{7}{3}=-\frac{28}{12} \qquad -2\frac{5}{6}=-\frac{2\cdot 6+5}{6}=-\frac{17}{6}=-\frac{34}{12}$$

$$-\frac{11}{4}=-\frac{33}{12} \qquad -2.5=-\frac{25}{10}=-\frac{5}{2}=-\frac{30}{12}$$

$$-\frac{28}{12}>-\frac{30}{12}>-\frac{33}{12}>-\frac{34}{12} \implies -\frac{7}{3}>-2.5>-\frac{11}{4}>-2\frac{5}{6}$$

Zadatak 11.

Odredi sve cijele brojeve n za koje je dani razlomak cijeli broj:

a) $\frac{12}{n}$ **b)** $\frac{n}{n-1}$ **c)** $\frac{2n+1}{n-3}$

Rješenje: Nazivnik danog razlomka mora biti cjelobrojni djelitelj brojnika.

a) $\frac{12}{n} \implies n=\{\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12\}$

b) $\frac{n}{n-1}=\frac{n-1+1}{n-1}=\frac{n-1}{n-1}+\frac{1}{n-1}=1+\frac{1}{n-1}$

Cjelobrojni djelitelji broja 1 su brojevi 1 i -1 pa mora vrijediti:

$n-1=1 \implies n=2$

$n-1=-1 \implies n=0$

c) $\frac{2n+1}{n-3}=\frac{2n-6+7}{n-3}=\frac{2(n-3)}{n-3}+\frac{7}{n-3}=2+\frac{7}{n-3}$

Cjelobrojni djelitelji broja 7 su brojevi ±1 i ±7 pa mora vrijediti:

$n-3=1 \implies n=4$

$n-3=-1 \implies n=2$

$n-3=7 \implies n=10$

$n-3=-7 \implies n=-4$

Zadatak 12.

Odredi pet brojeva čija je aritmetička sredina 2.8, a svaki idući broj je od prethodnog veći za 0.3.

Rješenje: $n, n+0.3, n+0.6, n+0.9, n+1.2 \implies$ traženi brojevi

Aritmetička sredina n brojeva je broj koji dobijemo kad njihovu sumu podijelimo s n.

$$\frac{n+n+0.3+n+0.6+n+0.9+n+1.2}{5}=2.8$$
$$\frac{5n+3}{5}=2.8 \Big/ \cdot 5$$
$$5n+3=14$$
$$5n=11 \ / : 5$$
$$n=2.2 \implies 2.2, 2.5, 2.8, 3.1, 3.4$$

Zadatak 13.

U nekom razredu s 28 učenika prosječna ocjena ispita iz logike je 2.5. Kolika je prosječna ocjena učenika koji su dobili pozitivnu ocjenu ako je četvero učenika dobilo 1?

Rješenje: Označimo s n zbroj svih ocjena. Prosječnu ocjenu svih učenika dobijemo kad zbroj ocjena podijelimo s ukupnim brojem učenika. Iz te relacije izračunat ćemo n.

$$\frac{n}{28}=2.5 \Big/ \cdot 28$$
$$n=70$$

Da bismo izračunali prosječnu ocjenu pozitivno ocijenjenih učenika, od ukupnog broja učenika oduzmemo 4 jer je četvero učenika dobilo 1, a od zbroja svih ocjena oduzmemo jedinice.

$$n-4\cdot 1=70-4=66 \implies \text{zbroj pozitivnih ocjena}$$
$$28-4=24 \implies \text{broj učenika koji su dobili pozitivnu ocjenu}$$
$$\frac{66}{24}=2.75$$

Prosječna ocjena pozitivno ocijenjenih učenika je 2.75.