1. SKUPOVI BROJEVA

1.1. Uvod

Skup je jedan od temeljnih matematičkih pojmova. Promatramo li dva razredna odjela A i B prvog razreda vaše škole, svaki kao posebnu cjelinu, kažemo da svaki od njih čini po jedan skup. Ako je x učenik iz odjela A, a y učenik iz odjela B, kažemo da je x **član** ili **element skupa** A, a y član (element) skupa B, što zapisujemo $x \in A$, $y \in B$. Isto tako oznake $x \notin B$ i $y \notin A$ znače da x nije element skupa B, odnosno y nije element skupa A.

Broj članova skupa A zove se **kardinalni broj** tog skupa i označujemo $|A|$. Na primjer, ako se u odjelu A nalazi 28, a u odjelu B 30 učenika, pišemo $|A| = 28$, $|B| = 30$.

Elementi skupova mogu biti bilo koji predmeti ili pojmovi, realni ili apstraktni.

Tako govorimo o skupu zgrada jedne ulice, o skupu vrhova jednog šesterokuta, o skupu planeta Sunčeva sustava.

Skupovi mogu biti konačni ili beskonačni. Tako, na primjer, skup svih dvoznamenkastih prirodnih brojeva ima 90 članova i zato je konačan. Skup svih prirodnih brojeva je beskonačan.

Ako skup S sadrži članove a, b, c i d i nema drugih elemenata, zapisujemo $S = \{a, b, c, d\}$. Za beskonačne skupove ne možemo ispisati sve elemente, zbog čega ih drugačije označujemo. Tako, na primjer, $M = \{n : n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 12\}$ znači skup $\{12, 13, 14, \ldots\}$, to jest skup svih prirodnih brojeva većih od 11.

Za zadani skup A, skup B zove se **podskup** od A, ako je svaki član skupa B ujedno i član skupa A. Obratno ne mora vrijediti. To zapisujemo $B \subset A$.

Tako su, na primjer, skupovi: $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 4, 7\}$, $\{2\}$, $\{1, 2, 3, 5, 9\}$ podskupovi skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Očito to nisu jedini podskupovi.

Za zadane skupove A i B, skup C koji sadrži svaki element skupa A i svaki element skupa B i nema drugih elemenata zove se **unija skupova** A i B i označava $C = A \cup B$.

Na primjer, za skupove $A = \{1, 2, 5, 7\}$ i $B = \{1, 3, 7, 9, 10\}$ i $C = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$ vrijedi $C = A \cup B$.

Ako skup H sadrži samo elemente koji se nalaze i u skupu F i u skupu G, kažemo da je H **presjek skupova** F i G. To se označuje $H = F \cap G$.

Na primjer: $F = \{a, b, d, e, f\}$, $G = \{b, c, d, f, h\}$ i $H = F \cap G = \{b, d, f\}$.

Skupovi koji nemaju zajedničkih članova zovu se disjunktni skupovi. Kažemo da je presjek takvih skupova prazan skup, koji označujemo $\emptyset$.

Ako je $S = \{1, 3, 5, 7\}$, $P = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, tada je $S \cap P = \emptyset$.

Od svih skupova matematika najčešće proučava dvije posebne vrste skupova, to su skupovi brojeva i skupovi točaka. U nastavi matematike osnovne škole susreli smo neke skupove brojeva i upoznali glavna svojstva tih skupova. Isto smo tako naučili pravila koja vrijede pri računanju s tim brojevima. U ovom poglavlju proučavat ćemo te iste skupove brojeva, pri čemu ćemo znanja proširiti i sistematizirati.

Osim proučavanja svojstava skupova brojeva, matematika proučava pravila i zakonitosti pri računanju u tim skupovima. Do sada smo upoznali takozvane četiri osnovne računske radnje: zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje. U ovom razredu proširit ćemo naša znanja još dvjema računskim operacijama. To su potenciranje i korjenovanje.

Matematika je strogo egzaktna znanost. Zato, pri donošenju zaključaka moramo biti veoma oprezni, čak i onda kada smo, na prvi pogled sigurni da znamo rezultat, odnosno odgovor. Uvijek moramo promatrati sve mogućnosti koje mogu slijediti iz zadanih podataka nekog zadatka ili problema. Promatrajmo dva jednostavna zadatka, na prvi pogled, potpuno istog tipa.

1. U razrednom odjelu A ima 28, a u odjelu B ima 30 učenika. Koliko učenika ima ukupno u ta dva odjela?
2. Pet učenika odjela A igra košarku, a četiri učenika tog odjela igraju nogomet. Nekim trećim športom ne bavi se nijedan učenik tog odjela. Koliko se ukupno učenika tog odjela bavi športom?

Rješenje prvog zadatka je jednostavno: $28 + 30 = 58$. Odgovor glasi: u ta dva odjela ima ukupno 58 učenika.

Pri rješavanju drugog zadatka nemojte biti brzopleti i napisati $5 + 4 = 9$, jer to nije točno. Zadatak je neodređen. Iz zadanih podataka možemo zaključiti samo da se najmanje 5, a najviše 9 učenika tog odjela bavi športom. Objasnite sami sebi zašto je to tako. Pri rješavanju ovog zadatka, osim poznavanja računskih radnja, moramo znati međusobne odnose skupa učenika koji igraju košarku i skupa učenika koji igraju nogomet. Naime, neki učenici mogu se baviti obama športovima.

Mali matematički rječnik

Skup. Element. Podskup. Unija. Presjek. Kardinalni broj skupa.

Oznake: $\{\ \}$, $\in$, $\notin$, $\cup$, $\cap$.

Za skupove A i B vrijedi $|A \cup B| = |A| + |B|$ samo ako su A i B disjunktni skupovi, to jest samo ako je $A \cap B = \emptyset$. Inače, za bilo koja dva skupa vrijedi $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

U prvom poglavlju proučavat ćemo skupove: prirodnih, cijelih, racionalnih te konačno realnih brojeva. Poglavlje završava preslikavanjem skupa realnih brojeva na pravac, to jest koordinatnim sustavom na pravcu.

1.2. Prirodni brojevi

Ako se u mislima vratimo u daleku povijest ljudskog roda, ili točnije rečeno u povijest razvitka ljudskih znanja, zaključit ćemo da je prvo matematičko znanje koje je čovjek usvojio vjerojatno bilo brojenje.

Iskustvom, čovjek je spoznao da na nebu sja (samo) *jedno* Sunce, da svaki čovjek ima *dva* oka, da neke životinje imaju *dvije*, a neke *četiri* noge. Promatranjem predmeta u *prirodi*, došao je do pojmova koje mi danas apstraktno zovemo: jedan, dva, tri, četiri, ... i označujemo $1, 2, 3, 4, \ldots$

Nigdje u prirodi ne postoji $\frac{2}{3}$ stabla, ili 0.2 kamena. Zato brojeve $1, 2, 3, \ldots$ zovemo **prirodnim brojevima**. Skup svih prirodnih brojeva označujemo $\mathbf{N}$, što je početno slovo latinske riječi natura = priroda. To zapisujemo $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Točkice u ovom zapisu znače da iza svakog prirodnog broja dolazi točno određen prirodan broj koji se zove **sljedbenik** tog broja. Tako je broj 2 sljedbenik broja 1, broj 17 sljedbenik broja 16 i tako dalje. Zbog toga vrijede sljedeće činjenice:

Skup $\mathbf{N}$ je beskonačan. U skupu $\mathbf{N}$ postoji najmanji član, to je broj 1. U skupu ne postoji najveći element.

Primjer 1.

Zadan je skup $M = \{1, 2, 3, 4, 7, 23\}$. Što možemo utvrditi za skup M u odnosu na skup $\mathbf{N}$?

Vidimo da je svaki član skupa M prirodan broj, to jest ujedno je i element skupa $\mathbf{N}$. Zato je M podskup skupa $\mathbf{N}$ i zapisujemo $M \subset \mathbf{N}$.

Za proučavanje skupa $\mathbf{N}$ važna su njegova dva podskupa:

$$L = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}, \qquad T = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}.$$

Prvi od ovih podskupova zove se skup svih neparnih, a drugi skup svih parnih prirodnih brojeva. Očito vrijede činjenice:

$$L \cup T = \mathbf{N}, \qquad L \cap T = \emptyset.$$

Skupove **neparnih** i **parnih** prirodnih brojeva obično zapisujemo ovako:

$$L = \{n : n = 2k - 1,\ k \in \mathbf{N}\}, \qquad T = \{n : n = 2k,\ k \in \mathbf{N}\}.$$

Primjer 2.

Zadan je skup $A = \{1, 2, 4, 6\}$. Koliko ima brojeva koji su zbroj dvaju različitih članova tog skupa? Jesu li ti zbrojevi elementi skupa A? (Zbroj dvaju pribrojnika u različitom poretku smatramo istim.)

Sve mogućnosti su:

$$1 + 2 = 3, \quad 1 + 4 = 5, \quad 1 + 6 = 7, \quad 2 + 4 = 6, \quad 2 + 6 = 8, \quad 4 + 6 = 10.$$

Tih zbrojeva ima ukupno 6. Svi ti zbrojevi nisu članovi skupa A. To možemo iskazati i ovako: u skupu A nije izvediva radnja ili operacija zbrajanja.

Vrijedi:

$$1 + 2 = 3, \quad 4 + 4 = 8, \quad 5 + 7 = 12, \quad 23 + 41 = 64, \quad 127 + 341 = 468.$$

Ovi primjeri su potvrda općenitije činjenice da je zbroj bilo kojih dvaju prirodnih brojeva prirodan broj. Zato, bez računanja zbroja

$$7258643912 + 85417643359 = c,$$

možemo zaključiti da je c prirodan broj.

Isto vrijedi i za množenje u skupu $\mathbf{N}$. Zapisujemo:

Ako je $a \in \mathbf{N}$, $b \in \mathbf{N}$, tada je $a + b \in \mathbf{N}$ i $ab \in \mathbf{N}$.

Ili simbolima:

$$a, b \in \mathbf{N} \implies ((a + b) \in \mathbf{N},\ ab \in \mathbf{N}).$$

Međutim, ako je $a = 3$, $b = 5$, tada rezultati oduzimanja i dijeljenja tih brojeva $3 - 5$ i $3 : 5$ nisu prirodni brojevi.

U skupu prirodnih brojeva izvedivo je zbrajanje i množenje, a oduzimanje i dijeljenje nije izvedivo. Kažemo da je skup $\mathbf{N}$ **zatvoren** s obzirom na operacije zbrajanja i množenja, ali **nije zatvoren** s obzirom na operacije oduzimanja i dijeljenja.

Vrijedi:

$$3 \cdot 1 = 3, \quad 7 \cdot 1 = 7, \quad 576 \cdot 1 = 576,$$
$$34897 \cdot 1 = 34897, \quad 123456789 \cdot 1 = 123456789,$$

općenito:

$$n \cdot 1 = n, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Kažemo da je broj 1 **neutralni element za množenje**.

Očito u skupu $\mathbf{N}$ ne postoji neutralni element za zbrajanje, jer iz $n + e = n$ slijedi $e = 0$, a 0 nije prirodan broj. Zato skup $\mathbf{N}$ možemo proširiti brojem 0 i dobijemo novi skup $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. U ovom skupu postoji neutralni element za zbrajanje, to jest za svaki $n \in \mathbf{N}_0$ vrijedi $n + 0 = n$.

Za računanje u skupu $\mathbf{N}$ vrijede sljedeća svojstva:

Komutativnost zbrajanja

$$a + b = b + a$$

Komutativnost množenja

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Asocijativnost zbrajanja

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Asocijativnost množenja

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

Distributivnost množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Svojstvo komutativnosti i asocijativnosti vrijedi i za veći broj pribrojnika, odnosno faktora.

Primjer 3. Koristeći svojstva asocijativnosti i komutativnosti, izračunajte bez računala. Rezultat provjerite računalom.

$$S = 173 + 326 + 541 + 174 + 159 + 127.$$

$$\begin{aligned} S &= 173 + 326 + 541 + 174 + 159 + 127 \\ &= (173 + 127) + (326 + 174) + (541 + 159) = 300 + 500 + 700 \\ &= (300 + 700) + 500 = 1000 + 500 = 1500. \end{aligned}$$

Primjer 4. Koristeći svojstva računskih radnja izračunaj vrijednost izraza:

$$A = 75 \cdot 125 \cdot 80 \cdot 400.$$

$$\begin{aligned} A &= 75 \cdot 125 \cdot 80 \cdot 400 = (75 \cdot 400) \cdot (125 \cdot 80) \\ &= (75 \cdot 4 \cdot 100) \cdot (125 \cdot 8 \cdot 10) = [(75 \cdot 4) \cdot 100] \cdot [(125 \cdot 8) \cdot 10] \\ &= (300 \cdot 100) \cdot (1000 \cdot 10) = 30\,000 \cdot 10\,000, \\ A &= 300\,000\,000. \end{aligned}$$

Zbrajanje i oduzimanje radnje su nižega, a množenje i dijeljenje radnje višega reda. To znači da u brojevnom izrazu bez zagrada najprije treba izvršiti radnje višega, a potom nižega reda.

Primjer 5. Izračunaj: $6 + 3 \cdot 4 + 8 + 8 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4$.

$$\begin{aligned} 6 + 3 \cdot 4 + 8 + 8 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 &= 6 + 12 + 8 + 24 + (2 \cdot 3) \cdot 4 \\ &= 18 + 8 + 24 + 6 \cdot 4 = 26 + 24 + 24 \\ &= 50 + 24 = 74. \end{aligned}$$

Primjer 6. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza:
$S = 2 \cdot \{15 + 5 \cdot [2 + 3 \cdot (2 + 2 \cdot 3) + 5 \cdot (2 \cdot 4 + 4)]\} + 8 \cdot (4 + 3 \cdot 7)$.

Najprije treba odrediti vrijednost izraza u malim (običnim) zagradama $(\,)$, zatim u uglatim $[\,]$ i na kraju u vitičastim $\{\,\}$.

$$\begin{aligned} S &= 2 \cdot \{15 + 5 \cdot [2 + 3 \cdot (2 + 6) + 5 \cdot (8 + 4)]\} + 8 \cdot (4 + 21), \\ S &= 2 \cdot \{15 + 5 \cdot [2 + 3 \cdot 8 + 5 \cdot 12]\} + 8 \cdot 25, \\ S &= 2 \cdot \{15 + 5 \cdot [2 + 24 + 60]\} + 200, \\ S &= 2 \cdot \{15 + 5 \cdot 86\} + 200, \\ S &= 2 \cdot \{15 + 430\} + 200, \\ S &= 2 \cdot 445 + 200, \\ S &= 890 + 200, \\ S &= 1090. \end{aligned}$$

Primjer 7. Prirodne brojeve $5, 6, 12, 13, 47$ i 60 napišite kao umnožak najvećeg mogućeg broja faktora koji su svi prirodni brojevi.

$5 = 1 \cdot 5$

Napomena: Umnoške $1 \cdot 5$ i $5 \cdot 1$ smatramo istim. Faktor 1 može se napisati po volji mnogo puta, to jest $5 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 5$. Zato se faktor 1 može pojaviti samo jedanput.

$$6 = 1 \cdot 2 \cdot 3, \quad 12 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3, \quad 13 = 1 \cdot 13,$$
$$47 = 1 \cdot 47, \quad 60 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Svaki prirodni broj veći od 1 može se napisati kao umnožak barem dvaju različitih prirodnih brojeva, to jest $n = 1 \cdot n$. Iz primjera vidimo da je to za neke brojeve jedini mogući način $(5 = 1 \cdot 5,\ 13 = 1 \cdot 13, \ldots)$, a neki se brojevi mogu napisati kao umnožak više od dvaju faktora, pri čemu su barem dva od tih faktora različiti od 1.

Ako za prirodne brojeve a i b postoji prirodan broj k, tako da vrijedi $a = k \cdot b$, kažemo da je broj a djeljiv brojem b.

Ako je broj a djeljiv brojem b, tada je broj b **djelitelj** broja a, a broj a **višekratnik** broja b.

Primjer 8. Odredi sve dvoznamenkaste višekratnike broja 7.

To su brojevi:

$$2 \cdot 7 = 14, \quad 3 \cdot 7 = 21, \quad 4 \cdot 7 = 28, \quad 5 \cdot 7 = 35, \quad 6 \cdot 7 = 42,$$
$$7 \cdot 7 = 49, \quad 8 \cdot 7 = 56, \quad 9 \cdot 7 = 63, \quad 10 \cdot 7 = 70, \quad 11 \cdot 7 = 77,$$
$$12 \cdot 7 = 84, \quad 13 \cdot 7 = 91, \quad 14 \cdot 7 = 98.$$

Višekratnik $1 \cdot 7 = 7$, kao i $15 \cdot 7 = 105$ i daljnji nisu rješenje, jer nisu dvoznamenkasti brojevi.

Svi višekratnici prirodnog broja n su brojevi: $1 \cdot n = n$, $2 \cdot n = 2n$, $3 \cdot n = 3n, \ldots$ Općenito:

Svi višekratnici prirodnog broja n su brojevi oblika $k \cdot n$, gdje je $k \in \mathbf{N}$.

Svaki prirodan broj n različit od 1 ima barem dva djelitelja. To su 1 i n.

Prirodan broj $n \neq 1$ koji osim 1 i samoga sebe nema drugih djelitelja zove se **prost broj** ili **primbroj**.

Euklid

Prosti brojevi su: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$

Veliki grčki matematičar Euklid dokazao je da prostih brojeva ima beskonačno mnogo.

Broj 2 je najmanji prosti broj i jedini je parni prosti broj.

Navedimo sve proste brojeve manje od 500:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499.

Prirodan broj koji nije prost zove se **složen broj**.

Broj 1 ne smatramo ni prostim ni složenim brojem.

Svaki složen broj može se jednoznačno zapisati kao umnožak prostih brojeva. Te brojeve zovemo prostim faktorima toga broja i kažemo da smo taj broj rastavili na proste faktore.

Primjer 9. Brojeve 54, 96 i 2310 rastavite na proste faktore.

Pri rastavljanju prirodnog broja na proste faktore treba postupno utvrđivati, od najmanjeg do najvećeg, proste djelitelje tog broja. Neki se faktori mogu pojavljivati više puta. To izgleda ovako:

$$54 = 2 \cdot 27 = 2 \cdot 3 \cdot 9 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$96 = 2 \cdot 48 = 2 \cdot 2 \cdot 24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3;$$

$$2310 = 2 \cdot 1155 = 2 \cdot 3 \cdot 385 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 77 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

Pri rastavljanju na proste faktore, pogotovo većih brojeva, možemo se služiti i računalom. Na kraju je dobro provjeriti rezultat, množeći dobivene faktore.

Isto je tako dobro znati pravila djeljivosti nekim prostim, kao i nekim složenim brojevima. Navedimo neka od tih pravila.

— Prirodan broj djeljiv je brojem 2 ako mu je znamenka jedinica (to jest, posljednja znamenka u zapisu broja) paran broj. (Broj 0 jest paran broj, što će biti jasnije kada uvedemo cijele brojeve.)

— Prirodan broj djeljiv je brojem 3 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv brojem 3.

— Prirodan broj djeljiv je brojem 4 ako je dvoznamenkasti završetak zapisa toga broja djeljiv brojem 4.

— Prirodan broj djeljiv je brojem 5 ako mu je znamenka jedinica 0 ili 5.

— Prirodan broj djeljiv je brojem 6 ako je djeljiv i brojem 2 i brojem 3.

— Prirodan broj djeljiv je brojem 8 ako je troznamenkasti završetak zapisa toga broja djeljiv brojem 8.

— Prirodan broj djeljiv je brojem 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv brojem 9.

— Prirodan broj djeljiv je desetinskom (dekadskom) jedinicom (to jest, jednim od brojeva 10, 100, 1000, . . .) ako zapis toga broja završava s barem onoliko znamenaka 0 koliko ih ima ta desetinska jedinica.

Postoje pravila za djeljivost i još nekim prirodnim brojevima, kao što su primjerice 7 ili 11, ali su nešto složenija i zato ih ne navodimo.

Navedimo još jedno svojstvo djeljivosti koje se često koristi.

— Ako je prirodan broj djeljiv i brojem a i brojem b, pri čemu je broj 1 jedini djelitelj brojeva a i b, tada je djeljiv i umnoškom ab tih brojeva.

Primjer 10. Dokažite, bez dijeljenja, da je broj 849 312 djeljiv brojem 72.

Zbroj znamenaka zadanoga broja je $8+4+9+3+1+2 = 27 = 3 \cdot 9$, zbog čega je taj broj djeljiv s 9.

Troznamenkasti završetak promatranog broja je $312 = 39 \cdot 8$, zbog čega je broj djeljiv brojem 8.

Broj koji je djeljiv i s 9 i s 8 djeljiv je i brojem $9 \cdot 8 = 72$. To je zato jer je broj 1 jedini zajednički djelitelj brojeva 8 i 9.

Primjer 11. Dokažite da je zbroj bilo kojih pet uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 5.

Ako je n srednji od tih brojeva $(n > 2)$, tada su ti brojevi $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$. Zbroj tih brojeva jednak je:

$$(n-2)+(n-1)+n+(n+1)+(n+2)$$
$$= (n+n+n+n+n)+(-2-1+1+2) = 5n+0 = 5n,$$

što je očito djeljivo brojem 5.

Primjer 12. Dokažite da ne postoje četiri uzastopna prirodna broja čiji je zbroj djeljiv s 4.

Zbroj četiriju uzastopnih prirodnih brojeva jest:

$$S = n + (n+1) + (n+2) + (n+3),$$

gdje je n prirodan broj. Vrijedi:

$$S = (n+n+n+n) + (1+2+3), \quad S = 4n+6,$$
$$S = 4n+4+2, \quad S = 4(n+1)+2.$$

Odavde zaključujemo da S nije djeljiv s 4.

Primjer 13. Dokaži: ako su prirodni brojevi a i b djeljivi prirodnim brojem c, tada je i zbroj $a+b$ djeljiv brojem c.

Brojevi a i b djeljivi su brojem c, zbog čega postoje prirodni brojevi k_1 i k_2, tako da je $a = k_1 \cdot c$, $b = k_2 \cdot c$. Odavde je:

$$a + b = k_1 \cdot c + k_2 \cdot c = (k_1 + k_2) \cdot c = k \cdot c,$$

gdje je $k = k_1 + k_2 \in \mathbf{N}$. Iz $a + b = k \cdot c$, $k \in \mathbf{N}$, zaključujemo da je broj $a+b$ djeljiv s c.

Napomena: Ovo pravilo vrijedi i za više pribrojnika.

Ako je broj c umnožak brojeva a i b, to jest $c = a \cdot b$, tada je c višekratnik i broja a i broja b. Kažemo da je c zajednički višekratnik brojeva a i b.

Na primjer, za $a = 6$, $b = 9$ imamo $c = 6 \cdot 9 = 36$; broj 36 je zajednički višekratnik brojeva 6 i 9. To nije jedini zajednički višekratnik tih brojeva, jer ih ima beskonačno mnogo. Evo nekih od njih: 36, 72, 108, 216 000.

Ako je broj c zajednički višekratnik brojeva a i b, tada je i broj $k \cdot c$, $k \in \mathbf{N}$ zajednički višekratnik brojeva a i b. Zato ne postoji najveći zajednički višekratnik dvaju prirodnih brojeva. Međutim, postoji najmanji zajednički višekratnik tih brojeva. Tako je za spomenute brojeve 6 i 9 najmanji zajednički višekratnik broj 18. To zapisujemo

$$v(6, 9) = 18,$$

ili, ako je jasno o čemu je riječ, samo kraće $v = 18$.

Kako odrediti najmanji zajednički višekratnik dvaju zadanih prirodnih brojeva?

To se radi tako da se svaki od tih brojeva rastavi na proste faktore i napravi se umnožak svih faktora koji se nalaze ili u jednom ili u drugom broju i svaki se faktor uzme onoliko puta koliko se najviše puta pojavljuje u jednom od tih brojeva. Za brojeve 6 i 9 to izgleda ovako: $6 = 2 \cdot 3$, $9 = 3 \cdot 3$. Zato je $v = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

Potpuno istim postupkom određuje se i zajednički višekratnik od tri ili više brojeva.

Primjer 14. Odredite najmanji zajednički višekratnik brojeva: 4200, 882, 1350.

$$\begin{aligned}
4200 &= 2\cdot 2100 = 2\cdot 2\cdot 1050 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 525 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 175\\
&= 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 35 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\\
882 &= 2\cdot 441 = 2\cdot 3\cdot 147 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 49 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 7\\
1350 &= 2\cdot 675 = 2\cdot 3\cdot 225 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 75 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 25 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5
\end{aligned}$$

Svi prosti faktori koji se pojavljuju u tim brojevima jesu: 2, 3, 5 i 7. Faktor 2 pojavljuje se najviše tri puta, faktor 3 također tri puta, a faktori 5 i 7 najviše po dva puta. Zato je najmanji zajednički višekratnik:

$$v(4200, 882, 1350) = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7,$$

ili kratko:

$$v = 264\,600.$$

Primjer 15. Odredite sve zajedničke djelitelje (mjere) brojeva 180 i 168.

Zajednički djelitelj bilo kojih dvaju (ili više) prirodnih brojeva je 1. Ostale djelitelje ili mjere nađemo rastavljanjem na proste faktore. Vrijedi:

$$180 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5, \quad 168 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7.$$

Sada određujemo faktore koji se najviše puta pojavljuju i u jednom i u drugom broju.

Faktor 2 u oba broja pojavljuje se najviše dva puta, faktor 3 jedanput. Faktori 5 i 7 ne pojavljuju se u oba broja. Od faktora 1, 2, 2, 3 možemo složiti sljedeće brojeve: 1, 2, 3, 4, 6, 12. Zaključujemo da je skup svih zajedničkih mjera brojeva 180 i 168: $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

Najveća od tih mjera je 12. To zapisujemo:

$$M(180, 168) = 12.$$

Kako odrediti najveću zajedničku mjeru dvaju ili više prirodnih brojeva bez ispisivanja svih tih mjera?

To se radi tako da se ti brojevi rastave na proste faktore i svaki se faktor uzme onoliko puta koliko se najviše puta pojavljuje **u svim** brojevima. Prema provedenoj analizi za brojeve 180 i 168, to je $M = 2\cdot 2\cdot 3 = 12$.

Primjer 16. Odredite najveću zajedničku mjeru brojeva: 90, 105, 1650, 1365.

$90 = 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5$, $105 = 3\cdot 5\cdot 7$, $1650 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 11$, $1365 = 3\cdot 5\cdot 7\cdot 13$.

Najveća zajednička mjera je $M = 3\cdot 5 = 15$.

Primjer 17. Zadani su brojevi $a = 84$ i $b = 150$. Odredite najmanji zajednički višekratnik (v) i najveću zajedničku mjeru (M) tih brojeva. Provjerite da vrijedi $v \cdot m = a \cdot b$.

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7, \quad 150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5.$$

Odavde je:

$$v = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7, \quad v = 2100; \quad M = 2 \cdot 3, \quad m = 6.$$

Vrijedi:

$$v \cdot M = 2100 \cdot 6 = 12600, \quad a \cdot b = 84 \cdot 150 = 12600.$$

Ovo pravilo vrijedi za bilo koje prirodne brojeve. Provjerite to na još nekoliko primjera.

Primjer 18. Odredite najveću zajedničku mjeru brojeva 140 i 99.

$$140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7, \quad 99 = 3 \cdot 3 \cdot 11.$$

Vidimo da zadani brojevi nemaju zajedničkih faktora većih od 1. Zato je:

$$M(140, 99) = 1.$$

Takvi brojevi zovu se relativno prosti brojevi.

Brojevi kojima je najveća zajednička mjera 1 zovu se **relativno prosti brojevi**.

Očito su svaka dva različita prosta broja i relativno prosta. Obratno ne vrijedi. To pokazuje posljednji primjer gdje nijedan od brojeva 140 i 99 nije prost, a brojevi jesu relativno prosti.

Ako prirodan broj a nije djeljiv prirodnim brojem b, tada postoje prirodni brojevi k i r, $1 \leqslant r < b$, tako da vrijedi $a = k \cdot b + r$.

Na primjer, nijedan od brojeva 45 i 75 nije djeljiv s 4 i možemo ih napisati u obliku: $45 = 11 \cdot 4 + 1$, $75 = 18 \cdot 4 + 3$.

Kažemo da je ostatak pri dijeljenju broja 45 brojem 4 jednak 1, a ostatak pri dijeljenju broja 75 brojem 4 je 3.

U zapisu $a = k \cdot b + r$, broj k je **količnik ili kvocijent** a r se zove **ostatak pri dijeljenju** broja a brojem b.

Primjer 19. Odredite najveći dvoznamenkasti broj koji pri dijeljenju brojem 5 daje ostatak 2.

Iz $a = 5k + 2$ i $9 < a < 100$ (jer je a dvoznamenkasti broj), slijedi:

$$9 < 5k + 2 < 100, \quad 7 < 5k < 98.$$

Treba odrediti najveći prirodni broj k koji zadovoljava ovu jednakost.

Očito je $k = 19$. Zato je:

$$a = 19 \cdot 5 + 2 = 95 + 2, \quad a = 97.$$

Primjer 20. Odredite po volji dva prirodna broja koji pri dijeljenju sa 7 daju isti ostatak 4. Provjerite da je razlika tih brojeva djeljiva sa 7.

Svi mogući brojevi su oblika $7k+4$, gdje je k bilo koji prirodni broj. Na primjer, za $k = 5$ i $k = 19$ imamo brojeve 39 i 137. Razlika tih brojeva je $137-39 = 98$. Budući da je $98 = 14 \cdot 7$, razlika tih brojeva djeljiva je sa 7. Ovo pravilo vrijedi općenito.

Ako prirodni brojevi a i b, $a > b$ pri dijeljenju prirodnim brojem k daju jednak ostatak r, tada je broj $a - b$ djeljiv brojem k.

Mali matematički rječnik

Prirodan broj. Parni i neparni brojevi. Sljedbenik prirodnog broja. Komutativnost. Asocijativnost. Distributivnost. Neutralni element za množenje. Prosti brojevi. Složeni brojevi. Mjera. Višekratnik. Ostatak pri dijeljenju.

Oznake: $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}_0$.

Zadatci 1.2.

1. Izračunaj bez uporabe računala:

a) $10 \cdot 36 + 10 \cdot 37$; **b)** $15 \cdot 31 + 15 \cdot 97 + 15 \cdot 72$;
c) $9 \cdot (534+466) + 10 \cdot (273+727) + 11 \cdot (611+389)$;
d) $(2+3+15)(43+57) + (7+7+6)(31+69) + (17+2+1)(28+72)$.

2. Zbrojeve:

a) $4+5+6$; **b)** $18+21+24$

napiši kao umnožak dvaju prirodnih brojeva, a da prethodno ne izračunaš taj zbroj.

3. Zbrojeve:

a) $9+10+11+12+13$; **b)** $27+31+35+39+43$;
c) $77+82+87+92+97+102+107$

napiši kao umnožak dvaju prirodnih brojeva bez prethodnog računanja tog zbroja.

4. Izračunaj, bez prethodnog računanja naznačenih umnožaka:

a) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7$;
b) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7 \cdot 8$;
c) $1 \cdot 2 \cdot (1+2) + 2 \cdot 3 \cdot (2+3) + 3 \cdot 4 \cdot (3+4) + 4 \cdot 5 \cdot (4+5)$.

5. Izračunaj:

a) $(2+3 \cdot 5) \cdot [(1+2 \cdot 3) + (3 \cdot 4 + 2 \cdot 5)(7 \cdot 3 - 4 \cdot 5 - 1)]$;
b) $[1 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 - (9+2)(7+4)] \cdot [(123456789 + 987654321) \cdot (13579 + 2468)]$;
c) $\{10 - [(2+5) \cdot 3 - (4+6) - 2 \cdot 5]\} \cdot (3 \cdot 5 - 2 \cdot 7)$;
d) $(2+3-4) \cdot (3+4-5) \cdot (4+5-6) \cdot (5+6-7) \cdot (6+7-8)$.

6. Neka je s zbroj od n uzastopnih prirodnih brojeva, gdje je n neparan prirodan broj. Pokaži na nekoliko primjera da je $s = n \cdot x$, gdje je x srednji od tih brojeva.

7. Promatrajmo niz neparnih prirodnih brojeva: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ... Provjeri na nekoliko primjera pravilo: zbroj od n početnih neparnih prirodnih brojeva jednak je n^2. Odredi, bez zbrajanja, zbroj $s = 1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27+29$.

8. Promatrajmo niz parnih prirodnih brojeva: 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

a) Provjeri na nekoliko primjera pravilo: zbroj od n početnih parnih prirodnih brojeva jednak je $n(n+1)$.
b) Odredi, bez zbrajanja $s = 2+4+6+8+10+12+14+16+18+20$.

9. Koristeći svojstvo asocijativnosti, izračunaj zbroj od

a) 10; **b)** 100; **c)** 1000

početnih prirodnih brojeva.

10. Rastavi na proste faktore sljedeće brojeve:

a) 163 800; **b)** 174 420; **c)** 232 560.

11. Na temelju pravila o djeljivosti odredi kojim je od brojeva 2, 3, 5 i 9 djeljiv broj:

a) 10350; **b)** 80280; **c)** 10350; **d)** 12906; **e)** 38925; **f)** 111435.

12. Na temelju pravila o djeljivosti odredi kojim je od brojeva 6, 15, 18, 45 djeljiv broj:

a) 10704; **b)** 69390; **c)** 80685; **d)** 185175; **e)** 46189.

13. Odredi ostatak pri dijeljenju broja 2739 brojem:

a) 2; **b)** 3; **c)** 4; **d)** 5; **e)** 6; **f)** 9; **g)** 10.

14. Broj 2765 napiši u obliku $k \cdot q + r$, gdje je $k, r \in \mathbf{N}$, $0 \leqslant r < k$, ako je $k \in \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$. Odredite pripadni q.

15. Odredi najmanji prirodan broj n, tako da broj $3251 + n$ bude djeljiv brojem:

a) 2; **b)** 3; **c)** 4; **d)** 5; **e)** 6; **f)** 9.

16. Odredi najmanji prirodan broj n, tako da broj $3251 - n$ bude djeljiv brojem:

a) 2; **b)** 3; **c)** 4; **d)** 5; **e)** 6; **f)** 9.

17. Odredi najveću zajedničku mjeru i najmanji zajednički višekratnik brojeva:

a) 140, 80, 105; **b)** 300, 750, 1250; **c)** 50400, 23760, 3900.

18. Broj 210 napiši kao umnožak dvaju uzastopnih prirodnih brojeva.

19. Broj 6840 napiši kao umnožak triju uzastopnih prirodnih brojeva.

20. Bez računanja vrijednosti brojevnog izraza $A = 3 \cdot 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 \cdot 6 + 5 \cdot 6 \cdot 7 + 6 \cdot 7 \cdot 8$, pokaži da je taj izraz višekratnik jednoga dvoznamenkastog prostog broja. Koji je to broj?