1.

Brojevi

Broj je temeljni pojam matematike. Tijekom dosadašnjeg školovanja upoznali smo temeljna svojstva skupa prirodnih brojeva $\mathbf{N}$, cijelih brojeva $\mathbf{Z}$, racionalnih $\mathbf{Q}$, realnih $\mathbf{R}$ i kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$. Svakako najjednostavniji među njima je skup prirodnih brojeva. Na početku ovog poglavlja istaknut ćemo neka dodatna svojstva ovog skupa. Pokazat ćemo zatim kako se krenuvši od skupa $\mathbf{N}$ dobivaju složeniji skupovi brojeva. Detaljnije ćemo obraditi svojstva realnih brojeva, jer se na njima zasniva *matematička analiza*, disciplina koju ćemo proučavati u nastavku, kao i svojstva kompleksnih brojeva, zbog njihove važnosti u primjenama.

1.1. Brojevni sustavi

Prirodne brojeve danas zapisujemo na ovaj način: $1, 2, 3, \ldots$. Zapis broja ne smijemo poistovjetiti sa samim brojem, jer se isti broj može zapisivati na različite načine.

Poznato nam je da su Rimljani u tu svrhu rabili slova svoje latinične abecede. Slova I, V, X, L, C, D, M označavala su redom brojeve 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000. Njihovim kombiniranjem možemo zapisati višeznamenkaste brojeve: MCMXCVI predstavlja broj 1996, dok se 1886 piše MDCCCLXXXVI. Očito je ovakav način zapisivanja pogodan samo za zapis broja, a nikako i za računanje s takvim brojevima (kako pomnožiti XCVI s DCCXLI?). Sličan sustav zapisivanja brojeva koristio se u doba uporabe glagoljice. Praktički je svako slovo glagoljice imalo i svoju numeričku vrijednost.

Pozicijski zapis brojeva

Način na koji mi danas zapisujemo brojeve ima dvije bitne karakteristike. To je **pozicijski zapis**, tj. vrijednost znamenke nije određena samo njezinim iznosom, već i mjestom u zapisu broja na kojemu se ona nalazi. Druga je bitna karakteristika da pritom koristimo *deset* različitih znamenaka: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Što karakterizira pozicijski zapis? Svako mjesto u zapisu broja ima svoju *težinu*, koja se povećava deset puta za svaki pomak znamenke ulijevo: u broju 237 znamenka 7 je znamenka **jedinica** koja vrijedi 7, znamenka 3 je znamenka **desetica** koja vrijedi 30 (trideset) jedinica, a 2 je znamenka **stotica** koja vrijedi 200 (dvije stotine) jedinica.

Za nekog tko slabije prebrojava kažemo da "broji na prste". Međutim, činjenica da čovjek ima *deset* prstiju upravo je i odredila način našeg brojanja: veće brojeve iskazujemo s pomoću potencija broja deset. Tako, primjerice, broj tri stotine dvadeset šest prikazujemo pomoću potencija broja 10 ovako:

$$3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 = 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 6$$

i taj broj zapisujemo kratko kao 326, pazeći na *položaj* svake znamenke u ovom zapisu. Broj 35 206 možemo napisati ovako:

$$35\,206 = 3 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 6 = 3 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 6.$$

Općenito, višeznamenkasti broj N zapisujemo kao $N = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0$. Vrijednost tog broja je

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

Njegove znamenke $a_n, \ldots, a_1, a_0$ cijeli su brojevi iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Za broj kažemo da je zapisan u **dekadskom sustavu** ili **sustavu s bazom 10**.

* * *

Za bazu brojevnog sustava možemo uzeti bilo koji drugi prirodni broj veći od 1.

Zapis broja u sustavu s bazom b

Neka je $b > 1$ prirodan broj. Prirodni broj N zapisan u pozicijskom sustavu s bazom b ima vrijednost:

$$N = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_{0\,(b)} = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot b + a_0.$$

Znamenke $a_0, a_1, \ldots, a_n$ cijeli su brojevi iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$. Indeks označava u kojoj je bazi zapisan broj.

Tako na primjer $152_{(8)}$ predstavlja broj zapisan u sustavu s bazom 8. Koji je to broj u dekadskom sustavu? Računajmo ovako:

$$152_{(8)} = 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 2 = 64 + 40 + 2 = 106_{(10)}$$

Po dogovoru, brojeve u dekadskom sustavu pisat ćemo bez oznake baze: $106_{(10)} = 106$. Evo još nekoliko primjera:

$$\begin{aligned}
3216_{(12)} &= 3 \cdot 12^3 + 2 \cdot 12^2 + 1 \cdot 12 + 6 = 5490,\\
10010011_{(2)} &= 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2 + 1 \qquad = 147,\\
234_{(5)} &= 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 4 \qquad\qquad\;\; = 69.
\end{aligned}$$

* * *

Broj različitih znamenaka, imena brojeva i postupak brojanja ovise o izabranoj bazi. U sustavu s bazom b postoji točno b različitih znamenaka. Njihova imena i zapis ovise o tome koliki je broj b.

Tako se na primjer, niz prirodnih brojeva zapisan ovako:

$$1, 2, 3, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 32, 33, 100, 101, \ldots$$

javlja pri brojanju u sustavu s bazom četiri. Kako se čita broj 100? Najpravilnije bi bilo izgovarati: jedan-nula-nula. Međutim, radi naše navike i ove brojeve čitamo kao brojeve u dekadskom sustavu zapisane na isti način: jedan, dva, tri, deset, jedanaest, dvanaest. . . . Pri tome moramo imati na umu da je njihova vrijednost drukčija od vrijednosti brojeva u dekadskom sustavu koji imaju isti zapis i čitaju se na isti način.

• U **dekadskom** sustavu koristimo standardna imena i zapis znamenaka: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

• U **oktalnom** sustavu (s bazom osam) postoji osam različitih znamenki. Za njihov zapis koristimo prvih osam znamenaka dekadskog sustava: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Brojeve čitamo na isti način kao u dekadskom sustavu.

• U **binarnom** sustavu (s bazom dva) postoje samo dvije različite znamenke: 0 i 1. Ovdje je, zbog malog broja različitih znamenki, prikladnije brojeve čitati znamenku po znamenku. Tako na primjer, broj $13 = 1101_{(2)}$ čitamo jedan-jedan-nula-jedan, što je bolje od tisuću sto i jedan.

• U **heksadekadskom** sustavu (s bazom šesnaest) postoji šesnaest različitih znamenaka. U njihovu zapisu koristimo svih deset znamenaka dekadskog sustava i prvih šest slova latinične abecede: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F. Dekadske vrijednosti nekih heksadekadskih brojeva su:

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_{(16)} &= 10, \quad \mathrm{B}_{(16)} = 11, \quad \mathrm{C}_{(16)} = 12, \\ \mathrm{D}_{(16)} &= 13, \quad \mathrm{E}_{(16)} = 14, \quad \mathrm{F}_{(16)} = 15, \\ 2\mathrm{C}_{(16)} &= 2 \cdot 16 + 12 = 44, \\ \mathrm{E}38_{(16)} &= 14 \cdot 16^2 + 3 \cdot 16 + 8 = 3640. \end{aligned}$$

Brojeve čitamo znamenku po znamenku.

* * *

Veza binarne, oktalne i heksadekadske baze

Razvojem računalstva naročito su značajne postale binarna i heksadekadska baza. Razlog tome je što računalo čitav svoj rad zasniva na tome što se svaki njegov elementarni sklop (*bit*) može nalaziti u jednom od dva stanja: 0 — neaktivnom i 1 — aktivnom. Kombiniranjem bitova možemo zapisati sve prirodne brojeve *u binarnom sustavu*. Svaki je broj u računalu pohranjen u binarnom sustavu. Svako slovo ima svoj brojčani ekvivalent i ponovno je prikazano brojem u binarnom sustavu. Svaka poruka napisana na tipkovnici pretvara se u niz nula i jedinica i pamti u binarnom sustavu.

Zapis je u binarnom sustavu jednostavan, no zahtijeva velik broj znamenaka. Stoga se binarni brojevi uglavnom prevode u heksadekadski sustav. Taj je prijelaz vrlo jednostavan. Naime, jedna znamenka heksadekadskog sustava odgovara točno četirima znamenkama binarnog sustava. To se događa zbog toga što je broj 16 potencija broja 2,

$16 = 2^4$. Prikažimo odnos brojeva u ova dva sustava. Brojevi s lijeve strane jednakosti zapisani su u heksadekadskom, a s desne strane u binarnom sustavu.

$$\begin{array}{llll} 0 = 0 & 4 = 100 & 8 = 1000 & \mathrm{C} = 1100 \\ 1 = 1 & 5 = 101 & 9 = 1001 & \mathrm{D} = 1101 \\ 2 = 10 & 6 = 110 & \mathrm{A} = 1010 & \mathrm{E} = 1110 \\ 3 = 11 & 7 = 111 & \mathrm{B} = 1011 & \mathrm{F} = 1111 \end{array}$$

Sad se, koristeći ovu tablicu, višeznamenkasti broj napisan u heksadekadskom sustavu lako može prevesti u binarni broj i obratno. Svakoj znamenki heksadekadskog sustava odgovaraju četiri znamenke binarnog sustava, i obratno. Pritom nule na početku broja ispuštamo:

$$\begin{aligned} 6\mathrm{C}9_{(16)} &= 110\,1100\,1001_{(2)}, \\ 2\mathrm{EB}3_{(16)} &= 10\,1110\,1011\,0011_{(2)}, \\ 110\,0010\,1110\,1011_{(2)} &= 62\mathrm{EB}_{(16)}, \\ 11\,1111\,1111_{(2)} &= 3\mathrm{FF}_{(16)}. \end{aligned}$$

Zapise oblika 2AA1 32FF vidjet ćemo pretražujući programe napisane u internom jeziku računala. Time je predstavljen osmeroznamenkasti broj u heksadekadskom sustavu, koji odgovara tridesetdvoznamenkastom binarnom broju, što je danas standardni zapis podatka u memoriji 32-bitnog osobnog računala.

* * *

Slična veza postoji i između binarnog i oktalnog sustava. Jedna znamenka oktalnog sustava odgovara točno trima znamenkama binarnog sustava, jer je $2^3 = 8$. Prikažimo odnos brojeva u ova dva sustava. S lijeve strane su brojevi zapisani u oktalnom, a s desne strane u binarnom sustavu.

$$\begin{array}{ll} 0 = 0 & 4 = 100 \\ 1 = 1 & 5 = 101 \\ 2 = 10 & 6 = 110 \\ 3 = 11 & 7 = 111 \end{array}$$

Tako vrijedi

$$\begin{aligned} 16_{(8)} &= 1\,110_{(2)}, \\ 5407_{(8)} &= 101\,100\,000\,111_{(2)}, \\ 10\,010\,111\,001_{(2)} &= 2271_{(8)}, \\ 11\,111\,111\,111_{(2)} &= 3777_{(8)}. \end{aligned}$$

Primjer 1. Broj 2CA2 zapisan u heksadekadskom sustavu prebacimo u oktalni sustav.

▷ Pretvorbu ćemo načiniti pomoću binarnog sustava: broj ćemo najprije prebaciti u binarni sustav, a zatim iz njega u oktalni. Jednoj znamenki heksadekadskog sustava odgovaraju četiri znamenke binarnog sustava, a zatim trima znamenkama binarnog odgovara jedna znamenka oktalnog sustava:

$$2\mathrm{CA}2_{(16)} = 10\,1100\,1010\,0010_{(2)} = 10\,110\,010\,100\,010_{(2)} = 26242_{(8)}. \quad \triangleleft$$

Prijelaz iz dekadskog sustava

Prijelaz iz dekadskog sustava u sustav s bazom b nije tako jednostavan. Razlog tome je što broj 10 nije potencija nijednog prirodnog broja b. Stoga, broj zapisan u dekadskom sustavu ne možemo prevesti u neki drugi sustav[1] na jednostavan način poput gornjih veza binarne i heksadekadske baze, već moramo koristiti druge načine.

Primjer 2. Pretvorimo u sustav s bazom 8 broj 238.

▷ Potencije broja 8 su: $8^1 = 8$, $8^2 = 64$, $8^3 = 512$. Kako je time premašen zadani broj, najveća potencija koja ulazi u prikaz broja bit će $8^2 = 64$. Vrijedi:

$$238 = 3 \cdot 64 + 46 = 3 \cdot 64 + 5 \cdot 8 + 6 = 356_{(8)}. \quad \triangleleft$$

Ovakav je način računanja općenito nepraktičan i dug. Zapišimo dobiveni rezultat kao

$$238 = 3 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8 + 6 = (3 \cdot 8 + 5) \cdot 8 + 6.$$

U ovom se rastavu prepoznaju znamenke 3, 5 i 6 u zapisu broja u oktalnom sustavu. Posljednja znamenka 6 zapravo je ostatak pri dijeljenju broja 238 s 8:

$$238 = 29 \cdot 8 + 6.$$

Druga znamenka zdesna dobiva se kao ostatak pri dijeljenju broja 29 s 8: $29 = 3 \cdot 8 + 5$. Kvocijent daje treću znamenku.

* * *

Napišimo općeniti algoritam. U svakom koraku dijelimo brojem b s ostatkom. Postupak nastavljamo onoliko dugo dok količnik ne postane manji od b:

$$\begin{aligned}
N &= q_1 \cdot b + a_0, & 0 &\leqslant a_0 < b,\\
q_1 &= q_2 \cdot b + a_1, & 0 &\leqslant a_1 < b,\\
q_2 &= q_3 \cdot b + a_2, & 0 &\leqslant a_2 < b,\\
&\vdots\\
q_{n-1} &= q_n \cdot b + a_{n-1}, & 0 &\leqslant a_{n-1} < b,\\
q_n &= 0 \cdot b + a_n, & 0 &\leqslant a_n < b.
\end{aligned}$$

Na koncu postupka je $N = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_{0(b)}$. Naime, uvrštavanjem svih izračunatih vrijednosti dobivamo sljedeći prikaz broja N:

$$\begin{aligned}
N &= q_1 b + a_0\\
&= (q_2 b + a_1) b + a_0 = q_2 b^2 + a_1 b + a_0\\
&= (q_3 b + a_2) b^2 + a_1 b + a_0 = q_3 b^3 + a_2 b^2 + a_1 b + a_0\\
&\ \vdots\\
&= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0\\
&= a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_{0(b)}.
\end{aligned}$$

[1] Osim u sustave s bazom 100 ili 1000 i slične, koji se u praksi ne koriste.

* * *

Čitav postupak zapisujemo u obliku tablice kojoj su u prvom retku zapisani količnik pri dijeljenju s b, a u drugom ostatci:

N	q_1	q_2	$\cdots$	q_{n-1}	q_n
a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-1}	a_n

Ostatak pri dijeljenju zapisujemo direktno ispod broja, a količnik desno od njega. Znamenke broja čitamo zdesna na lijevo (u obratnom poretku).

Primjer 3. Prevedimo u oktalni i heksadekadski sustav broj 243681.

$\triangleright$ Zadani broj dijelimo s brojem 8. Zbog lakšeg računa, pišemo kompletan postupak dijeljenja.

8	243681	30460	3807	475	59	7
	36 48 **1**	64 60 **4**	60 47 **7**	75 **3**	**3**	**7**
	1	4	7	3	3	7

Dakle, $243681 = 733741_{(8)}$.

Za prijelaz u heksadekadsku bazu, dijelimo s brojem 16. Ostatke, ukoliko su veći od 9, pišemo onako kako se zapisuju heksadekadske znamenke:

16	243681	15230	951	59	3
	83 36 48 **1**	83 30 **14**	151 **7**	**11**	**3**
	1	E	7	B	3

Dakle, $243681 = 3B7E1_{(16)}$. $\triangleleft$

Provjerimo algoritam na još jednom primjeru.

Primjer 4. Odredimo binarni prikaz broja 75. Jer je dijeljenje s 2 jednostavno, u drugom retku pišemo samo ostatke.

Po gornjoj shemi imamo (dijelimo s 2):

75	37	18	9	4	2	1
1	1	0	1	0	0	1

Dobili smo $75 = 1001011_{(2)}$. $\triangleleft$

Prijelaz u dekadski sustav

Prijelaz iz sustava s bazom b u dekadski sustav jednostavniji je. Ako je $N = a_n a_{n-1} \cdots a_{0(b)}$, onda moramo izračunati broj

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0.$$

Ovaj se broj može računati na uobičajeni način, potenciranjem i zbrajanjem. Ipak, objasnit ćemo algoritam za njegovo računanje u kojem ćemo koristiti samo množenje i zbrajanje, a ne i operaciju potenciranja. Pogledajmo najprije primjer.

Primjer 5. Prikažimo u dekadskoj bazi broj $3156_{(8)}$.

▷ Računajmo ovako

$$N = 3156_{(8)} = 3 \cdot 8^4 + 8^3 + 5 \cdot 8^2 + 6 = 6 + 8 \cdot (5 + 8 \cdot (1 + 3 \cdot 8)).$$

Računajmo od nutarnjih zagrada prema vani

$$N = 6 + 8 \cdot (5 + 8 \cdot (25)) = 6 + 8 \cdot (205) = 1646.$$

Cijeli postupak ispišimo u obliku tablice

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 1 & 5 & 6 \\ \hline 8 & 3 & 25 & 205 & 1646 \end{array}$$

Svaki se broj u drugom redu dobije tako da se prethodni pomnoži s $b = 8$ i doda mu se broj iz prvog retka iznad njega. Ispišimo cijeli postupak, korak po korak.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 1 & 5 & 6 \\ \hline 8 & & & & \end{array}$$

[U prvom retku napisane su znamenke broja, a u drugom vrijednost baze b .]

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 1 & 5 & 6 \\ \hline 8 & 3 & & & \end{array}$$

[Prepišimo vrijednost prve znamenke.]

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 1 & 5 & 6 \\ \hline 8 & 3 & 25 & & \end{array}$$

[Pomnožimo vrijednost baze $b = 8$ s elementom drugog retka i dodamo sljedeći broj iz prvog retka: $8 \cdot 3 + 1 = 25$.]

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 1 & 5 & 6 \\ \hline 8 & 3 & 25 & 205 & \end{array}$$

[Nastavimo na isti način: $8 \cdot 25 + 5 = 205$.]

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 1 & 5 & 6 \\ \hline 8 & 3 & 25 & 205 & 1646 \end{array}$$

[$8 \cdot 205 + 6 = 1646$. Dobili smo konačnu tablicu, $N = 1646$.] ◁

* * *

Općenito, algoritam možemo napisati ovako:

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \\ \hline b & c_n = a_n & c_{n-1} = c_n b + a_{n-1} & \cdots & c_1 = c_2 b + a_1 & c_0 = c_1 b + a_0 \end{array}$$

Broj c_0 predstavlja traženi rezultat. U to se lako možemo uvjeriti ispisujući taj broj:

$$\begin{aligned} c_0 &= c_1 b + a_0 \\ &= (bc_2 + a_1)b + a_0 = c_2 b^2 + a_1 b + a_0 \\ &\vdots \\ &= c_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 \\ &= (c_n b + a_{n-1}) b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0 = a_n b^n + \ldots + a_1 b + a_0 = N \end{aligned}$$

Ovaj se način računanja naziva **Hornerov**[1] **algoritam**.

[1] William George Horner (1786.–1837.), engleski matematičar

1
1.1

Zadatak 6. Pretvorimo u dekadski sustav broj $\mathrm{A10E9}_{(16)}$.

▷ Račun je napisan u tablici. Prisjetimo se da je $\mathrm{A}_{(16)} = 10$, $\mathrm{E}_{(16)} = 14$.

	A	1	0	E	9
16	10	161	2576	41230	659689

Dakle, $\mathrm{A10E9}_{(16)} = 659689$. ◁

Tablice zbrajanja i množenja

Operacije zbrajanja i množenja možemo izvoditi i u sustavima s drugim bazama. Pravila su identična onima u dekadskom sustavu, jer su i drugi sustavi pozicijski brojevni sustavi. Jedino što moramo svladati je nova tablica množenja i zbrajanja, koja može biti čak i jednostavnija od naše standardne 10×10 tablice.

Da bismo napisali tablicu množenja i zbrajanja u nekom drugom sustavu, moramo odrediti zbroj i umnožak svih jednoznamenkastih brojeva 0, 1, 2..., $b-1$ u tom sustavu. Na primjer, za sustav s bazom 4 tablice glase:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

Pomoću ovakve tablice možemo direktno zbrajati i množiti brojeve u sustavu s bazom 4. Tablice zbrajanja i množenja jednostavnije su od dekadskih, ali račun nije, jer na njega nismo navikli. Trebamo obratiti naročitu pozornost na prijenose znamenki koje u ovom računu zapisujemo umanjenim znamenkama.

$$
\begin{array}{rcccc}
 & & {\scriptstyle 1} & & \\
 & 2 & 0 & 3 & 1 \\
+ & & 1 & 2 & 1 \\
\hline
 & 2 & 2 & 1 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
{\scriptstyle 1\ \ 2} \\
\ 2\,0\,3\,1 \cdot 3 \\
\hline
1\,2\,2\,1\,1
\end{array}
$$

Ovakav račun pokazuje da je naš način razmišljanja vezan za dekadsku bazu i da je bez ponovna učenja novih tablica praktički nemoguće računati u drugim sustavima. To dakako nećemo raditi. Umjesto toga, jednostavnije je brojeve prevesti u dekadski sustav, načiniti operacije u toj bazi i vratiti rezultat u početnu bazu.

* * *

U binarnom sustavu tablice zbrajanja i množenja iznimno su jednostavne:

+	0	1
0	0	1
1	1	10

·	0	1
0	0	0
1	0	1

i možemo ih brzo usvojiti. Stoga binarnim brojevima računamo u binarnom sustavu. Treba samo obratiti pozornost na prijenos pri zbrajanju više brojeva, koji u ovim primjerima nećemo pisati.

$$
\begin{array}{rr}
 & 1\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,1\,0\,1 \\
+ & 1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,1 \\
\hline
 & 1\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\ \ 1\,0\,1\,1 \cdot 1\,1\,0\,1 \\
\hline
\ \ 1\,0\,1\,1 \\
\ \ \ \ 1\,0\,1\,1 \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 1\,0\,1\,1 \\
\hline
1\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1
\end{array}
$$

Zadaci 1.1.

1. Prevedi u dekadski sustav sljedeće brojeve: $221_{(5)}$, $110\,011_{(2)}$, $567_{(8)}$, $21\,000_{(3)}$, $5\,550_{(6)}$.

2. Zapiši u dekadskom sustavu brojeve
1. $1011_{(2)}$, **2.** $100101_{(2)}$, **3.** $1100101_{(2)}$, **4.** $110001011_{(2)}$,
5. $11_{(8)}$, **6.** $24_{(8)}$, **7.** $126_{(8)}$, **8.** $3201_{(8)}$,
9. $8_{(16)}$, **10.** $20_{(16)}$, **11.** $3\mathrm{A}_{(16)}$, **12.** $2\mathrm{EB}1_{(16)}$.

3. Zapiši dekadske brojeve 6, 13, 25, 125 u sustavima s bazom 2, 8 i 16.

4. Zapiši dekadske brojeve 6, 13, 25, 125 u sustavima s bazom 5, 9 i 12.

5. Zapiši dane dekadske brojeve u sustavima s bazama 2, 5 i 12:
11, 33, 100, 222, 1001.

6. Brojeve 1101, 11000110, 11001100101110011 zadane u binarnoj bazi prebaci u oktalni i heksadekadski sustav.

7. Brojeve 58, 1A2, FFFF zadane u heksadekadskom sustavu prebaci u oktalni sustav.

8. Brojeve 223, 517, 12053 zadane u oktalnom sustavu prebaci u heksadekadski sustav.

9. Zapiši brojeve $212_{(3)}$, $30_{(4)}$, $245_{(6)}$, $177_{(8)}$, $28_{(12)}$ u sustavu s bazom 2.

10. Zapiši brojeve $101\,110_{(2)}$, $2102_{(3)}$, $3220_{(4)}$, $11\,011_{(5)}$ u sustavu s bazom 8.

* * *

11. Nastavi svaki od sljedećih nizova uzastopnih prirodnih brojeva:
1. 10, 11, 12, 20, 21,... **2.** 101, 110, 111, 1000, 1001,...
3. 1, 2, 3, 10, 11, 12,... **4.** 23, 24, 25, 30, 31, 32,...

12. Nastavi svaki od sljedećih nizova prirodnih brojeva:
1. 10011, 10010, 10001, 10000,... **2.** 10, 100, 110, 1000, 1010,...
3. 10, 20, 100, 110, 120,... **4.** 11, 13, 20, 22, 24,...

13. U kojem sustavu vrijede jednakosti
1. $101_{(x)} + 1001_{(x)} = 1110_{(x)}$; **2.** $1211_{(x)} - 1120_{(x)} = 21_{(x)}$?

14. Vrijede li u bilo kojem brojevnom sustavu jednakosti
1. $10101 + 1101 = 11202$; **2.** $1211 - 1011 = 200$?

15. Zbroj triju uzastopnih brojeva u sustavu s bazom 5 iznosi 121. Koji su to brojevi?

16. Zbroj triju uzastopnih parnih brojeva u binarnom sustavu iznosi 11 110. Koji su to brojevi?

17. Umnožak triju uzastopnih brojeva u sustavu s bazom 5 iznosi 440. Koji su to brojevi?

18. Umnožak triju uzastopnih brojeva u sustavu s bazom 9 iznosi 1320. Koji su to brojevi?

19. Umnožak dvaju uzastopnih neparnih prirodnih brojeva u binarnom sustavu iznosi 100 011. Koji su to brojevi?

20. **1)** Ako je $\frac{1}{3}$ od 41 jednako 12, koliko je $\frac{1}{4}$ od 103?
2) Ako je $\frac{3}{4}$ od 20 jednako 16, koliko je $\frac{1}{5}$ od 10?

21. Odredi prirodne brojeve x i y iz jednakosti **1)** $23_{(x)} = 41_{(y)}$; **2)** $144_{(x)} = 100_{(y)}$.

22. Odredi brojeve a, b i c iz jednakosti
1. $ab_{(5)} = ba_{(7)}$; **2.** $abc_{(5)} = cba_{(8)}$; **3.** $aba_{(4)} = bab_{(6)}$.

23. **1)** U kojem je sustavu brojeva $101 \cdot 11 = 1111$?
2) U kojem je sustavu brojeva $1\,001 \cdot 111 = 111\,111$? Poopći zaključak!

24. Umnožak $11 \cdot 12 \cdot 13$ jednak je 3102. U kojem je brojevnom sustavu provedeno ovo množenje?

25. U kojem je brojevnom sustavu broj 144 potpuni kvadrat nekog prirodnog broja?

26. U kojem je brojevnom sustavu $125^2 = 16\,324$?

27. Broj 620 kvadrat je broja 24. U kojem je sustavu brojeva proveden račun?

28. Broj $20\,311$ kub je broja 21. U kojem je sustavu brojeva proveden račun?

29. U kojem je brojevnom sustavu broj 1331 potpuni kub nekog prirodnog broja?

* * *

30. Izračunaj, računajući u binarnoj bazi:
1. $1101_{(2)} + 10101_{(2)}$. **2.** $10101_{(2)} + 10111_{(2)}$.
3. $110111_{(2)} + 10101101_{(2)}$. **4.** $1100101_{(2)} + 11001011_{(2)}$;
Brojeve prevedi u dekadski sustav i provjeri rezultat.

31. Izračunaj, računajući u binarnom sustavu:
1. $1111_{(2)} - 1001_{(2)}$; **2.** $11001_{(2)} - 1101_{(2)}$;
3. $110011_{(2)} - 10110_{(2)}$; **4.** $110010111_{(2)} - 1101011_{(2)}$;
Brojeve prevedi u dekadski sustav i provjeri rezultat.

32. Izračunaj, računajući u binarnom sustavu:
1. $110_{(2)} \cdot 11_{(2)}$; **2.** $1101_{(2)} \cdot 101_{(2)}$;
3. $11011_{(2)} \cdot 1001_{(2)}$; **4.** $110111_{(2)} \cdot 101101_{(2)}$.
Brojeve prevedi u dekadski sustav i provjeri rezultat.

33. Napiši tablicu zbrajanja i množenja u sustavu s bazom 3. Uporabom tih tablica izračunaj $1201_{(3)} + 2012_{(3)}$; $1120221_{(3)} \cdot 2_{(3)}$; $20012_{(3)} \cdot 12_{(3)}$.

34. Sastavi tablice zbrajanja i množenja za sustave s bazama 4, 5 i 6.

35. Prevedi sljedeće brojeve zapisane u binarnom sustavu u dekadski sustav:
1. $11.1_{(2)}$; **2.** $101.101_{(2)}$; **3.** $111.111_{(2)}$; **4.** $1000.0001_{(2)}$.

36. Napiši u binarnom sustavu sustavu sljedeće racionalne brojeve:
1. $\frac{1}{2}$; **2.** $\frac{1}{8}$; **3.** $\frac{3}{2}$; **4.** $\frac{1}{2^n}$;
5. 0.25; **6.** 2.5; **7.** 12.125; **8.** 2.0625.

1.2. Matematička indukcija

Dva su osnovna načina logičnog zaključivanja: deduktivni i induktivni.

U deduktivnom pristupu se, krenuvši od općih spoznaja, izvode istinite činjenice u nekom konkretnom slučaju. Na primjer, zaključivanje tipa — svi su ljudi smrtni; Petar je čovjek, znači, Petar je smrtan — primjer je deduktivnog zaključivanja.

Ovakav je način zaključivanja korektan: krenuvši od istinitih pretpostavki (premisa), uvijek dolazimo do istinitog zaključka (konkluzije). Njegov je nedostatak što zaključujući ovako ne možemo doći do novih, dotad nepoznatih općenitih spoznaja.

Leonhard Euler (Basel, 15. travnja 1707. – Peterburg, 18. rujna 1783.), veliki je švicarski matematičar, fizičar i astronom. Utjecao je na razvoj cjelokupne matematike. Matematiku je učio od Johanna Bernoullija. 1726., po osnutku Peterburške akademije znanosti, odlazi živjeti u Rusiju gdje ostaje do kraja života. Uz Cauchyja je matematičar s najviše objavljenih znanstvenih radova. Znameniti su i njegovi udžbenici Introductio in analysin infinitorum, Institutiones calculi differentialis, Institutiones calculi integralis *i* Arithmetica universalis. *Usprkos poodmakloj sljepoći, Euler je većinu radova napisao pri kraju života. Prvi je promatrao funkcije kompleksne varijable i povezao trigonometrijske s eksponencijalnim funkcijama. Uveo je analitičke metode u teoriju brojeva o kojoj je objavio 140 radova. Jedan je od tvoraca suvremene diferencijalne geometrije. Poznata je njegova formula* $V - B + S = 2$, *o odnosu broja vrhova, bridova i stranica u poliedru. Drži se začetnikom i teorije grafova.*

U induktivnom pristupu polazimo od činjenica koje vrijede u nekom konkretnom primjeru i na temelju toga želimo zaključiti o istinama koje vrijede u općenitijoj situaciji. Na primjer: Ivan, Petar i svi ostali učenici u razredu niži su od 2 metra. Znači, svi muškarci niži su od 2 metra.

Ovaj je zaključak očigledno neistinit. Pritom nije važno što je dobivena konkluzija neistinita, nepravilan je *način razmišljanja*. Sljedeće je razmišljanje jednako tako logički nepravilno, bez obzira na to što upućuje na istinitu konkluziju: Ivan, Petar i svi ostali učenici u razredu niži su od 20 metara. Znači, svi muškarci niži su od 20 metara.

Iako može dovesti do pogrešnih rezultata, metoda induktivnog zaključivanja moćno je i ponekad jedino sredstvo u otkrivanju istinitih činjenica.

Primjer 1. Ovaj primjer neispravnog induktivnog zaključivanja dao je Euler. Promotrimo vrijednost izraza $P(n) = n^2 + n + 41$ za nekoliko prvih vrijednosti prirodnog broja n. Dobivamo brojeve 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97,... — svi su oni prosti brojevi. Može li se zaključiti da će $P(n)$ biti prost za svaki prirodni broj n?

Odgovor je: ne! Za $n = 41$ broj očito nije prost, jer je svaki pribrojnik djeljiv s 41. Nije niti za $n = 40$, jer je $P(40) = 41^2$. Ali jest za sve prirodne brojeve manje od 40. $\triangleleft$

Primjer 2. Svaki je paran broj veći od 2, a manji od 100 jednak zbroju dvaju prostih brojeva. Tako na primjer vrijedi: $4 = 2+2$, $6 = 3+3$, $8 = 3+5$, $10 = 3+7 = 5+5$; $12 = 5+7$, $16 = 3+13 = 5+11, \ldots$, $94 = 3+91$, $96 = 3+93$, $98 = 5+93$ (prikaz nije uvijek jednoznačan). Tvrdnja se može provjeriti i za sljedeće parne brojeve.

Na temelju toga možemo iskazati tvrdnju: svaki paran broj veći od 2 jednak je zbroju dvaju prostih brojeva. Ova je tvrdnja poznata pod imenom **Goldbachova**[2] **hipoteza**, po matematičaru koji ju je prvi formulirao još 1742. god. Do danas je provjerena za velik skup početnih prirodnih brojeva i pokazala se istinitom. Međutim, sama tvrdnja još uvijek nije dokazana. $\triangleleft$

* * *

[2] Christian Goldbach (1690.–1764.), njemački matematičar.

Princip matematičke indukcije

Da bi princip induktivnog zaključivanja uvijek dao ispravne rezultate, moramo osigurati neke dodatne uvjete. Na taj ćemo način dobiti način zaključivanja poznat pod imenom **matematička indukcija**.

> **Princip matematičke indukcije**
>
> Ako neka tvrdnja vrijedi za broj 1 i ako iz pretpostavke da vrijedi za prirodni broj n slijedi da ona vrijedi i za sljedeći broj $n+1$, tad ona vrijedi za svaki prirodni broj n.

Primjer 3. Odredimo formulu za zbroj prvih n neparnih brojeva. Za početne zbrojeve vrijedi:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1,\\
1+3 &= 4 = 2^2,\\
1+3+5 &= 9 = 3^2,\\
1+3+5+7 &= 16 = 4^2.
\end{aligned}
$$

Navedeni primjeri navode nas na pomisao da vrijedi

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2. \tag{1}$$

Time smo uporabili *induktivni* način mišljenja. Formula (1) istinita je za prve četiri vrijednosti broja n. Da bismo se uvjerili u njezinu istinitost *za svaki* prirodni broj n, primijenit ćemo princip matematičke indukcije.

Tvrdnja vrijedi za broj $n=1$. Pretpostavimo da je formula (1) istinita za prirodni broj n i dodajmo zbroju s lijeve strane sljedeći član. Iskoristimo pritom pretpostavku indukcije:

$$\underbrace{1+3+5+\ldots+(2n-1)}_{=n^2}+(2n+1)=n^2+(2n+1)=(n+1)^2.$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi i za broj $n+1$. Zato ona vrijedi za svaki prirodni broj. ◁

* * *

Radi jednostavnijeg dokazivanja, pojedine korake u zaključivanju matematičkom indukcijom nazivamo posebnim imenima. Tvrdnju o kojoj je riječ možemo označiti s $T(n)$. Dakle, neka je $T(n)$ tvrdnja koja ovisi samo o prirodnom broju n.

> **Dokaz matematičkom indukcijom**
>
> Dokaz matematičkom indukcijom sprovodi se u tri koraka:
>
> *i*) **Baza indukcije.** Trebamo provjeriti da tvrdnja vrijedi za broj 1, tj. da je $T(1)$ istinita tvrdnja.
>
> *ii*) **Pretpostavka indukcije.** Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n, tj. pretpostavimo da je $T(n)$ istinita tvrdnja.
>
> *iii*) **Korak indukcije.** Dokažimo da uz tu pretpostavku tvrdnja vrijedi i za broj $n+1$, tj. iz $T(n)$ slijedi tvrdnja $T(n+1)$.
>
> Tad je tvrdnja $T(n)$ istinita za svaki prirodni broj n.

Primjer 4. Pokažimo, koristeći matematičku indukciju, istinitost formule

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2}$$

▷ Tvrdnja $T(n)$ koju želimo dokazati glasi: formula (2) vrijedi za svaki prirodni broj n.

Baza indukcije. $T(1)$ vrijedi, jer u zbroju s lijeve strane imamo samo jedan član, a desna strana iznosi 1:

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n: Formula (2) istinita je.

Korak indukcije. Dodajmo lijevoj strani jednakosti sljedeći pribrojnik i iskoristimo pretpostavku indukcije:

$$\underbrace{1 + 2 + \ldots + n}_{\text{iskoristimo } T(n)} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2}$$
$$= \frac{n^2 + 3n + 2}{2} = \frac{(n+1)[(n+1) + 1]}{2}.$$

Dobili smo formulu istovjetnu formuli (2), s $n+1$ umjesto n. To znači da tvrdnja vrijedi za broj $n+1$, dakle $T(n+1)$ istinita je tvrdnja. Prema principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n. ◁

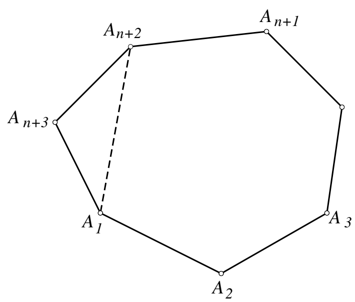
Primjer 5. Dokažimo da je zbroj kutova u svakom mnogokutu s $n+2$ stranice jednak $n \cdot 180°$.

▷ Dokazujemo indukcijom.

Baza indukcije. Za $n = 1$ riječ je o trokutu čiji je zbroj kutova $180°$ — tvrdnja $T(1)$ vrijedi.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja $T(n)$ vrijedi za prirodni broj n: zbroj kutova u mnogokutu s $n+2$ stranice iznosi $n \cdot 180°$.

Korak indukcije. Promotrimo mnogokut s jednom stranicom više, dakle s $n+3$ stranice. Odsijecanjem bilo kojeg trokuta (kao na slici) dobivamo jedan trokut (čiji



Sl. 1.1.

O induktivnom zaključivanju. Promotrimo sljedeću tvrdnju: Broj $991n^2 + 1$ nije potpun kvadrat niti za jedan prirodni broj n. Uvrštavanjem broja n u ovaj izraz uvjerit ćemo se da je tvrdnja istinita za $n = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots 100, \ldots 1000, \ldots$. Mogli bismo neoprezno zaključiti da je ona istinita za svaki n. Zapravo, ova će tvrdnja biti istinita za sve brojeve n manje od $12\,055\,735\,790\,331\,359\,447\,442\,538\,767$. Međutim, za takav n ovaj je izraz kvadrat broja $379\,516\,400\,906\,811\,930\,638\,014\,896\,080$. Interesantno je da se može pokazati kako postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva n takvih da je $991n^2 + 1$ potpun kvadrat.

Indukcija u staroj Grčkoj. O indukciji su razmišljali još i stari Grci. Evo glasovitog *sofizma hrpe*, u slobodnoj interpretaciji. Ustanovite koji je dio principa matematičke indukcije narušen u ovome razmišljanju:

– Čini li jedno zrno hrpu?
– Ne, dakako da ne.
– A dva zrna?
– Isto tako ne.
– Ako nekoliko zrna ne čini hrpu, pa mu dodamo jedno jedino zrno, nije li prirodno da ni tad nećemo dobiti hrpu?
– Svakako da imaš pravo.
– Znači, nijedan broj zrna ne čini hrpu!

je zbroj kutova 180°) i jedan mnogokut s $n+2$ stranice, čiji je zbroj kutova po pretpostavci indukcije jednak $n \cdot 180^\circ$. Zato je zbroj kutova u mnogokutu s $n+3$ stranice jednak $(n+1) \cdot 180^\circ$, što je i trebalo pokazati.

Prema principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n. $\triangleleft$

Primjer 6. Dokažimo da je broj $4^n + 15n - 1$ djeljiv s 9 za svaki prirodni broj n.

$\triangleright$ *Baza indukcije.* Za $n = 1$, broj 18 djeljiv je s 9.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za broj n. Tad se može napisati

$$4^n + 15n - 1 = 9k$$

za neki prirodni broj k.

Korak indukcije. Provjerimo istinitost tvrdnje za broj $n+1$.

$$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4[4^n + 15n - 1] - 45n + 18 = 9(k - 5n + 2).$$

Ovaj je broj djeljiv s 9 i tvrdnja je dokazana. $\triangleleft$

Bernoullijeva nejednakost

Dokažimo matematičkom indukcijom korisnu **Bernoullijevu nejednakost**[1].

Za svaki prirodni broj n i svaki realni broj $h > -1$ vrijedi

$$(1+h)^n \geqslant 1 + nh. \tag{3}$$

Pritom jednakost vrijedi samo za $n = 1$ ili za $h = 0$.

Za $n = 1$ lijeva i desna strana jednake su, pa tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da (3) vrijedi za prirodni broj n. Sad imamo:

$$\begin{aligned}(1+h)^{n+1} &= (1+h)^n(1+h) \geqslant (1+nh)(1+h)\\ &= 1 + nh + h + nh^2 \geqslant 1 + (n+1)h,\end{aligned}$$

i tvrdnja vrijedi i za broj $n+1$. Prema principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki n. (Na kojem je mjestu korištena pretpostavka $h > -1$?)

[1] Jacob Bernoulli (1654.–1705.), švicarski matematičar.

Zadaci 1.2.

1. Dokaži matematičkom indukcijom da za sve $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:
1. $-3+3+9+\ldots+(6n-9)=3n^2-6n$;
2. $-1+3+7+\ldots+(4n-5)=n(2n-3)$;
3. $-3-7-11-\ldots-(4n-1)=-n(2n+1)$;
4. $5+8+11+\ldots+(3n+2)=\frac{1}{2}n(3n+7)$.

2. Dokaži matematičkom indukcijom da za sve $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:
1. $2+7+15+\ldots+\frac{1}{2}n(3n+1)=\frac{1}{2}n(n+1)^2$;
2. $-1+3-5+\ldots+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n\cdot n$.
3. $3+6+12+\ldots+3\cdot 2^{n-1}=3(2^n-1)$;
4. $2+16+56+\ldots+(3n-2)\cdot 2^n=10+(3n-5)\cdot 2^{n+1}$.

3. Dokaži matematičkom indukcijom da za sve $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:
1. $1\cdot 2^n+2\cdot 2^{n-1}+3\cdot 2^{n-2}+\ldots+n\cdot 2+(n+1)=2^{n+2}-(n+3)$;
2. $1^2-2^2+3^2-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n^2=(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$;
3. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3^2}+\dfrac{3}{3^3}+\ldots+\dfrac{n}{3^n}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{2n+3}{4\cdot 3^n}$.

4. Uvrsti nekoliko početnih vrijednosti za broj n i pokušaj odrediti izraz za sljedeće zbrojeve. Dobivenu formulu provjeri matematičkom indukcijom.
1. $1+2+4+8+\ldots+2^{n-1}=?$ **2.** $1+3+9+27+\ldots+3^{n-1}=?$
3. $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{(n-1)n}=?$

5. Dokaži da za $x\neq 1$ (i $x\neq -1$ u trećem primjeru) i za svaki $n\in\mathbf{N}$ vrijedi:
1. $1+x+x^2+\ldots+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$;
2. $x+2x^2+\ldots+nx^n=\dfrac{x-(n+1)x^{n+1}+n\cdot x^{n+2}}{(x-1)^2}$, za sve $n\in\mathbf{N}$;
3. $\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{4}{1+x^4}+\ldots+\dfrac{2^n}{1+x^{2^n}}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$.

6. Dokaži matematičkom indukcijom:
1. $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$;
2. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\dfrac{3^2}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;
3. $\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{36}+\ldots+\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$;
4. $\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)=\dfrac{n+2}{2(n+1)}$;
5. $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\ldots+\dfrac{1}{n^2+3n+2}=\dfrac{n}{2(n+2)}$;
6. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{4}{16}+\ldots+\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$.

7. Dokaži matematičkom indukcijom: $\dfrac{(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}=2^n$.

8. Provjeri matematičkom indukcijom sljedeće formule za zbrojeve potencija $S_k = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$, $k \in \mathbf{N}$.

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}; \qquad S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$S_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2; \qquad S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

9. Koristeći se formulama iz prethodnog zadatka izračunaj sljedeće sume:
1. $2 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + \ldots + 2(3n-1)$.
2. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)$;
3. $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + \ldots + (2n-1)(2n+1)$;
4. $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1)$;
5. $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \ldots + n(n+1)(n+2)$;
6. $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + \ldots + (n+1) \cdot n^2$;

* * *

10. Dokaži matematičkom indukcijom sljedeću formulu za kvadriranje višečlanog izraza: $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2(a_1a_2 + a_1a_3 + \ldots + a_{n-1}a_n)$.

11. Dokaži matematičkom indukcijom da za svaki prirodni broj n vrijedi:
1. $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$;
2. $|a_1 \cdot a_2 \cdots a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdots |a_n|$.

12. Dokaži matematičkom indukcijom:
1. $6 \mid n^3 + 11n$; **2.** $6 \mid 2n^3 + 3n^2 + 7n$;
3. $24 \mid n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$; **4.** $7 \mid n^7 + 6n$;
za sve prirodne brojeve n.

13. Dokaži matematičkom indukcijom da za sve $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:
1. $9 \mid 7^n + 3n - 1$; **2.** $11 \mid 6^{2n} + 3^{n+2} + 3^n$;
3. $17 \mid 6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$; **4.** $17 \mid 2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2}$;
5. $19 \mid 7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$; **6.** $37 \mid 2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$;
7. $64 \mid 3^{2n+1} + 40n - 67$; **8.** $57 \mid 7^{n+2} + 8^{2n+1}$.

14. Dokaži da su za sve prirodne brojeve n ispunjene nejednakosti:
1) $4^n > n^2$; **2)** $2^n > n^2 - 2n + 2$.

15. Dokaži matematičkom indukcijom:
1. $3^n > 2^n + 3n$, za sve $n \geqslant 3$; **2.** $n^3 > 3n + 3$, za sve $n \geqslant 3$;
3. $2^n > n^2$, za sve $n \geqslant 5$; **4.** $2^n > n^3$, za sve $n \geqslant 10$.

16. Dokaži da je broj $7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + \ldots + 7^{4n}$ djeljiv sa 100 za svaki prirodni broj n.

17. Dokaži da za svaki prirodni broj n, $n > 1$, broj $2^{2^n} + 1$ završava znamenkom 7.

* * *

18. Dokaži matematičkom indukcijom: