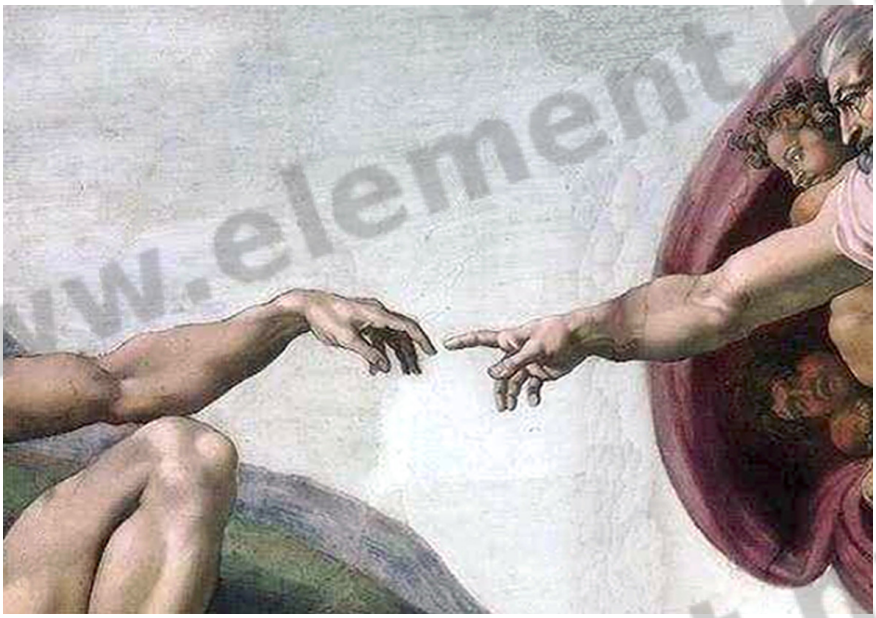
1. PRIRODNI I CIJELI BROJEVI



L. Kronecker: Bog je stvorio cijele brojeve. Sve ostalo ljudsko je djelo.

1.1. Skup prirodnih brojeva

Povijesna je ljudska potreba za prebrojavanjem. Različiti narodi imali su različite oznake i različite riječi koje prate te oznake. Razvojem računanja došlo se do spoznaje da se brojevi mogu prikazivati pomoću ograničenog broja oznaka. Babilonci su se koristili klinastim pismom. Stari Rimljani upotrebljavali su slova kao brojeve (I, V, X, L, C, D i M). Danas su ti brojevi u upotrebi u izuzetnim situacijama. Indijci su upotrebljavali oznake slične današnjima, a te su oznake Arapi u 10. stoljeću prenijeli u Europu.

Danas se služimo arapskim brojevima i dekadskim brojevnim sustavom, tj. pomoću deset znamenaka zapisujemo sve brojeve.

Čovjek je prebrojenim članovima nekog skupa pridružio broj koji je nazvao **prirodnim brojem**. **Skup prirodnih brojeva** (lat. *naturalis* – priroda) označujemo pojačanim slovom $\mathbf{N}$ i prikazujemo ovako:

Skup prirodnih brojeva

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$$

Svaki prirodan broj n, osim jedinice, ima svog prethodnika $n-1$ i vrijedi: $n > n-1$.

Svaki prirodan broj n ima svog sljedbenika $n+1$, te vrijedi: $n < n+1$.

Primjer 1.

Navedimo prethodnika i sljedbenika broja 8.

Prethodnik je broj 7, a sljedbenik broj 9. Za njih vrijedi: $7 < 8 < 9$.

Poredamo li po veličini prirodan broj n i njegove susjede, dobivamo:

$$n-1 < n < n+1.$$

Brojeve 2, 4, 6, 8, 10, 12,... nazivamo **parni** brojevi, dok brojeve 1, 3, 5, 7, 9, 11,... nazivamo **neparni** brojevi. Parni prirodan broj je oblika $2n$, neparni $2n-1$, pri čemu je $n \in \mathbf{N}$.

Zadaci 1.1.

1. Napiši riječima brojeve:
a) 325; **b)** 1 781; **c)** 12 693; **d)** 135 912; **e)** 12 316 610.

2. Napiši znamenkama brojeve iskazane riječima:
a) tristo pedeset dva; **b)** tisuću sedamdeset tri;
c) dvanaest tisuća sto dvadeset sedam; **d)** tri milijuna dvadeset tisuća šesto osam.

3. Napiši sljedbenike brojeva iz 1. zadatka.

4. Napiši prethodnike brojeva iz 1. zadatka.

5. Napiši sljedbenike brojeva n, $n-3$, $n+8$, $n+15$, $2n$, $3n-2$.

6. Napiši prethodnike brojeva iz 5. zadatka.

7. Stari Rimljani su za označavanje brojeva rabili slova:

$\mathrm{I}=1,\quad \mathrm{V}=5,\quad \mathrm{X}=10,\quad \mathrm{L}=50,\quad \mathrm{C}=100,\quad \mathrm{D}=500,\quad \mathrm{M}=1000.$

Napiši zadane brojeve kao rimske:
a) 7; **b)** 18; **c)** 29; **d)** 54; **e)** 109; **f)** 2012.

8. Napiši sve troznamenkaste brojeve upotrebom simbola: 0, 1 i 2, tako da se znamenke razlikuju.

9. Darko je napisao brojeve od 1 do 100. Koliko je puta upotrijebio znamenku:
a) 7; **b)** 4; **c)** 0?

10. Napiši tri parna broja veća od broja $2n$.

11. Zbroj triju uzastopnih neparnih prirodnih brojeva je 21. Koji su to brojevi?

1.2. Računske operacije u skupu N

U skupu prirodnih brojeva upotrebljavaju se četiri osnovne računske operacije: zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje. Operacije zbrajanja i množenja uvijek su izvedive, ali oduzimanje i dijeljenje zahtijevaju određene uvjete.

Zbrajanje u skupu N

Svojstva zbrajanja u skupu N

1. Zbroj dvaju prirodnih brojeva uvijek je prirodan broj
2. Svojstvo komutativnosti
3. Svojstvo asocijativnosti

Brojevi koje zbrajamo zovu se **pribrojnici**, a rezultat zbrajanja zovemo **zbroj** ili suma.

$$\underbrace{7}_{\text{pribrojnici}} + \underbrace{2}_{\text{pribrojnici}} = \underbrace{9}_{\text{zbroj}}$$

Pri zbrajanju prirodnih brojeva nebitan je slijed, tj. pribrojnici smiju zamijeniti svoja mjesta, pri čemu rezultat ostaje isti. Na primjer:

$$7 + 2 = 2 + 7 = 9.$$

Općenito, za svaka dva prirodna broja a i b vrijedi:

$$a + b = b + a.$$

Ovo svojstvo zbrajanja zovemo **svojstvo komutativnosti** (izmjenitosti).

Ako u brojevnom izrazu dolaze zagrade, općenito se prvo računaju operacije u zagradama. Međutim, ako za operaciju vrijedi **svojstvo asocijativnosti** (združivanja), zagrada u zadatku smije promijeniti mjesto. I ovo svojstvo vrijedi za zbrajanje prirodnih brojeva, tj. za svaka tri prirodna broja a, b i c vrijedi:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Zato često u izrazu koji sadržava samo pribrojnike izostavljamo zagrade i pišemo $a + b + c$.

Primjer 1.

Primjenjujući svojstva zbrajanja, izračunajmo što kraćim putem:

a) $27 + 45 + 13 + 55$; **b)** $356 + 237 + 344 + 263$.

---

a) $27 + 45 + 13 + 55 = (27 + 13) + (45 + 55) = 40 + 100 = 140$;

b) $356 + 237 + 344 + 263 = (356 + 344) + (237 + 263) = 700 + 500 = 1200$.

Množenje u skupu N

Svojstva množenja u skupu N

1. Umnožak dvaju prirodnih brojeva prirodan je broj
2. Svojstvo komutativnosti
3. Svojstvo asocijativnosti
4. Postojanje neutralnog elementa
5. Svojstvo distributivnosti

Brojevi koji se množe zovu se **faktori**, a rezultat množenja zovemo **umnožak** ili **produkt**.

$$2 \cdot 7 = 14$$

faktori umnožak

Ako faktori pri množenju zamijene svoja mjesta, umnožak se neće promijeniti. Na primjer:

$$2 \cdot 7 = 7 \cdot 2 = 14.$$

Dakle, za množenje prirodnih brojeva vrijedi **svojstvo komutativnosti**, tj. za svaka dva prirodna broja a i b vrijedi:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Kao i kod zbrajanja i za množenje vrijedi **svojstvo asocijativnosti**, tj. za svaka tri prirodna broja a, b i c vrijedi:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Umnožak prirodnog broja a i broja 1 je broj a. To znači da je broj 1 **neutralan element** za množenje.

Sljedeće svojstvo povezuje operacije zbrajanja i množenja, a zove se **svojstvo distributivnosti** (razdijelnosti) množenja prema zbrajanju:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c,$$

gdje su a, b i c bilo koja tri prirodna broja.

Primjer 2.

Primjenjujući svojstva množenja, izračunajmo što kraćim putem:

a) $2 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 4$; **b)** $4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 50 \cdot 25 \cdot 125$.

---

a) Jedan od načina primjene svojstava množenja je ovaj:
$2 \cdot 25 \cdot 5 \cdot 4 = (2 \cdot 5) \cdot (25 \cdot 4) = 10 \cdot 100 = 1000$;

b) $4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 50 \cdot 25 \cdot 125 = (4 \cdot 25) \cdot (4 \cdot 50) \cdot (8 \cdot 125) = 100 \cdot 200 \cdot 1000 = (100 \cdot 1000) \cdot 200 = 100\,000 \cdot 200 = 20\,000\,000$.

Primjer 3.

Marija je kupila 3 kg slatkih i 4 kg reskih jabuka. Cijena kilograma obiju vrsta jabuka bila je 5 kn. Koliko je Marija platila te jabuke?

Možemo računati na dva načina. U prvom načinu prvo ćemo izračunati koliko je platila za slatke jabuke $(3 \cdot 5)$, zatim koliko je platila za reske $(4 \cdot 5)$, pa ćemo zbrojiti:

$$3 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 15 + 20 = 35 \text{ kn}.$$

U drugom načinu iskoristit ćemo činjenicu da obje vrste jabuka imaju istu cijenu, pa je ukupno bilo $3 + 4 = 7$ kg jabuka i Marija je platila $7 \cdot 5 = 35$ kn.

Oduzimanje u skupu N

U skupu prirodnih brojeva oduzimanje je izvedivo samo ako od većeg broja oduzimamo manji. Broj od kojeg oduzimamo zovemo **umanjenik**, a broj koji oduzimamo zovemo **umanjitelj**. Rezultat oduzimanja zovemo **razlika** ili diferencija.

$$\underset{\text{umanjenik}}{25} - \underset{\text{umanjitelj}}{10} = \underset{\text{razlika}}{15}$$

Rezultat dobiven oduzimanjem možemo provjeriti tako da zbrojimo razliku i umanjitelja. Zbroj mora biti jednak umanjeniku. U ovom primjeru je $10 + 15 = 25$.

Za operaciju oduzimanja ne vrijede svojstva komutativnosti ni asocijativnosti. Ali, svojstvo distributivnosti množenja prema oduzimanju vrijedi:

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c.$$

Dijeljenje u skupu N

Broj koji dijelimo zove se **djeljenik** ili dividend. Broj kojim dijelimo zove se **djelitelj** ili divizor. Rezultat dijeljenja zove se **količnik**, omjer ili kvocijent.

$$\underset{\text{djeljenik}}{18} : \underset{\text{djelitelj}}{2} = \underset{\text{količnik}}{9}$$

Rezultat dijeljenja možemo provjeriti tako da pomnožimo količnik i djelitelj. Rezultat mora biti jednak djeljeniku.

Očito je da dijeljenje nije uvijek izvedivo u skupu $\mathbf{N}$. Ne vrijede ni svojstva komutativnosti ni asocijativnosti.

Ako u računskom zadatku dolazi više operacija dijeljenja za redom, one se računaju slijeva nadesno, redom kako su napisane.

Primjer 4.

Izračunajmo: $64 : 4 : 2$.

$64 : 4 : 2 = 16 : 2 = 8$
ispravno

$64 : 4 : 2 = 64 : 2 = 32$
neispravno

Slijed računskih operacija

Pri izvođenju nekoliko računskih operacija poštujemo sljedeća pravila:

1. Ako u brojevnom izrazu ima zagrada, prvo se izračunava unutarnja ("najdublja") zagrada, a zatim redom ostale.
2. Ako u brojevnom izrazu nema zagrada, prvo se računaju operacije višeg prioriteta: množenje i dijeljenje, tek onda zbrajanje i oduzimanje.
3. Ako nema zagrada, a operacije su istog prioriteta, izvode se slijeva nadesno, osim kad primjena svojstava komutativnosti i asocijativnosti olakšava računanje.

Zadaci 1.2.

1. Izračunaj:

a) $756 + 244$; **b)** $356 + 644$; **c)** $837 + 163$;
d) $945 + 255$; **e)** $1235 + 1765$; **f)** $1891 + 1109$.

2. Izračunaj:

a) $358 + 472 + 35$; **b)** $800 + 256 + 435$; **c)** $1257 + 1000 + 363$;
d) $250 + 494 + 250$; **e)** $9999 + 728 + 1$; **f)** $4568 + 201 + 32$.

3. Izračunaj primjenjujući svojstva zbrajanja:

a) $12 + 35 + 18 + 75$; **b)** $37 + 12 + 43 + 28$;
c) $135 + 225 + 47 + 163$; **d)** $1234 + 278 + 6 + 2$.

4. Izračunaj:

a) $37 \cdot 25$; **b)** $42 \cdot 99$; **c)** $75 \cdot 67$;
d) $29 \cdot 123$; **e)** $458 \cdot 897$; **f)** $4591 \cdot 337$.

5. Izračunaj:

a) $27 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 3$; **b)** $25 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2$;
c) $142 \cdot 7 \cdot 50$; **d)** $3 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 100$.

6. Izračunaj primjenjujući svojstva množenja:

a) $11 \cdot 2 \cdot 5$; **b)** $37 \cdot 15 \cdot 2$; **c)** $4 \cdot 327 \cdot 25$;
d) $25 \cdot 11 \cdot 4 \cdot 3$; **e)** $8 \cdot 7 \cdot 75 \cdot 10$; **f)** $125 \cdot 13 \cdot 4 \cdot 26$.

7. Koristeći se svojstvima zbrajanja i množenja, izračunaj na najbrži mogući način:

a) $173 \cdot 10 + 28 \cdot 10$; **b)** $72 \cdot 15 + 72 \cdot 19$;
c) $451 \cdot 23 + 451 \cdot 57$; **d)** $99 \cdot 27 + 121 \cdot 27$;
e) $3 \cdot 17 + 14 \cdot 17 + 15 \cdot 17$; **f)** $34 \cdot 21 + 20 \cdot 21 + 21 \cdot 86$.

8. Ante je radio 3 dana po 8 sati na dan, Jurica 4 dana po 7 sati dnevno, dok je Miro radio 5 dana po 10 sati dnevno. Ako je cijena jednog radnog sata 14 kuna, koliko su ukupno kuna zaradili?

9. U zgradi postoje tri jednosobna stana površine $45\,m^2$, pet dvosobnih stanova od $54\,m^2$, te dva trosobna stana površine $76\,m^2$. Ako je mjesečna cijena grijanja $1\,m^2$ stana 8 kuna, koliki je mjesečni račun za grijanje cijele zgrade?

10. Prosječna mjesečna potrošnja vode po osobi je 4 litre. Ako u zgradi živi 10 dvočlanih obitelji, 12 tročlanih, 7 četveročlanih i jedna šesteročlana obitelj, kolika je prosječna mjesečna potrošnja vode u toj zgradi?

11. Automobil troši 8 litara benzina na 100 km. Izračunaj koliko je litara benzina potrebno za put od 1200 km. Koliko je kilometara moguće prijeći s 48 litara benzina?

12. Bazen se puni trima cijevima. Kroz jednu cijev protječe $143\,m^3$ vode u jednom satu, kroz drugu $83\,m^3$ vode u satu, a kroz treću $121\,m^3$ vode u satu. Koliko je m^3 vode u bazenu nakon 7 sati punjenja? Koliko je m^3 vode u bazenu nakon 10 sati punjenja ako kroz prve dvije cijevi voda utječe u bazen, a trećom istječe?

13. Izračunaj:

a) $729 - 12$; **b)** $458 - 34$; **c)** $1228 - 729$;
d) $991 - 199$; **e)** $357 - 142$; **f)** $2873 - 1999$.

14. Izračunaj na najbrži način:

a) $123 \cdot 10 - 75 \cdot 10$; **b)** $291 \cdot 15 - 105 \cdot 15$;
c) $457 \cdot 11 - 327 \cdot 11$; **d)** $221 \cdot 29 - 29 \cdot 101$;
e) $257 \cdot 27 - 133 \cdot 27 + 27 \cdot 42$; **f)** $394 \cdot 123 + 451 \cdot 123 - 700 \cdot 123$.

15. Izračunaj:

a) $6 + 9 \cdot 12 + 5$; **b)** $(6 + 9) \cdot 12 + 5$; **c)** $6 + 9 \cdot (12 + 5)$;
d) $(6 + 9) \cdot (12 + 5)$; **e)** $4 \cdot 7 + 8 \cdot 11$; **f)** $4 \cdot (7 + 8) \cdot 11$.

16. Izračunaj:

a) $5 + 3 \cdot 5$; **b)** $3 \cdot 7 - 5 \cdot 2$; **c)** $(3 + 7) \cdot 5 - 2$;
d) $5 - 3 \cdot (5 - 3)$; **e)** $(7 - 2) \cdot (7 - 3)$; **f)** $17 - 2 \cdot 7 + 3$;
g) $10 + 9 \cdot 2 + 7$; **h)** $(10 + 9) \cdot (2 + 7)$; **i)** $10 + 9 \cdot (2 + 7)$.

17. Izračunaj:

a) $(4+5)\cdot 8+12\cdot(15+11)$; **b)** $4+5\cdot 8+12\cdot 15+11$;
c) $4+(5\cdot 8+12)\cdot 15+11$; **d)** $4+5\cdot(8+12\cdot 15)+11$;
e) $(9+17)\cdot 21+35\cdot(63+79)$; **f)** $9+17\cdot 21+35\cdot 63+79$;
g) $9+(17\cdot 21+35)\cdot 63+79$; **h)** $9+17\cdot(21+35\cdot 63)+79$.

18. Izračunaj:

a) $(163-142)\cdot 5+3\cdot(19-11)$; **b)** $163-14\cdot 5+3\cdot 19-11$;
c) $400-100\cdot 3+5\cdot(125-3\cdot 32)$; **d)** $35-5\cdot 4-4\cdot(18-17)$;
e) $(299+135)\cdot 7+29\cdot(423-399)$; **f)** $299-13\cdot 7+29\cdot 423-399$;
g) $(299-13\cdot 7+29)\cdot 423-399$; **h)** $387-15\cdot(35-27)+15-15\cdot 14$.

19. Izračunaj:

a) $20\cdot(14+5\cdot(20+17))$; **b)** $(12+(4\cdot 5+3)\cdot 8)\cdot 15$;
c) $((17+8\cdot 3)+3)\cdot 14\cdot 10$; **d)** $7\cdot((3+12)+17)+3\cdot 11$.

20. Izračunaj:

a) $457-2\cdot 38-3\cdot(27-8)$; **b)** $(945-45\cdot 7)-(123-6\cdot 12)$;
c) $(359-31)\cdot 2-359-31$; **d)** $(1243-243\cdot 2)+18\cdot(20-2)$.

21. Izračunaj:

a) $13\cdot 7+15\cdot 7$; **b)** $23\cdot 9+23\cdot 11+23\cdot 14$;
c) $151\cdot 19+19\cdot 140-19\cdot 23$; **d)** $230\cdot 12-140\cdot 12+28\cdot 12$.

22. Izračunaj:

a) $8888:8$; **b)** $123\,400:10$; **c)** $2456:2$;
d) $728:4$; **e)** $56\,781:9$; **f)** $2500:100$.

23. Izračunaj:

a) $414:18$; **b)** $1645:47$; **c)** $1845:15$;
d) $28\,416:111$; **e)** $20\,868:564$; **f)** $14\,916:12$.

24. Izračunaj:

a) $945:5-5$; **b)** $945:1+5$;
c) $320:2+8$; **d)** $320:(2+8)$.

25. Izračunaj:

a) $(189:3-27):6$; **b)** $(225:9+15):10$;
c) $(324:(36:2)):(3\cdot 3)$; **d)** $1000-(10\,000:100)\cdot 9$;
e) $(392:7-12):4+6$; **f)** $298-(1440:12-10):11$;
g) $1024:256+128\cdot 2:32$; **h)** $1+999:3-2\cdot 49:7$.

26. 4096 litara soka treba razdijeliti u dvolitrene boce. Koliko je boca potrebno?

27. U paketu čija je vrijednost 320 kn nalazi se 64 komada čokolade. Kolika je vrijednost jedne čokolade?

28. Kamionom je iz Mađarske u Hrvatsku prevezeno 12 istovrsnih paleta građevinskog materijala. Ukupna carina iznosila je 5808 kn. Koliko iznosi carina za jednu paletu?

1.3. Djeljivost u skupu N

Da bismo proučili djeljivost u skupu **N**, potrebni su nam pojmovi: višekratnik i djelitelj prirodnog broja.

Višekratnik prirodnog broja a umnožak je broja a i nekog prirodnog broja k.

Dakle, brojevi $k \cdot a$ višekratnici su broja a.

Budući da je $1 \cdot a = a$, slijedi da je svaki broj višekratnik samome sebi.

Primjer 1.

Zaokružimo višekratnike broja 7 u sljedećem nizu:

$$7, 15, 17, 21, 28, 32, 35.$$

7, 15, 17, 21, 28, 32, 35.

Primjer 2.

Napišimo prvih pet višekratnika brojeva 8 i 11.

Prvih pet višekratnika broja 8 su 8, 16, 24, 32, 40. Prvih pet višekratnika broja 11 su 11, 22, 33, 44, 55.

Kažemo da je broj b **djelitelj** broja a ako je broj a višekratnik broja b, tj. ako vrijedi:

$$a = k \cdot b,$$

za neki prirodni broj k. Ako je $k = 2$, dobivamo dvokratnik broja b, dok ako je $k = 3$, dobivamo trokratnik broja b i tako redom.

Kažemo da je a **djeljiv** brojem b ili da b dijeli a.

Primjer 3.

Napišimo sve djelitelje broja 18.

Djelitelji broja 18 su: 1, 2, 3, 6, 9 i 18.

Uočimo: Svaki je broj djelitelj samome sebi. Broj 1 je djelitelj svakoga prirodnog broja.

Postoji nekoliko pravila za djeljivost u skupu **N**. Najčešće se upotrebljavaju sljedeća pravila:

- Broj je djeljiv brojem 2 ako i samo ako mu je znamenka jedinica jedan od brojeva 0, 2, 4, 6 ili 8.
- Prirodni je broj djeljiv brojem 3 ako i samo ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3.
- Broj je djeljiv brojem 5 ako i samo ako mu je znamenka jedinica 0 ili 5.

Primjer 4.

Odredimo koji su od zadanih brojeva djeljivi brojem 2, zatim brojem 3, zatim brojem 5. Označimo zvjezdicom odgovarajuće polje u tablici.

Broj	180	816	615	32 861	194 862
djeljiv brojem 2					
djeljiv brojem 3					
djeljiv brojem 5					

Broj	180	816	615	32 861	194 862
djeljiv brojem 2	*	*			*
djeljiv brojem 3	*	*	*		*
djeljiv brojem 5	*		*		

Postoji još nekoliko pravila djeljivosti, a neka od njih svode se na već spomenuta pravila. Na primjer, prirodan broj djeljiv je brojem 10 ako je djeljiv brojem 2 i brojem 5.

S obzirom na broj djelitelja u skupu **N**, razlikujemo broj 1, proste brojeve (prim brojeve) i složene brojeve.

Brojeve koji imaju točno dva različita djelitelja nazivamo **prosti** ili prim brojevi.

Dakle, prosti brojevi su djeljivi samo brojem 1 i samim sobom. Prvih nekoliko takvih brojeva su 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,. . . .

Brojevi koji imaju više od dva djelitelja nazivaju se **složeni** brojevi. Tako su, na primjer, brojevi 12 i 27 složeni brojevi.

Broj 1 ima samo jednog djelitelja, pa 1 nije ni prost niti složen broj.

Starogrčki matematičar Eratosten (276.–169. god. pr. Kr.) pronašao je način određivanja prostih brojeva. Postupak je danas poznat kao “Eratostenovo sito”.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~