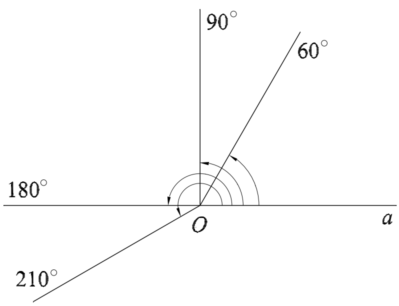
1.

Trigonometrijske funkcije realnog broja

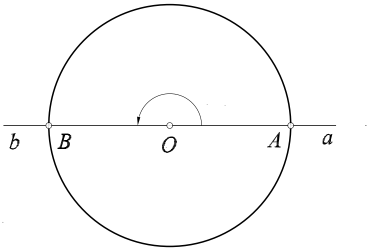
1.1. Brojevna kružnica

U drugom razredu, a i ranije, govorili smo o kutovima čija mjera je bila dana u stupnjevima. Tako je, na primjer, pravi kut imao 90°, ispruženi kut 180°, puni kut 360°.



Sl. 1.1.

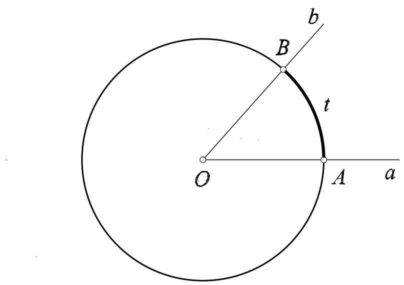
Uvedimo sada jedan drugi način mjerenja kutova. Promotrimo ispruženi kut $\sphericalangle aOb$. Oko vrha O opišimo kružnicu k jediničnog polumjera. Ona siječe polupravac a u točki A, a polupravac b u točki B.



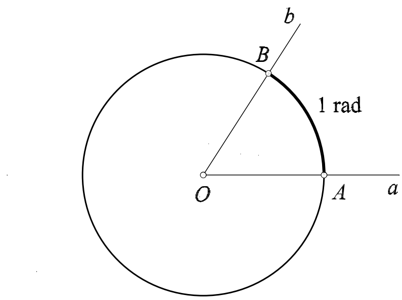
Sl. 1.2.

U prvom razredu naučili smo da je opseg kruga $O = 2r\pi$, pa konkretno u ovom slučaju, opseg kruga je 2π jer je $r = 1$. No tada je duljina luka $\widehat{AB}$ jednaka polovici opsega tj. jednaka je π (≈ 3.14). Kažemo da ispruženi kut ima π radijana. Drugim riječima, povezali smo kut s duljinom luka jedinične kružnice.

Naravno da ovaj postupak možemo provesti za bilo koji kut $\sphericalangle aOb$. Oko vrha O kuta $\sphericalangle aOb$ opišemo jediničnu kružnicu koja krak a siječe u točki A, a krak b u točki B. Sad kutu pridružujemo duljinu luka od točke A do točke B. Ta duljina luka naziva se **radijanska mjera** kuta.



Sl. 1.3.



Sl. 1.4.

Da bismo stekli neki osjećaj za radijansku mjeru spomenimo da kut od 1 radijana ima približno $57^\circ 17' 44''$. Dakle, duljina luka jedinične kružnice koji pripada kutu od $57^\circ 17' 74''$ jednak je njenom polumjeru, tj. 1.

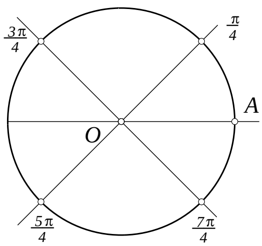
U sljedećoj tablici navedene su mjere nekih kutova u stupnjevima i u radijanima:

mjera u stupnjevima	0°	30°	45°	60°	75°	80°	90°	270°
mjera u radijanima	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$

Primjer 1. Nacrtajmo kutove α, ako je α jednako:

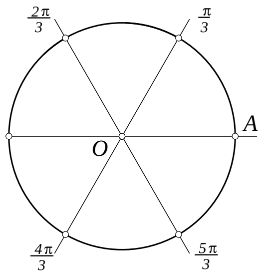
a) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$; **b)** $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$; **c)** $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$.

▷ a)



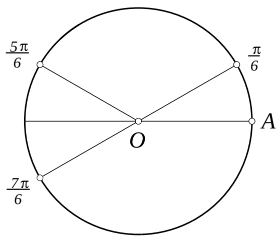
Sl. 1.5. Četvrtina polukružnice ima duljinu $\dfrac{\pi}{4}$.

b)



Sl. 1.6. Trećina polukružnice ima duljinu $\dfrac{\pi}{3}$.

c)



Sl. 1.7. Krak kuta od $\dfrac{\pi}{6}$ *radijana prolazi točkom na kružnici koja s* A *čini luk duljine* $\dfrac{\pi}{6}$.

◁

Primjer 2. Napišimo $35^\circ 2' 14''$ u radijanima.

▷ Prvo je potrebno dani broj pretvoriti u stupnjeve:

$$\alpha^\circ = 35^\circ 2' 14'' = 35 + \frac{2}{60} + \frac{14}{3600} = 35.037222^\circ,$$

a zatim iz razmjera $\pi : 180^\circ = \alpha_r : \alpha^\circ$ slijedi

$$\alpha_r = \frac{\alpha^\circ \pi}{180} = 0.611515 \,\text{rad}.$$

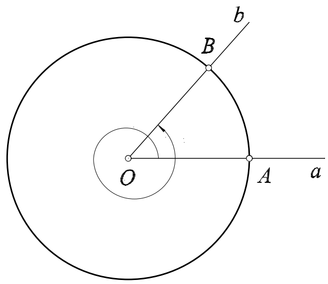
Ova pretvorba iz oblika "stupnjevi-minute-sekunde" u stupnjeve, te u radijane može se vršiti pomoću džepnog računala. Naime, računalo postavimo u stanje $\boxed{\text{DEG}}$ te unesemo podatak u obliku 35.0214. Pritiskom na tipku $\boxed{\to \text{DEG}}$ dobivamo 35.037222, a zatim izračunamo α_r. Neka računala automatski prelaskom u stanje $\boxed{\text{RAD}}$ taj broj pretvaraju u radijane. ◁

Primjer 3. Kut od 2.5 rad izrazi u stupnjevima.

$\triangleright$ $\pi : 180^\circ = \alpha_r : \alpha^\circ$, $\pi : 180^\circ = 2.5 : \alpha^\circ$, $\alpha^\circ = \dfrac{180^\circ \cdot 2.5}{\pi}$, $\alpha \approx 143.239448^\circ$, $\alpha \approx 143^\circ 14' 22''$.

U ovom računu upotrijebili smo kalkulator da bismo došli do veličine $\alpha \approx 143.239448^\circ$. Većina kalkulatora ima već ugrađenu tipku za prebacivanje u oblik D$^\circ$ M$'$ S$''$, tj. stupnjevi-minute-sekunde. Ukoliko ta funkcija nije ugrađena, postupak je sljedeći: od 143.239448 oduzmemo 143 i pomnožimo sa 60. Dobivamo rezultat 14.36688. To su minute. Želimo li dobiti još i sekunde, od tog broja oduzmemo cijeli dio i ostatak pomnožimo sa 60. Dobijamo $22.0128''$. Dakle, $\alpha \approx 143^\circ 14' 22''$.

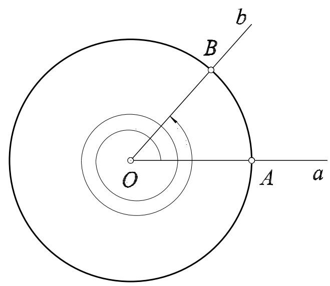
U većini ovakvih računa gdje se pojavljuje broj π dobivamo približne vrijednosti, jer je π iracionalan broj pa ga prikazujemo s manje ili više točnim aproksimacijama. $\triangleleft$



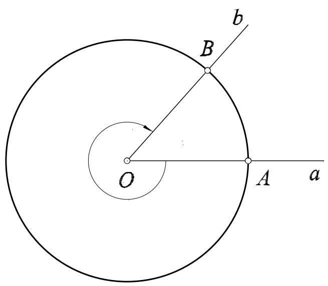
Sl. 1.8. Mjera kuta $\sphericalangle aOb$ je $\alpha + 2\pi$.

Promotrimo kako dolazimo do kutova mjere veće od 360°, odnosno 2π radijana. Kut $\sphericalangle aOb$ je, dakle, uređeni par polupravaca a i b s istim početkom O. Zamislimo da je početni krak a nepomičan, a da smo do položaja polupravca b došli vrtnjom oko O u pozitivnom smjeru, tj. u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu, te neka je α mjera kuta $\sphericalangle aOb$. Nastavi li polupravac b rotirati još jedan cijeli krug, došao bi u svoj početni položaj. Mjera tako dobivenog kuta je $\alpha + 360^\circ$, odnosno $\alpha + 2\pi$ ako je izražena u radijanima.

Sad lako možemo zamisliti kako tvorimo kutove od $\alpha+2\cdot 2\pi$, $\alpha+3\cdot 2\pi$, itd. Naime, nastavi li polupravac b rotirati dva kruga od svog početnog položaja dobivamo kut mjere $\alpha + 2\cdot 2\pi$, za tri kruga $\alpha + 3 \cdot 2\pi$, itd.



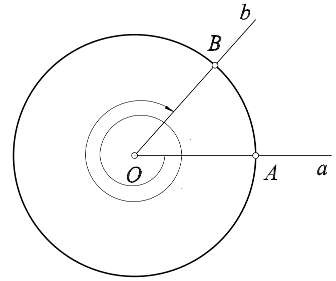
Sl. 1.9. Mjera kuta $\sphericalangle aOb$ je $\alpha + 2 \cdot 2\pi$.



Sl. 1.10. Kut $\sphericalangle aOb$ je kut s negativnom mjerom.

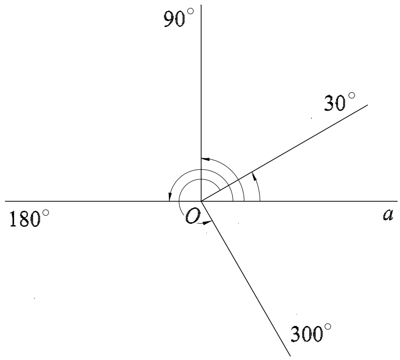
Do položaja polupravca b možemo doći i vrtnjom oko O u negativnom smjeru, tj. u smjeru kretanja kazaljke na satu. Tad govorimo o kutu s negativnom mjerom. Ta mjera iznosi $\alpha - 2\pi$, gdje je α mjera iz intervala $[0, \pi\rangle$.

Nastavi li se polupravac b vrtiti u negativnom smjeru još jedan krug, dolazi u svoj početni položaj, a mjera tog kuta iznosi $\alpha - 2 \cdot 2\pi$.

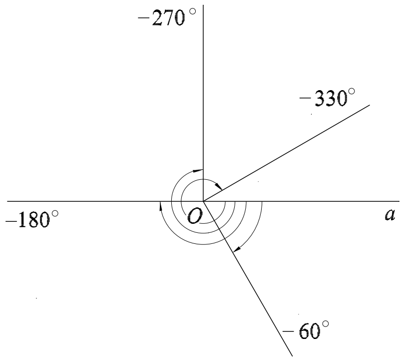


Sl. 1.11. Mjera kuta $\sphericalangle aOb$ *je* $\alpha - 2\pi$.

Na slikama su nacrtani kutovi kojima su na lijevoj slici dane pozitivne mjere, a na desnoj slici negativne mjere.



Sl. 1.12.



Sl. 1.13.

Uglavnom, svi kutovi mjera α, $\alpha+2\pi$, $\alpha+4\pi$, $\alpha+6\pi$, $\alpha-2\pi$, $\alpha-4\pi$,... imaju završni položaj kraka b isti, tj. u istoj točki B sijeku kružnicu k. Kažemo da brojevima $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ pridružujemo točku B. Štoviše, svakom realnom broju x možemo pridružiti na jediničnoj kružnici odgovarajuću točku B, jer je svaki broj x radijanska mjera nekog kuta. Brojevi kojima je pridružena ista točka B na kružnici međusobno se razlikuju za $2k\pi$, tj. $360°k$.

Kružnica s ovakvim pridruživanjem naziva se **brojevna kružnica**.

Mjera kuta iz intervala $[0, 2\pi\rangle$, odnosno $[0, 360°\rangle$ naziva se **glavna mjera**.

Primjer 4. Kutovima od

a) 328π; **b)** $\dfrac{431}{3}\pi$; **c)** $1081°$; **d)** $-213°$

nađimo glavne mjere u radijanima.

▷ a) Kako je $328\pi = 0+2\cdot164\pi$, to je glavna mjera tog kuta jednaka 0 radijana.

b) Iz $\dfrac{431}{3}\pi = \dfrac{71\cdot6+5}{3}\pi = \dfrac{5}{3}\pi + 71\cdot2\pi$ slijedi da je glavna mjera jednaka $\dfrac{5}{3}\pi$ radijana.

c) $1081° = 3\cdot360° + 1°$, pa je glavna mjera jednaka $1°$.

d) $-213° = -360° + 147°$, te je glavna mjera jednaka $147°$. ◁

Zadaci 1.1

1. Nacrtaj na brojevnoj kružnici kutove od:
a) 60°, 120°, 180°, 240°, 300°; **b)** 30°, 150°, 210°, 330°;
c) 45°, 135°, 225°, 315°; **d)** 90°, 180°, 270°, 360°.

2. Nacrtaj kutove od:
a) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$; **b)** $0, \pi, 2\pi$;
c) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$; **d)** $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$;
e) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$.

3. Pretvori u stupnjeve:
a) $\frac{\pi}{2}$; **b)** $\frac{3\pi}{2}$; **c)** $\frac{\pi}{4}$; **d)** $\frac{3\pi}{4}$;
e) $\frac{5\pi}{4}$; **f)** $\frac{\pi}{6}$; **g)** $\frac{\pi}{3}$; **h)** $\frac{2\pi}{3}$;
i) $\frac{\pi}{8}$; **j)** $\frac{3\pi}{8}$; **k)** $\frac{\pi}{12}$; **l)** $\frac{7\pi}{12}$.

4. Pretvori u stupnjeve, minute i sekunde:
a) 1.5 rad; **b)** 3 rad; **c)** 2.7 rad;
d) 0.5 rad; **e)** 1.2 rad; **f)** 1.32 rad.

5. Pretvori u radijane i skiciraj na kružnici:
a) 60°; **b)** 90°; **c)** 180°; **d)** 210°;
e) 225°; **f)** 135°; **g)** 270°; **h)** 330°.

6. Pretvori u radijane:
a) 40°; **b)** 100°; **c)** 55°; **d)** 27°;
e) $35^\circ 21'$; **f)** $75^\circ 34'$; **g)** $211^\circ 25'$; **h)** $321^\circ 59'$;
i) $10^\circ 21' 43''$; **j)** $31^\circ 2' 59''$; **k)** $121^\circ 1''$; **l)** $3401^\circ 3' 20''$.

7. Nađi glavnu mjeru kutova i nacrtaj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:
a) 720°; **b)** 540°; **c)** 1080°; **d)** 3600°;
e) 450°; **f)** 1530°; **g)** 1710°; **h)** 5670°.

8. Nađi glavnu mjeru kutova i nacrtaj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:
a) 390°; **b)** 510°; **c)** 4110°; **d)** 1290°;
e) -150°; **f)** -30°; **g)** -2130°; **h)** -2550°.

9. Nađi glavnu mjeru kutova i nacrtaj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:
a) 420°; **b)** 3720°; **c)** 1320°; **d)** 2100°;
e) -2460°; **f)** -60°; **g)** -240°; **h)** -840°.

10. Nađi glavnu mjeru kutova i nacrtaj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:
a) 405°; **b)** 3645°; **c)** 1215°; **d)** 2025°;
e) -45°; **f)** -225°; **g)** -2115°; **h)** -1935°.

11. Nađi glavnu mjeru kutova i skiciraj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:
a) 754°; **b)** 395°; **c)** 1234°; **d)** $82\,175^\circ$;
e) -49°; **f)** -351°; **g)** -1000°; **h)** -2147°.

12. Nađi glavnu mjeru kutova i skiciraj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:
a) 3π; **b)** 15π; **c)** -7π; **d)** 191π;
e) 2π; **f)** -4π; **g)** 2002π; **h)** -1998π.

13. Nađi glavnu mjeru kutova i skiciraj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:
a) $\frac{25\pi}{6}$; **b)** $\frac{53\pi}{6}$; **c)** $\frac{103\pi}{6}$; **d)** $\frac{203\pi}{6}$;
e) $-\frac{\pi}{6}$; **f)** $-\frac{17\pi}{6}$; **g)** $-\frac{91\pi}{6}$; **h)** $-\frac{191\pi}{6}$.

14. Nađi glavnu mjeru kutova i skiciraj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:
a) $\frac{97\pi}{3}$; **b)** $\frac{194\pi}{3}$; **c)** $\frac{388\pi}{3}$; **d)** $\frac{605\pi}{3}$;
e) $-\frac{47\pi}{3}$; **f)** $-\frac{190\pi}{3}$; **g)** $-\frac{140\pi}{3}$; **h)** $-\frac{61\pi}{3}$.

15. Nađi glavnu mjeru kutova i skiciraj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:
a) $\frac{81\pi}{4}$; **b)** $\frac{123\pi}{4}$; **c)** $\frac{221\pi}{4}$; **d)** $\frac{287\pi}{4}$;
e) $-\frac{\pi}{4}$; **f)** $-\frac{91\pi}{4}$; **g)** $-\frac{157\pi}{4}$; **h)** $-\frac{797\pi}{4}$.

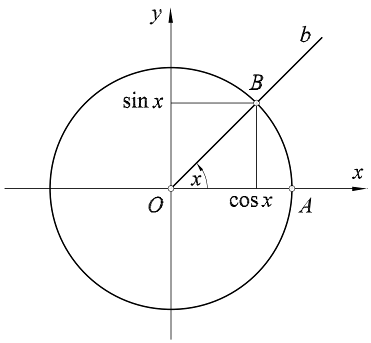
16. Nađi glavnu mjeru kutova i skiciraj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:
a) $\frac{170\pi}{13}$; **b)** $\frac{492\pi}{23}$; **c)** $\frac{353\pi}{10}$; **d)** $-\frac{472\pi}{7}$;
e) 10; **f)** 12.7; **g)** 345; **h)** -82.

17. Napiši još bar 4 mjere kuta u radijanima čija je jedna mjera zadana:
a) $\frac{\pi}{2}$; **b)** $\frac{8}{3}\pi$; **c)** $\frac{19\pi}{4}$;
d) $-\frac{141}{4}\pi$; **e)** $-\frac{1999}{3}\pi$; **f)** $-\frac{147}{5}\pi$.
Pretvori radijanske mjere u stupnjeve.

18. Napiši još bar 4 mjere u stupnjevima kuta čija je jedna mjera zadana:
a) 330°; **b)** -60°; **c)** 80°;
d) 1440°; **e)** -1998°; **f)** -1°.
Pretvori mjere u stupnjevima u mjere u radijanima.

1.2. Definicija trigonometrijskih funkcija

Sinus i kosinus



Sl. 1.14.

Smjestimo li brojevnu kružnicu k na koordinatni sustav tako da se polupravac a podudara s pozitivnim dijelom x-osi, a vrh O s ishodištem, dobivamo trigonometrijsku kružnicu. Promotrimo kut $\sphericalangle aOb$ mjere x. Krak b siječe brojevnu kružnicu u točki B koja, naravno, u tom koordinatnom sustavu ima dvije koordinate. Apscisu točke B nazivamo **kosinus broja** x, a ordinatu točke B **sinus broja** x.

Sinus realnog broja x ordinata je one točke trigonometrijske kružnice koja je pridružena realnom broju x.

Kosinus realnog broja x apscisa je one točke trigonometrijske kružnice koja je pridružena realnom broju x.

Domena obiju funkcija je $\mathbf{R}$, tj. x je bilo koji realni broj. Budući da su koordinate točke B veće ili jednake -1, a manje ili jednake 1, kodomena tih funkcija je interval $[-1, 1]$. Ovo zapisujemo ovako:

Funkcije sinus i kosinus

$$\cos : \mathbf{R} \to [-1, 1] \qquad \sin : \mathbf{R} \to [-1, 1]$$

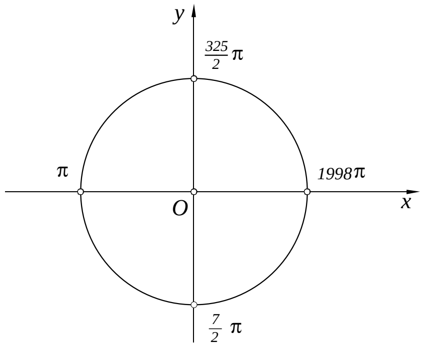
$$x \mapsto \cos x \qquad x \mapsto \sin x$$

Primjer 1. Izračunajmo sinus i kosinus od x, ako je x:

a) π; **b**) 1998π; **c**) $\dfrac{7\pi}{2}$; **d**) $\dfrac{325}{2}\pi$.

Nacrtajmo i sliku.

▷ $\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$;
$\sin 1998\pi = 0$, $\cos 1998\pi = 1$;
$\sin\dfrac{7\pi}{2} = -1$, $\cos\dfrac{7\pi}{2} = 0$;
$\sin\dfrac{325}{2}\pi = 1$, $\cos\dfrac{325}{2}\pi = 0$. ◁

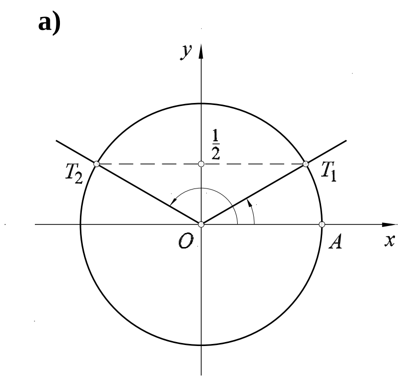


Sl. 1.15.

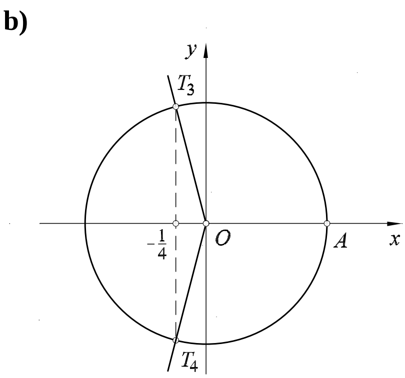
Primjer 2. Nacrtajmo kutove mjere t za koje vrijedi:

a) $\sin t = \dfrac{1}{2}$; **b)** $\cos t = -\dfrac{1}{4}$.

▷



Sl. 1.16. Za kutove $\sphericalangle AOT_1$ *i* $\sphericalangle AOT_2$ *vrijedi* $\sin t = \dfrac{1}{2}$.



Sl. 1.17. Za kutove $\sphericalangle AOT_3$ *i* $\sphericalangle AOT_4$ *vrijedi* $\cos t = -\dfrac{1}{4}$.

◁

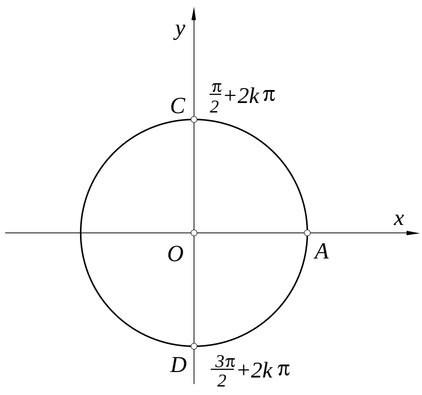
Funkcija tangens

Funkcija **tangens**, u oznaci tg, definira se pomoću funkcija sinus i kosinus ovako:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cos x \neq 0.$$

Za koje brojeve x vrijedi $\cos x \neq 0$?

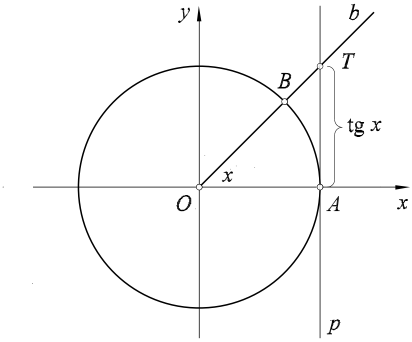
Jedine točke na brojevnoj kružnici s apscisom 0 su točke $C(0, 1)$ i $D(0, -1)$ (slika 1.18.).



Sl. 1.18. C i D su točke trigonometrijske kružnice s apscisom 0.

Brojevi koji se preslikavaju u točku C su brojevi $\dfrac{\pi}{2}$, $\dfrac{5\pi}{2}$, $\dfrac{9\pi}{2}\cdots$, $\dfrac{-3\pi}{2}$, $\dfrac{-7\pi}{2}, \cdots$, tj. $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

Točki D odgovaraju brojevi $\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Dakle, tangens je definiran za sve realne brojeve x različite od $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.



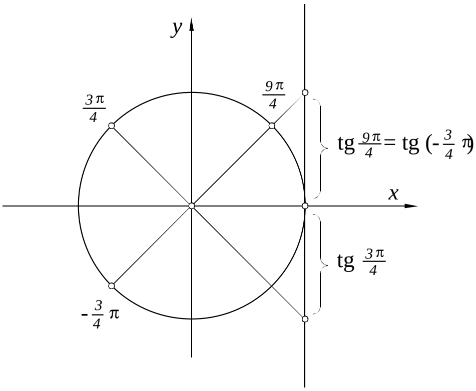
Sl. 1.19.

Na slici se tangens broja očitava ovako. U točki A povučemo tangentu p na kružnicu. Završni krak b kuta mjere x siječe tu tangentu u točki T koja u koordinatnom sustavu ima dvije koordinate. Druga koordinata, tj. ordinata točke T je upravo $\operatorname{tg} x$. Pravac p nazivamo **tangensna** os.

Primjer 3. Nacrtajmo zadane kutove na trigonometrijskoj kružnici i $\operatorname{tg} x$ na tangensnoj osi ako je x:

a) $\dfrac{9\pi}{4}$; **b**) $\dfrac{3\pi}{4}$; **c**) $-\dfrac{3\pi}{4}$.

▷



Sl. 1.20.

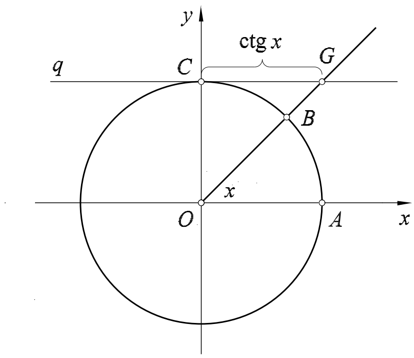
◁

Kotangens

Funkcija **kotangens**, u oznaci ctg, definira se ovako

$$\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x},\qquad \sin x\neq 0.$$

Brojevi za koje je $\sin x = 0$ su oblika $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, pa je dakle, $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ definirano za $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.



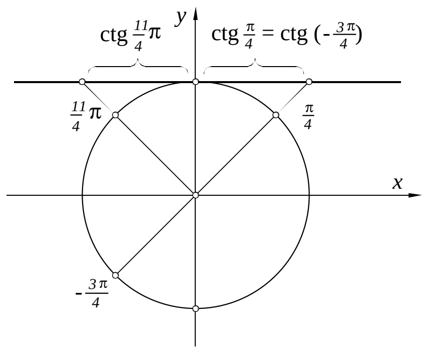
Sl. 1.21.

Na slici se kotangens očitava ovako. U točki $C(0, 1)$ povucimo tangentu q na kružnicu. Završni krak kuta mjere x siječe tangentu u točki G koja u tom koordinatnom sustavu ima dvije koordinate. Njena apscisa je kotangens broja x. Pravac q naziva se **kotangensna** os.

Primjer 4. Nacrtajmo kutove mjere x na trigonometrijskoj kružnici i $\operatorname{ctg} x$ na kotangensnoj osi ako je x:

a) $\dfrac{\pi}{4}$; **b**) $\dfrac{11\pi}{4}$; **c**) $-\dfrac{3\pi}{4}$.

▷



Sl. 1.22.

◁

Primjer 5. Odredimo predznake trigonometrijskih funkcija u pojedinim kvadrantima.

▷ Ako je B u prvom kvadrantu, tada su obje koordinate te točke pozitivne, tj. $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, te su i $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ pozitivni. Za ostale kvadrante vrijedi ova tablica:

kvadrant	I.	II.	III.	IV.
$\sin x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos x$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\mathrm{tg}\, x$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\mathrm{ctg}\, x$	$+$	$-$	$+$	$-$ ◁

Veza s trigonometrijskim funkcijama šiljastih kutova

U drugom smo razredu proučavali trigonometrijske funkcije samo šiljastih kutova. Ponovimo te definicije.

Trigonometrijske vrijednosti šiljastog kuta

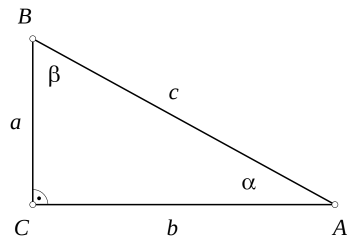
Neka je ABC pravokutni trokut s hipotenuzom $\overline{AB}$ i kutom α pri vrhu A.

Omjer $\dfrac{a}{c}$ nasuprotne katete i hipotenuze naziva se **sinus kuta** α i označava sa $\sin\alpha$.

Omjer $\dfrac{b}{c}$ priležeće katete i hipotenuze naziva se **kosinus kuta** α i označava sa $\cos\alpha$.

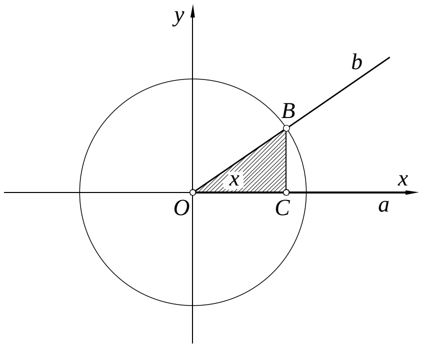
Omjer $\dfrac{a}{b}$ nasuprotne i priležeće katete naziva se **tangens kuta** α i označava sa $\mathrm{tg}\,\alpha$.

Omjer $\dfrac{b}{a}$ priležeće i nasuprotne katete naziva se **kotangens kuta** α i označava sa $\mathrm{ctg}\,\alpha$.



Sl. 1.23. Trigonometrijske vrijednosti šiljastog kuta definiraju se pomoću pravokutnog trokuta. Vrijedi $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$, $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \mathrm{ctg}\,\beta$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \mathrm{tg}\,\beta$. *U 2. razredu je također pokazano da se vrijednosti trigonometrijskih funkcija kuta ne mijenjaju promatramo li međusobno slične trokute.*

Naizgled, te su definicije nešto drugačije od ovih koje smo sada uveli. Ali pokažimo da se radi o istim pojmovima.



Sl. 1.24. $\sphericalangle aOb$ *je šiljasti kut s mjerom* $x \in \mathbf{R}$.

Promotrimo na slici pravokutni trokut OCB. Točka B ima koordinate $(\cos x, \sin x)$, tj. $|OC| = \cos x$, $|BC| = \sin x$. Prema onome što znamo iz drugog razreda vrijedi $\sin x = \dfrac{|BC|}{|OB|}$, ali budući da je kružnica jedinična, tj. $|OB| = 1$, slijedi da je $\sin x = |BC|$. Dakle, za šiljasti kut x sinus definiran u drugom razredu i u ovom poglavlju je jednak broj. Isto vrijedi i za ostale trigonometrijske funkcije.

Ovdje je mjesto i vrijeme da se prisjetimo i vrijednosti trigonometrijskih funkcija nekih specijalnih šiljastih kutova.

$t(^\circ)$	$t\,(\text{rad})$	$\sin t$	$\cos t$	$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} t$
30°	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Zadaci 1.2

1. Nacrtaj trigonometrijsku kružnicu polumjera 1 dm, te pomoću kutomjera kutove
a) 10°; **b)** 20°; **c)** 30°; **d)** 45°;
e) 75°; **f)** 140°; **g)** 200°; **h)** 310°.
Mjerenjem odredi sinus i kosinus tih kutova.

2. Nacrtaj kut mjere t i istakni na crtežu sinus i kosinus od t ako je t jednako:
a) 32π; **b)** -14π: **c)** -197π:
d) $\dfrac{321\pi}{2}$; **e)** $-\dfrac{141\pi}{2}$; **f)** $\dfrac{33\pi}{2}$.

3. Odredi glavnu mjeru zadanog kuta, prikaži ga na trigonometrijskoj kružnici i istakni sinus i kosinus od x ako je x:

a) $30°$; **b)** $750°$; **c)** $-750°$; **d)** $2070°$;
e) $60°$; **f)** $120°$; **g)** $-420°$; **h)** $2100°$;
i) $45°$; **j)** $135°$; **k)** $-405°$; **l)** $855°$.

4. Odredi glavnu mjeru zadanog kuta, prikaži ga na trigonometrijskoj kružnici i istakni sinus i kosinus od x ako je x:

a) $\frac{\pi}{6}$; **b)** $\frac{5\pi}{6}$; **c)** $\frac{17\pi}{6}$; **d)** $-\frac{17\pi}{6}$;
e) $\frac{\pi}{3}$; **f)** $\frac{2\pi}{3}$; **g)** $-\frac{17\pi}{3}$; **h)** $\frac{23\pi}{3}$;
i) $\frac{\pi}{4}$; **j)** $\frac{3\pi}{4}$; **k)** $\frac{21\pi}{4}$; **l)** $-\frac{43\pi}{4}$.

5. Nađi $\sin t$, $\cos t$ ako je t:

a) 27π; **b)** -18π; **c)** 384π;
d) $\frac{21}{2}\pi$; **e)** $-\frac{43}{2}\pi$; **f)** $-\frac{1997}{2}\pi$.

6. Nacrtaj na trigonometrijskoj kružnici točke pridružene kutu t za koje vrijedi:

a) $\sin t = \frac{3}{4}$; **b)** $\sin t = \frac{1}{6}$; **c)** $\sin t = -\frac{1}{4}$;
d) $\cos t = \frac{1}{3}$; **e)** $\cos t = -\frac{1}{2}$; **f)** $\cos t = -\frac{2}{3}$.

7. Odredi predznake funkcija sinus i kosinus brojeva

a) $427°$; **b)** $834°$; **c)** $22°15'$; **d)** $1237°$;
e) $\frac{18\pi}{5}$; **f)** $\frac{324\pi}{7}$; **g)** $\frac{423\pi}{8}$; **h)** $-\frac{123\pi}{4}$.

8. Nacrtaj dane kutove mjere x i na tangensnoj osi nacrtaj $\operatorname{tg} x$ ako je:

a) $30°$; **b)** $150°$; **c)** $210°$; **d)** $750°$;
e) $60°$; **f)** $120°$; **g)** $780°$; **h)** $-1500°$;
i) $45°$; **j)** $135°$; **k)** $855°$; **l)** $-135°$.

9. Nacrtaj dane kutove mjere x i na tangensnoj osi nacrtaj $\operatorname{tg} x$ ako je:

a) $\frac{\pi}{6}$; **b)** $\frac{7\pi}{6}$; **c)** $\frac{23\pi}{6}$; **d)** $-\frac{41\pi}{6}$;
e) $\frac{\pi}{3}$; **f)** $\frac{4\pi}{3}$; **g)** $\frac{19\pi}{3}$; **h)** $-\frac{101\pi}{6}$;
i) $\frac{\pi}{4}$; **j)** $\frac{5\pi}{4}$; **k)** $\frac{15\pi}{4}$; **l)** $-\frac{81\pi}{4}$.

10. Postoji li tangens od ovih brojeva:

a) $\frac{\pi}{2}$; **b)** $\frac{171\pi}{2}$; **c)** 12π; **d)** $-\frac{373}{2}\pi$;
e) -19π; **f)** $-\frac{321\pi}{2}$; **g)** $\frac{41\pi}{4}$; **h)** $\frac{3218}{7}\pi$.

11. Nacrtaj na trigonometrijskoj kružnici kutove mjere t za koje vrijedi:

a) $\operatorname{tg} t = 1$; **b)** $\operatorname{tg} t = 2$; **c)** $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{4}$;
d) $\operatorname{tg} t = 1.5$; **e)** $\operatorname{tg} t = -1.8$; **f)** $\operatorname{tg} t = 2$.

12. Nacrtaj kutove mjere x i istakni na kotangensnoj osi $\operatorname{ctg} x$ ako je x:

a) $30°$; **b)** $210°$; **c)** $-510°$; **d)** $1050°$;
e) $60°$; **f)** $240°$; **g)** $-480°$; **h)** $1020°$;
i) $45°$; **j)** $225°$; **k)** $855°$; **l)** $-45°$.

13. Nacrtaj kutove mjere x i istakni na kotangensnoj osi $\operatorname{ctg} x$ ako je x:

a) $\frac{\pi}{6}$; **b)** $\frac{5\pi}{6}$; **c)** $\frac{31\pi}{6}$; **d)** $\frac{43\pi}{6}$;
e) $\frac{\pi}{3}$; **f)** $\frac{2\pi}{3}$; **g)** $\frac{101\pi}{3}$; **h)** $-\frac{71\pi}{3}$;
i) $\frac{\pi}{4}$; **j)** $\frac{3\pi}{4}$; **k)** $-\frac{73\pi}{4}$; **l)** $\frac{103\pi}{4}$.

14. Nacrtaj na trigonometrijskoj kružnici kutove mjere x za koje vrijedi:

a) $\operatorname{ctg} x = 1$; **b)** $\operatorname{ctg} x = 2$; **c)** $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}$;
d) $\operatorname{ctg} x = -1$; **e)** $\operatorname{ctg} x = 0$; **f)** $\operatorname{ctg} x = -2.5$.

15. Izračunaj

a) $\sin 180° + \cos 360°$; **b)** $2\cos 180° - 4\sin 90°$;
c) $3\sin 270° - 5\cos 90°$; **d)** $8\sin 1080° + 5\cos(-1080°)$;
e) $\operatorname{tg} 540° - 4\cos(-540°)$; **f)** $\operatorname{ctg} 450° + 18\sin(-900°)$;
g) $\dfrac{\operatorname{tg} 1440° + \sin(-630°)}{\sin 3600° - \cos 3600°}$; **h)** $\dfrac{\cos^2(-270°) - \cos^2 180°}{\sin^2 450° + \sin^2 270°}$.

16. Izračunaj:

a) $\cos\pi - \cos 4\pi + \sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos(-\pi)$; **b)** $\sin\frac{3\pi}{2} - \cos\pi + \sin\pi$;
c) $\sin 1996\pi - \cos 1997\pi + \operatorname{tg} 1998\pi$; **d)** $\dfrac{\operatorname{tg} 14\pi + \sin(-\frac{17}{2}\pi)}{\sin 27\pi - \cos 27\pi}$;
e) $\dfrac{\sin\frac{19\pi}{2} + \cos^2(-\frac{5\pi}{2})}{\sin^2(-\frac{19\pi}{2}) + \cos(\frac{5\pi}{2})}$; **f)** $\dfrac{\cos^2 7\pi - 2\sin^2 7\pi}{\cos^2\frac{17\pi}{2} + 2\sin^2\frac{17\pi}{2}}$;
g) $\dfrac{\cos\frac{21\pi}{2} + \cos 17\pi}{\sin^3\frac{9\pi}{2}}$; **h)** $\dfrac{\sin^2\frac{27\pi}{2} - 3\cos^2 18\pi}{5\cos 7\pi - 4\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right)}$.

17. Odredi predznak funkcija sinus, kosinus, tangens i kotangens brojeva

a) $322°$; **b)** $431°$; **c)** $-123°$;
d) $25°30'$; **e)** $\frac{14\pi}{5}$; **f)** $\frac{721\pi}{8}$;
g) $\frac{3253\pi}{10}$; **h)** $-\frac{234}{7}\pi$.