1.

Skup kompleksnih brojeva

1.1. Skupovi brojeva

Pri prebrojavanju raznovrsnih objekata iz naše okoline koristimo **prirodne brojeve**. Tako ćemo reći da u razrednom odjeljenju ima 35 učenika, da u autobusu ima 52 sjedala, da stol ima 4 noge, da jedna godina ima 31 536 000 sekundi i sl.

Skup svih prirodnih brojeva označavamo slovom $\mathbf{N}$ i pišemo $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Tijekom dosadašnjeg školovanja naučili smo zbrajati i oduzimati, množiti i dijeliti prirodne brojeve. Pri zbrajanju prirodnih brojeva uočili smo ova svojstva:

1. Zbroj dva prirodna broja je prirodan broj, tj.
$$\text{ako je } x \in \mathbf{N} \text{ i } y \in \mathbf{N}, \text{ tada je } x + y \in \mathbf{N}.$$
2. Zbrajanje je komutativna operacija, tj.
$$x + y = y + x \text{ za svaki } x, \ y \in \mathbf{N}.$$
3. Zbrajanje je asocijativna operacija, tj.
$$x + (y + z) = (x + y) + z \text{ za svaki } x, \ y, \ z \in \mathbf{N}.$$

Za množenje prirodnih brojeva vrijede slična svojstva:

1. Umnožak dva prirodna broja je prirodni broj, tj.
$$\text{ako je } x \in \mathbf{N} \text{ i } y \in \mathbf{N}, \text{ tada je i } x \cdot y \in \mathbf{N}.$$
2. Množenje je komutativno, tj.
$$x \cdot y = y \cdot x \text{ za svaki } x, \ y \in \mathbf{N}.$$

3. Množenje je asocijativno, tj.
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \text{ za svaki } x,\ y,\ z \in \mathbf{N}.$$

Zbrajanje i množenje vezani su svojstvom distributivnosti koje glasi:
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ za svaki } x,\ y,\ z \in \mathbf{N}.$$

Pri rješavanju problemskih zadataka obično se javljaju jednadžbe. Evo nekoliko primjera jednadžbi čiji koeficijenti su prirodni brojevi:
$$2 + x = 18, \quad 3x = 27, \quad 2x + 14 = 32.$$

Riješiti jednadžbu u skupu $\mathbf{N}$ znači odrediti sve prirodne brojeve x koji uvršteni u tu jednadžbu daju istinitu jednakost.

Tako je, na primjer, rješenje jednadžbe $2 + x = 18$ broj $x = 18 - 2 = 16$ jer uvrstimo li 16 u jednadžbu, dobivamo
$$\begin{aligned} 2 + 16 &= 18 \\ 18 &= 18, \end{aligned}$$
tj. dobili smo istinitu jednakost. Kažemo da je ova jednadžba **rješiva** u skupu $\mathbf{N}$.

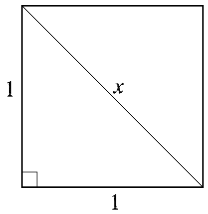
Promotrimo jednadžbu $10+x = 7$. Je li ona rješiva u skupu $\mathbf{N}$? Drugim riječima, postoji li prirodni broj x koji zbrojen s 10 daje broj 7? Odgovor je niječan. Ne postoji prirodni broj koji je rješenje jednadžbe $10 + x = 7$. Dakle, jednadžba $a + x = b$, $a,\ b \in \mathbf{N}$ nije uvijek rješiva u skupu prirodnih brojeva. Da bi takva jednadžba uvijek imala rješenje, treba skup $\mathbf{N}$ proširiti, tj. dopuniti ga nulom i negativnim cijelim brojevima. Tako dobivamo skup cijelih brojeva kojeg označavamo sa $\mathbf{Z}$, tj.
$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$
Vidimo da je $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$.

U skupu $\mathbf{Z}$ jednadžba $10 + x = 7$ ima rješenje i ono glasi $x = 7 - 10 = -3$. Kažemo da je u skupu $\mathbf{Z}$ oduzimanje uvijek izvedivo. Pri ovom proširivanju računske operacije zbrajanje i množenje zadržavaju svoja svojstva, tj. komutativne i asocijativne su, vrijedi svojstvo distributivnosti, a zbroj odnosno umnožak dva cijela broja je cijeli broj.

U skupu $\mathbf{Z}$ svaka je jednadžba $a + x = b$, a, $b \in \mathbf{Z}$ rješiva. Ali, postoje jednadžbe koje nisu rješive u $\mathbf{Z}$. Evo nekoliko primjera takvih jednadžbi:
$$9x = 46, \quad -5x + 1 = 0, \quad 2(x - 1) = 7.$$
Promotrimo prvu od njih. Njezino rješenje bi bio cijeli broj koji pomnožen s 9 daje 46, ali takav očito ne postoji. Dakle, jednadžba oblika $ax = b$, a, $b \in \mathbf{Z}$, općenito nije rješiva u $\mathbf{Z}$. Zato se skup cijelih brojeva $\mathbf{Z}$ proširuje do skupa racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$ koji sadrži omjere cijelih brojeva, tj.
$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} :\ a, b \in \mathbf{Z},\ b \neq 0 \right\}.$$
U skupu $\mathbf{Q}$ jednadžba $9x = 46$ ima rješenje i ono glasi $x = \dfrac{46}{9}$. Kažemo da je dijeljenje brojem različitim od 0 uvijek izvedivo u skupu $\mathbf{Q}$.

I pri ovom proširivanju operacije zbrajanje i množenje zadržavaju svoja svojstva, ali dobivaju i neka nova koja smo opisali u 1. razredu.

Je li postupak proširivanja skupova brojeva gotov? Nije, jer pokušamo li izračunati duljinu dijagonale jediničnog kvadrata, susrećemo se s kvadratnom jednadžbom. Naime, ako je x duljina dijagonale kvadrata, tada prema Pitagorinom poučku vrijedi



Sl. 1.1.

$$\begin{aligned} x^2 &= 1^2 + 1^2 \\ x^2 &= 1 + 1 \\ x^2 &= 2, \end{aligned}$$

tj. dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2 = 2$ čije rješenje očito postoji (to je duljina dijagonale kvadrata), a može se pokazati da to rješenje nije racionalni broj. Za rješenje te jednadžbe koristimo oznaku $x = \sqrt{2}$. Dakle, $\sqrt{2}$ nije racionalni broj već **iracionalni**. U osmom razredu smo se susreli s takvim brojevima čiji decimalni zapis nije konačan niti sadrži neku skupinu znamenaka koja se periodično ponavlja. Racionalni i iracionalni brojevi zajedno čine **skup realnih brojeva**. Uz to vrijedi $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$. Pri tome se sva svojstva operacija zbrajanja i množenja koja su vrijedila u skupu $\mathbf{Q}$ prenose i na skup $\mathbf{R}$.

Istaknimo ovdje sva ta svojstva.

Svojstva zbrajanja realnih brojeva	**Svojstva množenja realnih brojeva**
1. Zatvorenost zbrajanja Za svaki $x, y \in \mathbf{R}$ vrijedi $x + y \in \mathbf{R}$.	1. Zatvorenost množenja Za svaki $x, y \in \mathbf{R}$ vrijedi $x \cdot y \in \mathbf{R}$.
2. Asocijativnost zbrajanja Za svaki $x, y, z \in \mathbf{R}$ vrijedi $x + (y + z) = (x + y) + z$.	2. Asocijativnost množenja Za svaki $x, y, z \in \mathbf{R}$ vrijedi $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
3. Komutativnost zbrajanja Za svaki $x, y \in \mathbf{R}$ vrijedi $x + y = y + x$.	3. Komutativnost množenja Za svaki $x, y \in \mathbf{R}$ vrijedi $x \cdot y = y \cdot x$.
4. Postojanje nule Za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $x + 0 = x$.	4. Postojanje jedinice Za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $x \cdot 1 = x$.
5. Postojanje suprotnog elementa Za svaki realni broj x postoji samo jedan realni broj $-x$ takav da je $x + (-x) = 0$.	5. Postojanje recipročnog elementa Za svaki realni broj x različit od nule postoji samo jedan realni broj x^{-1} takav da je $x \cdot x^{-1} = 1$. x^{-1} zovemo inverz ili recipročni broj broja x.
6. Distributivnost množenja prema zbrajanju Za svaki $x, y, z \in \mathbf{R}$ vrijedi $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.	

Zadaci 1.1

1. Odredi koji je od danih brojeva cijeli:

a) -1; **b)** $\frac{44}{5}$; **c)** π; **d)** 241;
e) -2003; **f)** $1\frac{4}{9}$; **g)** $3.7\dot{1}$; **h)** 0.

2. Odredi koji je od danih brojeva racionalni:

a) $-\frac{14}{227}$; **b)** 0; **c)** -351; **d)** $\frac{141}{144}$;
e) $\frac{\pi}{3}$; **f)** $\sqrt{2}+1$; **g)** 821; **h)** 37.21.

3. Odredi koji je od danih brojeva racionalni, a koji iracionalni:

a) $-\frac{16}{225}$; **b)** $2\frac{1}{9}$; **c)** $-3.\dot{7}$; **d)** $4\sqrt{3}$;
e) -227; **f)** 2π; **g)** $4\sqrt{2}$; **h)** 0.

4. Riješi jednadžbe i napiši kojem skupu brojeva pripada rješenje svake od njih:
a) $120 - x = 26$; **b)** $19 - 5x = 9$;
c) $3(x-45) + 37 = 49$; **d)** $-471 + 2(5+x) = 17$;
e) $7(2x+1) = 6(2-x)$; **f)** $0.6(x-8) = 0.7 - 4.2$;
g) $12x - 3(5+x) = 2(x-1) - 3x$; **h)** $-30 - 3(x-7) = 12x - 7(2x-3)$.

5. Imaju li sljedeće jednadžbe rješenja u skupu $\mathbf{N}$?
a) $4(5x+1) - 3(6x-2) = 5(x+5)$;
b) $\frac{x}{7} + \frac{x}{8} = 15$; **c)** $\frac{5x}{6} + 7 = \frac{3x}{4}$.

6. Imaju li sljedeće jednadžbe rješenja u skupu $\mathbf{Z}$?
a) $10x - 3(x+6) = 16 - 2(19-7x)$;
b) $5 - \frac{2x}{7} = -x$; **c)** $\frac{2}{7}(x-2) = \frac{1}{11}(5x+3)$.

7. Imaju li sljedeće jednadžbe rješenja u skupu $\mathbf{Q}$?
a) $4(5x+2) - 3(6x-2) = 5(x+5)$;
b) $\frac{x}{7} - \frac{x}{8} = 12$;
c) $x^2 - 25 = 0$;
d) $x^2 - 3 = 0$.

8. Nađi sva rješenja jednadžbe $(x-3)(x+12) = 0$ u skupu
a) prirodnih brojeva; **b)** cijelih brojeva.

9. Je li jednadžba $x^2 = -1$ rješiva u skupu $\mathbf{R}$?

1.2. Skup kompleksnih brojeva

Proučimo posljednji zadatak prethodnog poglavlja:

Je li jednadžba $x^2 = -1$ rješiva u skupu $\mathbf{R}$?

Drugim riječima, postoji li realni broj x koji kvadriran daje negativan broj? Poznavajući svojstva kvadriranja, znamo da je kvadrat realnog broja ili pozitivan ili 0, tj. nikad nije negativan. Dakle, u skupu $\mathbf{R}$ jednadžba $x^2 = -1$ nema rješenja.

Kao i nekoliko puta do sada, prilazimo proširivanju promatranog skupa brojeva na veći skup u kojem će promatrana jednadžba imati rješenje, uz očuvanje svojstava zbrajanja i množenja.

Označimo s i rješenje jednadžbe $x^2 = -1$. Broj i zovemo imaginarna jedinica i za njega vrijedi $i^2 = -1$, tj. $i = \sqrt{-1}$.

Imaginarna jedinica

Imaginarna jedinica je broj i za koji vrijedi $i^2 = -1$.

Skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ proširujemo do novog skupa kojeg nazivamo **skup kompleksnih brojeva** i označavamo sa $\mathbf{C}$. Skup $\mathbf{C}$ sadrži sve realne brojeve, zatim rješenje jednadžbe $x^2 = -1$, tj. sadrži broj i, ali i brojeve $a+i$, bi, $a+bi$ gdje su a i $b \in \mathbf{R}$, jer zbrajanje i množenje moraju biti izvedivi u skupu $\mathbf{C}$. Ukratko, skup kompleksnih brojeva je skup brojeva oblika $a+bi$, gdje su a i b realni brojevi.

Skup kompleksnih brojeva

$$\mathbf{C} = \{a+bi : \ a, \ b \in \mathbf{R}\}.$$

Brojeve oblika bi, gdje je $b \in \mathbf{R}$ zovemo **imaginarni** brojevi.

Primjer 1. Zapišimo brojeve $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-\frac{25}{9}}$, $\sqrt{-0.64}$, $\sqrt{-7}$ kao imaginarne brojeve.

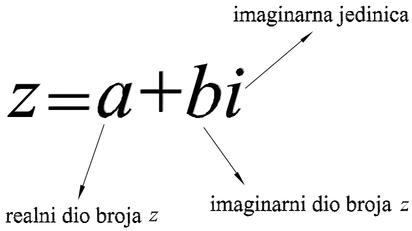
▷

$$\begin{aligned}
\sqrt{-16} &= \sqrt{-1 \cdot 16} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{16} = i \cdot 4 = 4i, \\
\sqrt{-\frac{25}{9}} &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} i, \\
\sqrt{-0.64} &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{0.64} = 0.8i, \\
\sqrt{-7} &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{7} = i\sqrt{7}. \quad \triangleleft
\end{aligned}$$

Ako je kompleksni broj z oblika

$$z = a + bi, \quad a, \ b \in \mathbf{R},$$

tada broj a zovemo **realni dio** broja z i pišemo $a = \operatorname{Re} z$, a b zovemo **imaginarni dio** broja z i pišemo $b = \operatorname{Im} z$.



Sl. 1.2.

Primjer 2. Odredimo realni i imaginarni dio kompleksnih brojeva $4 + 5i$, $-7 - 12i$, $\frac{3}{7}i$, -18.

▷

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}(4+5i) = 4, && \operatorname{Im}(4+5i) = 5;\\
&\operatorname{Re}(-7-12i) = -7, && \operatorname{Im}(-7-12i) = -12;\\
&\operatorname{Re}\left(\frac{3}{7}i\right) = 0, && \operatorname{Im}\left(\frac{3}{7}i\right) = \frac{3}{7};\\
&\operatorname{Re}(18) = 18, && \operatorname{Im}(18) = 0. \quad \triangleleft
\end{aligned}$$

Dva su kompleksna broja **jednaka** ako i samo ako su im jednaki i realni i imaginarni dijelovi.

Dakle, ako su $z_1 = a_1 + b_1 i$ i $z_2 = a_2 + b_2 i$ dva kompleksna broja, oni su jednaki ako i samo ako vrijedi

$$a_1 = a_2 \quad \text{i} \quad b_1 = b_2.$$

Primjer 3. Odredimo realne brojeve p i q tako da su kompleksni brojevi z_1 i z_2 jednaki, ako je

a) $z_1 = -2 + pi$, $z_2 = q + \frac{3}{2}i$; **b)** $z_1 = 1 + (2p+1)i$, $z_2 = (p+q) - qi$.

▷ **a)** Iz definicije jednakosti slijedi da je $-2 = q$ i $p = \frac{3}{2}$.

b) Iz definicije jednakosti slijedi da je $1 = p + q$ i $2p + 1 = -q$. Ovo je sustav s dvije nepoznanice p i q koji riješimo supstitucijom tako da iz druge jednadžbe izrazimo $q = -2p - 1$ i uvrstimo u prvu jednadžbu: $1 = p + q$, $1 = p + (-2p - 1)$, $1 = p - 2p - 1$, $1 = -p - 1$, $p = -1 - 1$, $p = -2$. Sad je $q = -2p - 1 = -2(-2) - 1 = 4 - 1 = 3$. ◁

Zadaci 1.2

1. Zapiši pomoću imaginarne jedinice:

a) $\sqrt{-49}$; **b)** $\sqrt{-100}$; **c)** $\sqrt{-144}$; **d)** $\sqrt{-\frac{25}{4}}$;

e) $\sqrt{-\frac{100}{81}}$; **f)** $\sqrt{-0.36}$; **g)** $\sqrt{-1.69}$; **h)** $\sqrt{-0.04}$;

i) $\sqrt{-2}$; **j)** $\sqrt{-5}$; **k)** $\sqrt{-\frac{1}{3}}$; **l)** $\sqrt{-\frac{4}{7}}$.

2. Odredi realni i imaginarni dio danih brojeva:
a) $z = 5 + 14i$; **b)** $z = -2 + 18i$; **c)** $z = 13 - 7i$;
d) $z = -4 - 5i$; **e)** $z = 3$; **f)** $z = -5$;
g) $z = 8i$; **h)** $z = -14i$; **i)** $z = i\sqrt{2}$;
j) $z = 0$; **k)** $z = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$; **l)** $z = 1 + \sqrt{3} + i\sqrt{5}$.

3. Koliki mora biti broj m da bi kompleksni brojevi z_1 i z_2 bili jednaki?
a) $z_1 = m + 4i$, $z_2 = -3 + 4i$;
b) $z_1 = (2 - m) + 8i$, $z_2 = 14 + 8i$;
c) $z_1 = 32 - 7mi$, $z_2 = 32 + 25i$.

4. Odredi realne brojeve x i y tako da kompleksni brojevi z_1 i z_2 budu jednaki:
a) $z_1 = x + 3i$, $z_2 = 7 + yi$;
b) $z_1 = 1 - x + 5i$, $z_2 = 18 - yi$;
c) $z_1 = 2 + 3x + 18i$, $z_2 = 20 + (7 - y)i$;
d) $z_1 = 10 + (5 - x)i$, $z_2 = 2y - 4 - 2i$.

5. Odredi realne brojeve x i y tako da kompleksni brojevi z_1 i z_2 budu jednaki:
a) $z_1 = (2 + x) - 3i$, $z_2 = y + (1 - x)i$;
b) $z_1 = (3 + 2x) + yi$, $z_2 = 2 + y + (x - 1)i$;
c) $z_1 = (5x - y) + (2 - x)i$, $z_2 = 18 - 7yi$;
d) $z_1 = (x + y) - (x - y)i$, $z_2 = 20 - 4i$.

6. Odredi realne brojeve a i b iz jednadžbi:
a) $3a + 7i = 21 - 49bi$; **b)** $(a + b) - 18i = 2 - ai$;
c) $a + 2i - 78 + 3bi = 2$; **d)** $a + b + 6i - 14 = 4 + 4ib$.

1.3. Zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva

U svim do sada promatranim proširenjima skupova brojeva računske operacije zbrajanje i množenje sačuvale su svoja osnovna svojstva. Tako će biti i sada. Dakle, u skupu kompleksnih brojeva zbrajanje i množenje je komutativno i asocijativno, te je množenje distributivno obzirom na zbrajanje. Uz to, vrijedi $z + 0 = z$ i $z \cdot 1 = z$ za svaki kompleksni broj z. Svaki kompleksni broj ima svoj suprotan broj, a ako je uz to broj različit od nule, tada ima i svoj inverz.

Koristeći se tim svojstvima lako izvodimo zbrajanje i množenje dvaju (i više) kompleksnih brojeva.

Primjer 1. Zbrojimo brojeve $z_1 = 5 + 16i$ i $z_2 = 8 - 12i$.

▷

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (5 + 16i) + (8 - 12i) \\ &= 5 + 16i + 8 - 12i = (5 + 8) + (16i - 12i) \\ &= 13 + 4i. \end{aligned}$$

Dakle, dva kompleksna broja zbrajamo tako da posebno zbrojimo njihove realne dijelove, a posebno imaginarne dijelove. ◁

Primjer 2. Pomnožimo brojeve $z_1 = 3 + 4i$ i $z_2 = 2 - 3i$.

▷

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (3 + 4i)(2 - 3i) = 3 \cdot 2 - 3 \cdot 3i + 4i \cdot 2 - 4i \cdot 3i \\ &= 6 - 9i + 8i - 12i^2 = 6 - 9i + 8i - 12 \cdot (-1) \\ &= 6 + 12 + (-9i + 8i) \\ &= 18 - i. \end{aligned}$$

Dakle, dva kompleksna broja množimo kao što množimo dva binoma uz uvažavanje svojstva imaginarne jedinice da je $i^2 = -1$. ◁

Primjer 3. Oduzmimo brojeve $z_1 = 3 - 4i$ i $z_2 = 5 - 8i$.

▷

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (3 - 4i) - (5 - 8i) = 3 - 4i - 5 + 8i \\ &= (3 - 5) + (-4i + 8i) \\ &= -2 + 4i. \end{aligned}$$ ◁

Primjer 4. Izračunajmo $(2z_1 - z_2)(z_1 + 3z_2)$ ako su $z_1 = 1 + 3i$ i $z_2 = 2 - 4i$.

▷ Prvo izračunamo vrijednost svake zagrade posebno.

$$\begin{aligned} 2z_1 - z_2 &= 2(1 + 3i) - (2 - 4i) = 2 + 6i - 2 + 4i = 10i, \\ z_1 + 3z_2 &= (1 + 3i) + 3(2 - 4i) = 1 + 3i + 6 - 12i = 7 - 9i. \end{aligned}$$

Sad je

$$\begin{aligned} (2z_1 - z_2)(z_1 + 3z_2) &= 10i(7 - 9i) = 70i - 90i^2 \\ &= 70i - 90(-1) = 90 + 70i. \end{aligned}$$ ◁

Primjer 5. Izračunajmo z^2 ako je $z = 5 + 8i$.

▷ Zadatak rješavamo uporabom formule za kvadrat binoma: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

$$\begin{aligned} z^2 &= (5 + 8i)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 8i + (8i)^2 = 25 + 80i + 64i^2 \\ &= 25 + 80i - 64 = -39 + 80i. \end{aligned}$$ ◁

Primjer 6. Popunimo tablicu:

Potencija broja i	i	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8	i^9
Rezultat									

Što primjećujemo?

▷ Lako izračunamo da je $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$, $i^7 = i^4 \cdot i^3 = i^3 = -i$, $i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$, $i^9 = i^8 \cdot i = i$, pa ispunjena tablica izgleda ovako:

Potencija broja i	i	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8	i^9
Rezultat	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i

Vidimo da se skupina rezultata i, -1, $-i$, 1 ponavlja. Dakle, svaka četiri koraka pojavljuje se rezultat i, tj. potencije i, i^5, i^9, i^{13}, i^{17}, ... jednake su i. Uočimo da eksponenti 1, 5, 9, 13, 17 pri dijeljenju s 4 daju ostatak 1 što je upravo eksponent od i.

Rezultat -1 dobit ćemo kod potencija i^2, i^6, i^{10}, i^{14}, i^{18} itd. Eksponenti 2, 6, 10, 14, 18 pri dijeljenju s 4 daju ostatak 2, što je upravo eksponent potencije i^2 koja daje rezultat -1.

Rezultat $-i$ dobit ćemo kod potencija i^3, i^7, i^{11}, i^{15}, i^{19} itd. Eksponenti 3, 7, 11, 15, 19 pri dijeljenju s 4 daju ostatak 3, što je upravo eksponent potencije i^3 čija je vrijednost $-i$.

Slično, rezultat 1 dobivamo kod onih potencija čiji eksponenti su djeljivi s 4.

Dakle, potencije broja i su brojevi i, -1, $-i$, 1 i to prema ovom pravilu: ako je ostatak pri dijeljenju eksponenta s 4 jednak 1, rezultat potenciranja je i; ako je ostatak 2, rezultat je -1; ako je ostatak 3, rezultat je $-i$; ako je ostatak 0, rezultat je 1.

Tako je, na primjer, $i^{99} = -i$ jer je $99 : 4 = 24$ i ostatak 3. ◁

Zadaci 1.3

1. Izračunaj:

a) $(3-4i)+(5+18i)$; **b)** $(2-17i)+(5-7i)$;
c) $(2.7+1.8i)+(-8-4.2i)$; **d)** $(0.1-1.22i)+(-2.5+1.7i)$;
e) $\left(\frac{1}{10}-\frac{5}{2}i\right)+\left(-\frac{7}{10}+\frac{11}{2}i\right)$; **f)** $(3\sqrt{2}-4i\sqrt{3})+(7\sqrt{2}+11i\sqrt{3})$.

2. Izračunaj z_1+z_2, z_1-z_2 ako je

a) $z_1 = 3-4i$, $z_2 = 4+3i$; **b)** $z_1 = 5+6i$, $z_2 = -4-7i$;
c) $z_1 = 10-11i$, $z_2 = 21+14i$; **d)** $z_1 = -2-18i$, $z_2 = -3-21i$;
e) $z_1 = 23+3i$, $z_2 = 4-51i$; **f)** $z_1 = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$, $z_2 = -\frac{5}{2}-\frac{9}{2}i$;
g) $z_1 = -\frac{4}{5}-\frac{1}{3}i$, $z_2 = \frac{2}{3}+\frac{3}{4}i$; **h)** $z_1 = 2.3-4.5i$, $z_2 = 0.1+1.4i$;
i) $z_1 = \sqrt{3}+\sqrt{2}i$, $z_2 = 7\sqrt{3}-18\sqrt{2}i$.

3. Izračunaj $2z_1-3z_2$, $\frac{1}{2}z_1+\frac{3}{2}z_2$ ako je

a) $z_1 = 5+6i$, $z_2 = 1-i$; **b)** $z_1 = i$, $z_2 = 14+15i$;
c) $z_1 = 31-45i$, $z_2 = -11-21i$; **d)** $z_1 = 0.5+4.1i$, $z_2 = -2.7+4i$;
e) $z_1 = \frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$, $z_2 = -\frac{5}{2}+i$; **f)** $z_1 = \frac{2}{3}+\frac{3}{4}i$, $z_2 = -\frac{1}{3}-\frac{7}{4}i$.

4. Ako je $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 5 + 7i$, izračunaj:

a) $z_1 + z_2$; **b)** $z_1 - z_2$; **c)** $2z_1$;
d) $2z_1 + z_2$; **e)** $3z_1 + 4z_2$; **f)** $-3z_2$;
g) $z_1 - 3z_2$; **h)** $5z_1 - 10z_2$; **i)** $\frac{1}{2}z_2$;
j) $\frac{1}{2}z_1 + \frac{3}{2}z_2$; **k)** $\frac{3}{4}z_1 - \frac{1}{3}z_2$; **l)** $0.1z_1 + 2.2z_2$.

5. Ako je $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 5 + 3i$, $z_3 = -2 - 5i$, izračunaj:

a) $z_1 + z_2 + z_3$; **b)** $3z_1 - z_2 - z_3$;
c) $8z_1 + 10z_2 + 2z_3$; **d)** $4z_1 - 2z_2 + 7z_3$;
e) $2.1z_1 + 5.3z_2 - 1.8z_3$; **f)** $0.01z_1 - 1.05z_2 + 2.48z_3$;
g) $z_1 - 2z_2 + \frac{1}{3}z_3$; **h)** $\frac{5}{8}z_1 - \frac{11}{4}z_2 + \frac{1}{2}z_3$;
i) $\frac{1}{2}z_1 + \frac{4}{3}z_2 - \frac{1}{6}z_3$.

6. Izračunaj:

a) $12(4 - 7i)$; **b)** $-3(21 + 12i)$;
c) $(2 - i)(2 + i)$; **d)** $(9 - 13i)(9 + 13i)$;
e) $(7 - 2i)(8 + 4i)$; **f)** $(2 + i)(3 - i)$;
g) $(3 - 2i)(-5 - 4i)$; **h)** $(-8 - 4i)(-2 - i)$.

7. Izračunaj $z \cdot w$ ako je:

a) $z = 3 - 2i$, $w = 3 + 2i$; **b)** $z = 10 + 12i$, $w = -8 - 3i$;
c) $z = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$, $w = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}i$; **d)** $z = \sqrt{3} + \sqrt{5}i$, $w = 7\sqrt{3} - 4\sqrt{5}i$.

8. Ako je $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 2 + 5i$, izračunaj:

a) $z_1 \cdot z_2$; **b)** $z_1 + z_1 \cdot z_2$;
c) $(z_1 + z_2)(z_1 - z_2)$; **d)** $1 - z_1 \cdot z_2$;
e) $2 + 11i - z_1 \cdot z_2$; **f)** z_1^2;
g) z_2^2; **h)** $z_1 - z_2 + z_1 \cdot z_2$.

9. Izračunaj z^2 ako je:

a) $z = 2 + 3i$; **b)** $z = 1 - i$; **c)** $z = 1 + i$;
d) $z = 8 - 2i$; **e)** $z = \frac{1}{2} + i$; **f)** $z = \sqrt{2} - i$.

10. Koristeći formulu za kub binoma $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$ izračunaj z^3, ako je:

a) $z = 1 - i$; **b)** $z = 2 + 2i$; **c)** $z = \sqrt{3} + i$;
d) $z = 1 - i\sqrt{3}$; **e)** $z = 2 - 3i$; **f)** $z = 3 + 4i$.

11. Izračunaj:

a) i^{12}; **b)** i^{21}; **c)** i^{83};
d) i^{141}; **e)** i^{2002}; **f)** i^{4888}.

1.4. Kompleksno konjugirani brojevi. Dijeljenje u skupu $\mathbf{C}$

Promotrimo li par brojeva $z_1 = 3 - 2i$ i $z_2 = 3 + 2i$, uočavamo da su im realni dijelovi jednaki, a imaginarni dijelovi su im suprotni brojevi. Takve brojeve nazivamo **kompleksno konjugirani brojevi**. Dakle, ako je $z = a + bi$ bilo koji kompleksni broj, njemu kompleksno konjugirani broj je

$$\overline{z} = a - bi.$$

Primjer 1. Odredimo kompleksno konjugirane brojeve brojeva $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = 18i$, $z_3 = 7$.

▷ $\overline{z}_1 = 4 + 3i$, $\overline{z}_2 = -18i$, $\overline{z}_3 = 7$. ◁

Primjer 2. Izračunajmo $z + \overline{z}$ ako je $z = 8 - 13i$.

▷ $z + \overline{z} = (8 - 13i) + (8 + 13i) = 8 - 13i + 8 + 13i = 16$. Uočimo da je $16 = 2 \cdot 8 = 2 \cdot \operatorname{Re} z$. Dakle, zbroj dvaju međusobno kompleksno konjugiranih brojeva jednak je dvostrukom realnom dijelu tih brojeva. ◁

Kompleksno konjugiranje ima ova svojstva:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2,$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2.$$

Promotrimo što je umnožak dvaju kompleksno konjugiranih brojeva.

Primjer 3. Izračunaj umnoške i izvedi zaključak o predznaku umnoška:
a) $(5 - 8i)(5 + 8i)$; **b)** $(a + bi)(a - bi)$.

▷ **a)** $(5 - 8i)(5 + 8i) = 5^2 - (8i)^2 = 25 - 64i^2 = 25 - 64 \cdot (-1) = 25 + 64 = 89 > 0$;
b) $(a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 - b^2 \cdot (-1) = a^2 + b^2 \geqslant 0$.
Dakle, umnožak dvaju kompleksno konjugiranih brojeva je uvijek nenegativni broj, i posebno, ako su ti brojevi različiti od 0, njihov je umnožak pozitivni broj. ◁

Ovo ćemo svojstvo koristiti pri dijeljenju kompleksnih brojeva. Pokažimo na primjeru kako se dijele kompleksni brojevi.

Primjer 4. Izračunaj $\dfrac{z_1}{z_2}$ ako je $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 3 + 4i$.

▷ Imaginarne jedinice u nazivniku oslobodimo se tako da razlomak $\dfrac{z_1}{z_2}$ proširimo brojem $\overline{z}_2$. Novi nazivnik je tada $z_1 \cdot \overline{z}_2 = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$ realni broj.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{2 - i}{3 + 4i} = \frac{2 - i}{3 + 4i} \cdot \frac{3 - 4i}{3 - 4i} \\ &= \frac{(2 - i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{6 - 8i - 3i + 4i^2}{9 + 16} \\ &= \frac{6 - 11i - 4}{25} = \frac{2 - 11i}{25} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i.\end{aligned}$$ ◁

Zadaci 1.4

1. Odredi broj kompleksno konjugiran broju:

a) $7-3i$; **b)** $-14-5i$; **c)** $8+13i$; **d)** $-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}i$;
e) $2i$; **f)** $-18i$; **g)** 4; **h)** -12.5;
i) $\sqrt{2}-i$; **j)** $\sqrt{2}+i$; **k)** $1-\pi$; **l)** $\sqrt{3}-i\sqrt{2}$.

2. Izračunaj $\bar{z}+z$ i $\bar{z}-z$ ako je:
a) $z=2-3i$; **b)** $z=4+5i$; **c)** $z=-2.5-1.4i$;
d) $z=10$; **e)** $z=i$; **f)** $z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. Izračunaj:
a) $\frac{5+3i}{2i}$; **b)** $\frac{-10+i}{8i}$; **c)** $\frac{-7-2i}{3i}$;
d) $\frac{14-3i}{5i}$; **e)** $\frac{10}{i}$; **f)** $\frac{-12+i}{2i}$.

4. Izračunaj:
a) $\frac{2}{1-i}$; **b)** $\frac{4}{2+i}$; **c)** $\frac{5}{-2+3i}$; **d)** $\frac{1+2i}{3-2i}$; **e)** $\frac{-4+5i}{5-2i}$;
f) $\frac{8+10i}{1-i}$; **g)** $\frac{3+2i}{1+i}$; **h)** $\frac{4-i}{4+i}$; **i)** $\frac{5-i}{4-2i}$.

5. Izračunaj:
a) $\dfrac{\frac{1}{2}-i}{\frac{1}{2}+i}$; **b)** $\dfrac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}i}{\frac{1}{3}-\frac{3}{2}i}$; **c)** $\frac{1.2-0.3i}{1+0.2i}$.

6. Odredi realni i imaginarni dio sljedećih kompleksnih brojeva:
a) $\frac{8+3i}{4-3i}$; **b)** $\frac{12-i}{4+i}$; **c)** $\frac{5-3i}{5+3i}$.

7. Izračunaj:
a) $\frac{5}{i}-\frac{10}{3i}$; **b)** $\frac{11}{2i}+\frac{1}{1+i}$; **c)** $\frac{1}{1-i}+\frac{1}{1+i}$; **d)** $\frac{2-i}{2+i}-\frac{4}{3-i}$.

8. Izračunaj $z+\frac{1}{z}$ ako je:
a) $z=1-i$; **b)** $z=2+i$; **c)** $z=1+i$; **d)** $z=i$.

9. Izračunaj realni dio broja $\frac{2-3i}{(3+4i)(1+i)}$.

10. Odredi realni i imaginarni dio brojeva:
a) $\left(\frac{1}{3+4i}\right)^2$; **b)** $\left(\frac{1}{1+i}\right)^2$; **c)** $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$.