1. Skup realnih brojeva

1.1. Skup prirodnih i cijelih brojeva

U osnovnoj školi susreli smo se s raznim skupovima brojeva. Ovdje ćemo ponoviti što znamo o tim brojevima i naučiti neke nove činjenice o skupovima brojeva.

Skup prirodnih brojeva označavamo s $\mathbf{N}$ i zapisujemo

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Prirodne brojeve možemo zbrajati i množiti i rezultat tih operacija je uvijek prirodni broj. Razlika prirodnih brojeva ne mora uvijek biti prirodan broj. Naime, ako je umanjenik manji od umanjitelja, primjerice $3-7$, tada to oduzimanje nije izvedivo u skupu prirodnih brojeva. Stoga skup $\mathbf{N}$ proširujemo do skupa cijelih brojeva u kojem je i operacija oduzimanja uvijek izvediva.

Skup cijelih brojeva označavamo sa $\mathbf{Z}$ i vrijedi

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

U skupu $\mathbf{Z}$ operacija zbrajanja je asocijativna, komutativna, zbroj svakog cijelog broja s 0 je taj isti broj. Također, za svaki cijeli broj n postoji njemu suprotan broj $-n$ i zbroj dva međusobno suprotna broja je 0. Operacija množenja je asocijativna i komutativna i produkt svakog cijelog broja s 1 je taj isti broj. Također, vrijedi i distributivnost množenja prema zbrajanju, tj. za sve cijele brojeve a, b, c vrijedi

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

Ukoliko se u brojevnom izrazu (bez zagrada) pojavljuje više operacija, prvo se izvodi operacija množenja (i dijeljenja), a tek onda operacija zbrajanja (i oduzimanja).

PRIMJER 1.

Izračunajmo:

$$7 + 3 \cdot (2 - (2 \cdot (-14) - 3 \cdot (-18 - 4)) \cdot 2 - 5) + 100.$$

Sredimo prvo unutarnje zagrade.

$$\begin{aligned}
7 + 3 \cdot (2 - (2 \cdot (-14) - 3 \cdot (-18 - 4)) \cdot 2 - 5) + 100 \\
&= 7 + 3(2 - (-28 - 3 \cdot (-22)) \cdot 2 - 5) + 100 \\
&= 7 + 3(2 - (-28 + 66) \cdot 2 - 5) + 100 \\
&= 7 + 3(2 - 38 \cdot 2 - 5) + 100 \\
&= 7 + 3(2 - 76 - 5) + 100 \\
&= 7 + 3 \cdot (-79) + 100 \\
&= 7 - 237 + 100 \\
&= -130.
\end{aligned}$$

ZADACI 1.1.

1. Izračunaj:

a $14+(-22)+28$; b $-32+(-10)-21$; c $13-(-14)-1$;
d $39+(-24)-10$; e $-28+(-50)+(-75)$; f $-20-33-44$.

2. Izračunaj:

a $(-5)\cdot(14+(-17))$; b $2\cdot(-14+14)$; c $(-12+(-20))\cdot 7$;
d $(-11-22)\cdot(-22+33)$; e $(-12+40)\cdot(-3-2)$; f $(-125+5\cdot 15)\cdot(14-7\cdot 2)$.

3. Izračunaj:

a $441:(-9)+9$; b $-256:32-32\cdot(-2)$; c $48-48:(-8)$;
d $(48-48):(-8)$; e $165-165:11-1$; f $1001:(169:13)$.

4. Izračunaj primjenjujući svojstva množenja:

a $11\cdot 2\cdot 5$; b $37\cdot 15\cdot 2$; c $4\cdot 327\cdot 25$;
d $25\cdot 11\cdot 4\cdot 3$; e $8\cdot 7\cdot 75\cdot 10$; f $125\cdot 13\cdot 4\cdot 26$.

5. Koristeći svojstva zbrajanja i množenja, izračunaj na najbrži mogući način:

a $123+327+428+122$; b $1008+289+111+992$;
c $3\cdot 17+14\cdot 17-15\cdot 17$; d $34\cdot 21-20\cdot 21+21\cdot 86$.

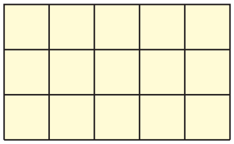
6. Izračunaj:

a $(3\cdot 18+6)\cdot(25\cdot 4-60)$; b $2\cdot(12-12\cdot(11\cdot 7-18\cdot 2))$;
c $14\cdot(18+2\cdot(14\cdot 2-(-10)\cdot 3))$; d $2\cdot(2\cdot(2\cdot(2-(-10))+10)-100)+100$.

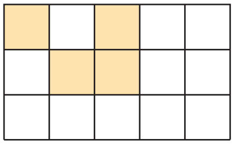
1.2. Skup racionalnih brojeva

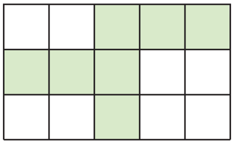
Uz proučavanje prirodnih i cijelih brojeva, vrlo rano se susrećemo s problemom dijeljenja neke cjeline na jednake dijelove.

Tako je, primjerice, pravokutnik na slici dolje podijeljen na 15 jednakih dijelova koje nazivamo petnaestine i označavamo s $\frac{1}{15}$.



Na slici su iscrtani dijelovi pravokutnika jednaki $\frac{4}{15}$, odnosno $\frac{7}{15}$ pravokutnika. Vidimo, dakle, kako se prirodno pojavljuje još jedna vrsta brojeva koje nazivamo razlomci ili racionalni brojevi.





Općenito, svaki broj oblika $\frac{a}{b}$ gdje su a i b cijeli brojevi, $b \neq 0$, naziva se racionalni broj, a skup svih takvih brojeva označavamo s $\mathbf{Q}$.

Skup racionalnih brojeva

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbf{Z},\ b \neq 0 \right\}.$$

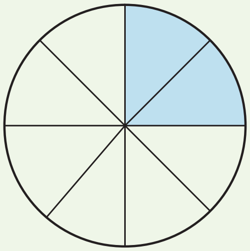
Uočimo da je svaki cijeli broj ujedno i razlomak, jer cijeli broj a možemo zapisati ovako:

$$a = \frac{a}{1}.$$

1.3. Jednakost racionalnih brojeva

PRIMJER 1.

Uočimo iscrtani dio kruga na slici. Možemo ga zapisati na dva načina: kao $\frac{1}{4}$, ali i kao $\frac{2}{8}$. Dakle, $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$.



Zamijetimo da je produkt brojnika prvog razlomka i nazivnika drugog jednak produktu nazivnika prvog i brojnika drugog razlomka. Ovo svojstvo je karakteristično te nam služi za definiciju jednakosti razlomaka.

Jednakost racionalnih brojeva

Dva racionalna broja $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ su **jednaka** ako je

$$ad = bc.$$

PRIMJER 2.

Dokažimo da je za svaki $x \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot x}{b \cdot x}$.

Unakrsnim množenjem dobivamo $a \cdot (b \cdot x) = b \cdot (a \cdot x)$ što je istinito budući da je množenje cijelih brojeva asocijativno i komutativno.

Kažemo da smo razlomak $\frac{ax}{bx}$ dobili **proširivanjem** razlomka $\frac{a}{b}$ brojem x. I obratno, razlomak $\frac{a}{b}$ dobili smo **skraćivanjem** razlomka $\frac{ax}{bx}$ brojem x.

PRIMJER 3.

Skratimo razlomak $\frac{126}{108}$.

Razlomak postepeno skraćujemo brojevima 2 i 9:

$$\frac{126}{108} = \frac{2 \cdot 63}{2 \cdot 54} = \frac{63}{54} = \frac{9 \cdot 7}{9 \cdot 6} = \frac{7}{6}.$$

PRIMJER 4.

Pokažimo da je $\frac{-3}{4} = \frac{3}{-4}$.

Proširimo li razlomak $\frac{-3}{4}$ s -1, dobit ćemo upravo razlomak $\frac{3}{-4}$.

ZADACI 1.3.

1. Napiši brojnik, odnosno nazivnik razlomka tako da dobiveni razlomci budu jednaki:

a $\frac{3}{5} = \frac{}{15}$; b $\frac{8}{-3} = \frac{}{-21}$; c $\frac{3}{20} = \frac{}{20a}$;

d $\frac{4}{7} = \frac{20}{}$; e $\frac{-8}{18} = \frac{-64}{}$; f $\frac{5}{7} = \frac{15x}{}$.

2. Skrati razlomke:

a $\frac{18}{12}$; b $\frac{321}{216}$; c $\frac{-1001}{39}$;

d $\frac{141414}{-196}$; e $\frac{25a}{140a}$; f $\frac{36ab}{28abc}$.

3. Jesu li jednaki razlomci:

a $\frac{9}{10}$ i $\frac{8}{9}$; b $\frac{11}{44}$ i $\frac{3}{12}$; c $\frac{1997}{1998}$ i $\frac{1998}{1999}$; d $\frac{-333}{7}$ i $\frac{666}{-14}$?

4. Dane razlomke svedi na najmanji zajednički nazivnik:

a $\frac{1}{3}$ i $\frac{3}{4}$; b $\frac{8}{5}$ i $\frac{21}{10}$; c $\frac{3}{8}$ i $\frac{7}{6}$;

d $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{3}{2}$; e $\frac{18}{11}$, $\frac{3}{22}$ i 3; f $\frac{1}{12}$, $\frac{5}{18}$ i $\frac{13}{8}$.

1.4. Zbrajanje racionalnih brojeva

PRIMJER 1.

Izračunajmo:

a) $\frac{3}{5}+\frac{8}{5}$; **b)** $\frac{5}{4}+\frac{1}{3}$.

a) $\frac{3}{5}$ i $\frac{8}{5}$ su razlomci s jednakim nazivnicima i oni se zbrajaju tako da se brojnici zbroje, a nazivnik prepiše, tj. $\frac{3}{5}+\frac{8}{5}=\frac{11}{5}$.

b) $\frac{5}{4}$ i $\frac{1}{3}$ nemaju jednake nazivnike pa ih prvo proširimo tako da su im nazivnici jednaki, tj. $\frac{5}{4}=\frac{5\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{15}{12}$, $\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{4}{12}$, pa je $\frac{5}{4}+\frac{1}{3}=\frac{15}{12}+\frac{4}{12}=\frac{17}{12}$.

Dakle, ako su $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ dva racionalna broja, pri zbrajanju prvo ih svodimo na zajednički nazivnik, tj. na nazivnik koji je višekratnik nazivnika i jednog i drugog razlomka. Na primjer, za zajednički nazivnik možemo uzeti broj $b\cdot d$. Tada je $\frac{a}{b}=\frac{ad}{bd}$ i $\frac{c}{d}=\frac{cb}{bd}$, te je konačno $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$.

Zbrajanje racionalnih brojeva

Ako su $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ racionalni brojevi, tada je

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}.$$

Uočimo da je bd samo jedan od beskonačno mnogo zajedničkih nazivnika brojeva $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$. Uobičajeno je pri zbrajanju tražiti najmanji zajednički nazivnik, tj. najmanji zajednički višekratnik nazivnika.

Tako na primjer, zbroj $\frac{1}{120}+\frac{7}{180}$ možemo računati prema gore navedenoj formuli:

$$\frac{1}{120}+\frac{7}{180}=\frac{1\cdot 180+7\cdot 120}{120\cdot 180}=\frac{180+840}{21\,600}=\frac{1020}{21\,600}=\frac{17}{360},$$

ali da smo odabrali najmanji zajednički nazivnik (a to je 360), račun bi bio nešto jednostavniji:

$$\frac{1}{120}+\frac{7}{180}=\frac{3}{360}+\frac{14}{360}=\frac{17}{360}.$$

Promotrimo bilo koji razlomak $r=\frac{a}{b}$. Tada za racionalan broj $r'=\frac{-a}{b}$ vrijedi

$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{a+(-a)}{b}=\frac{0}{b}=0,$$

tj. $r+r'=0$. Broj r' nazivamo **suprotan broj** broja r i označavamo s $-r$.

PRIMJER 2.

Odredimo suprotne brojeve od $\frac{14}{3}$, $\frac{-2}{17}$.

$$-\frac{14}{3}=\frac{-14}{3},\quad -\left(\frac{-2}{17}\right)=\frac{2}{17}.$$

Uz ovo svojstvo da za svaki racionalni broj postoji njemu suprotan broj, zbrajanje ima još neka istaknuta svojstva:

1. Zbrajanje je asocijativno, tj. za bilo koja tri racionalna broja r_1, r_2 i r_3 vrijedi
$$(r_1+r_2)+r_3=r_1+(r_2+r_3).$$
2. Zbrajanje je komutativno, tj.
$$r_1+r_2=r_2+r_1 \quad \text{za svaki} \quad r_1,\ r_2\in\mathbf{Q}.$$
3. Za svaki $r\in\mathbf{Q}$ vrijedi
$$r+0=r.$$

PRIMJER 3.

Koristeći svojstva zbrajanja izračunajmo dane izraze:

a) $\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)$; **b)** $\left(\frac{8}{5}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}$.

a) $\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}+\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{6}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{-2+1}{6}=\frac{-1}{6}=-\frac{1}{6}$,
pri čemu smo koristili komutativnost unutar zagrade, pa asocijativnost, te konačno definiciju zbrajanja.

b) $\left(\frac{8}{5}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{4}=\frac{8}{5}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{8}{5}+0=\frac{8}{5}$,
pri čemu smo koristili asocijativnost, zbrajanje suprotnih brojeva, te zbrajanje s nulom.

Primijetimo da ne spominjemo oduzimanje kao posebnu operaciju. Naime, razlika $r_1 - r_2$ se poistovjećuje sa zbrojem $r_1 + (-r_2)$, tj. oduzimanje se svodi na zbrajanje.

ZADACI 1.4.

1. Zbroji:

a $\frac{4}{11} + \frac{8}{11}$; b $\frac{14}{19} + \frac{18}{19}$; c $\frac{21}{5} + \frac{13}{5} + \frac{12}{5}$; d $\frac{22}{7} - \frac{11}{7} + \frac{2}{7}$.

2. Izračunaj:

a $1 + \frac{7}{8}$; b $2 - \frac{1}{4}$; c $1 + \frac{14}{19}$;

d $3 + \frac{1}{2}$; e $2 + \frac{3}{4}$; f $5 - \frac{11}{3}$.

3. Izračunaj:

a $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; b $\frac{2}{3} + \frac{1}{4}$; c $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$;

d $\frac{2}{5} + \frac{1}{3}$; e $\frac{11}{3} - \frac{3}{2}$; f $\frac{22}{5} - \frac{17}{3}$.

4. Izračunaj:

a $\left(\frac{3}{8} - \frac{5}{4}\right) - \left(\frac{3}{16} - \frac{1}{8}\right)$; b $\left(\frac{5}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{21}\right) - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{7}\right)$;

c $-\left(\frac{5}{2} - 1\right) + \left(\frac{15}{4} - 1\right) - \left(\frac{25}{9} - 2\right)$.

1.5. Množenje racionalnih brojeva

Umnožak dva racionalna broja je racionalni broj čiji je brojnik jednak umnošku brojnika faktora, a nazivnik je jednak umnošku nazivnika faktora. Ili ako zapišemo pomoću općih brojeva, imamo sljedeću formulu.

Množenje racionalnih brojeva

Ako su $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ racionalni brojevi, tada je

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Ako je $\frac{a}{b}$ razlomak različit od 0, tada je očito da za broj $\frac{b}{a}$ vrijedi

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Broj $\frac{b}{a}$ naziva se recipročan broj broja $\frac{a}{b}$ i označava s $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$.

PRIMJER 1.

Napišimo recipročne brojeve brojeva $\frac{3}{4}$, $\frac{-5}{8}$, 10, -1, $-\frac{4}{15}$.

$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}=\frac{4}{3}$, $\left(\frac{-5}{8}\right)^{-1}=\frac{8}{-5}=-\frac{8}{5}$, $(10)^{-1}=\left(\frac{10}{1}\right)^{-1}=\frac{1}{10}$, $(-1)^{-1}=-1$, $\left(-\frac{4}{15}\right)^{-1}=-\frac{15}{4}$.

Dijeljenje racionalnih brojeva definiramo pomoću recipročnih brojeva ovako: razlomak $\frac{a}{b}$ se dijeli s razlomkom $\frac{c}{d}$ tako da se $\frac{a}{b}$ pomnoži s recipročnim brojem od $\frac{c}{d}$, tj. imamo sljedeću formulu.

Dijeljenje racionalnih brojeva

Za svaka dva racionalna broja $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$, $\frac{c}{d}\neq 0$, vrijedi

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}.$$

Navedimo i svojstva množenja. Već smo spomenuli da za svaki racionalni broj različit od nule postoji recipročan broj.

Također, istaknimo da za svaki racionalni broj r vrijedi

$$r\cdot 1=r.$$

Nadalje, množenje je asocijativno, tj.

$$r_1\cdot(r_2\cdot r_3)=(r_1\cdot r_2)\cdot r_3,\quad \text{za sve } r_1,\ r_2,\ r_3\in\mathbf{Q};$$

komutativno, tj.

$$r_1\cdot r_2=r_2\cdot r_1,\quad \text{za sve } r_1,\ r_2\in\mathbf{Q}$$

i distributivno prema zbrajanju, tj.

$$r_1\cdot(r_2+r_3)=r_1\cdot r_2+r_1\cdot r_3,\quad \text{za sve } r_1,\ r_2,\ r_3\in\mathbf{Q}.$$

Množenje je operacija višeg stupnja od zbrajanja. Drugim riječima, ukoliko se u izrazu bez zagrada pojave zbrajanje i množenje, prvo će se izvršiti množenje, a zatim zbrajanje.

PRIMJER 2.

Izračunajmo:

a) $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{6}$;

b) $\dfrac{\frac{11}{15}\cdot\left(3-\frac{7}{4}\right)}{\frac{5}{4}-1:\frac{3}{2}}-\frac{1}{7}:\frac{1}{2}$.

a) Ovo je izraz bez zagrada i prvo se vrši množenje, pa tek zatim zbrajanje.

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{6}=\frac{3}{5}+\frac{2\cdot 7}{5\cdot 6}=\frac{3}{5}+\frac{7}{15}=\frac{9+7}{15}=\frac{16}{15}.$$

b) U ovom izrazu se pojavljuje zagrada koja se prva izračunava, a zatim se vrši množenje (i dijeljenje), te na kraju zbrajanje (i oduzimanje).

$$\frac{\frac{11}{15}\cdot\left(3-\frac{7}{4}\right)}{\frac{5}{4}-1:\frac{3}{2}}-\frac{1}{7}:\frac{1}{2}=\frac{\frac{11}{15}\cdot\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}-1\cdot\frac{2}{3}}-\frac{1}{7}\cdot 2=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{5}{4}-\frac{2}{3}}-\frac{2}{7}$$

$$=\frac{\frac{11}{12}}{\frac{7}{12}}-\frac{2}{7}=\frac{11\cdot 12}{12\cdot 7}-\frac{2}{7}=\frac{11}{7}-\frac{2}{7}=\frac{9}{7}.$$

Primijetimo da se u računu pojavio dvojni razlomak $\dfrac{\frac{11}{12}}{\frac{7}{12}}$ koji smo izračunali koristeći definiciju dijeljenja i množenja. Naime, vrijedi

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Uvedimo oznaku i za produkt nekoliko istih faktora. Ako je $r\in\mathbf{Q}$, $n\in\mathbf{N}$, tada ćemo s r^n označavati produkt $\underbrace{r\cdot r\cdot\ldots\cdot r}_{n\text{ puta}}$. Dogovorno se uzima da je $r^0=1$. Izraz r^n se naziva n-ta potencija broja r i potencije su predmet detaljnog proučavanja u 5. poglavlju.

ZADACI 1.5.

1. Pomnoži:

a $\frac{22}{35}\cdot\frac{49}{33}$; **b** $\frac{225}{18}\cdot\frac{27}{144}$; **c** $\frac{1800}{128}\cdot\frac{144}{810}$.

2. Pomnoži:

a $\left(-\frac{25}{7}\right)\cdot\frac{11}{125}$; **b** $\left(-\frac{30}{11}\right)\cdot\left(-\frac{44}{45}\right)$; **c** $\frac{121}{144}\cdot\left(-\frac{60}{77}\right)$.

3. Podijeli:

a $1:\frac{2}{3}$; **b** $-3:\frac{4}{7}$; **c** $\frac{12}{7}:\frac{36}{28}$;

d $\left(-\frac{11}{3}\right):\frac{22}{21}$; **e** $\left(-1\frac{1}{3}\right):4$; **f** $\left(-2\frac{1}{5}\right):\left(-\frac{33}{7}\right)$.

4. Izračunaj:

a $2 \cdot \left(\frac{2}{7} - 1\right) - 3\left(\frac{4}{3} + 1\right);$

b $3 \cdot \left(\frac{3}{4} + 2\right) + 2\left(-\frac{1}{2} - 1\right);$

c $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \left(3 - \frac{1}{2}\right);$

d $\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \cdot \left(2 + \frac{1}{2}\right).$

5. Izračunaj:

a $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot 24;$

b $\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right) : \frac{3}{25};$

c $1 - 1 : 7 + \frac{3}{7} - \frac{14}{3} \cdot \frac{16}{49};$

d $\left(1 - \frac{14}{5} \cdot \frac{25}{21}\right) \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2};$

e $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{9}\right)\right) \cdot \frac{27}{2};$

f $\left(\frac{7}{2} + \frac{1}{3}\right) : \frac{35}{42} + \frac{7}{42};$

g $\left(\frac{4}{9} - \frac{5}{4}\right) : \left(\frac{3}{16} + \frac{1}{8}\right).$

6. Izračunaj:

a $\dfrac{\frac{11}{3} - \frac{1}{3}}{\frac{25}{2} - \frac{7}{2}};$

b $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{\frac{23}{6} - \frac{1}{2}};$

c $\dfrac{\frac{13}{2} - \frac{8}{3}}{\frac{13}{2} + \frac{8}{3}} : \frac{46}{25};$

d $\dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4}} : \frac{39}{28}.$

7. Izračunaj:

a $\dfrac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} : \dfrac{\frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{5}} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12}\right);$

b $\dfrac{\frac{13}{21} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{7}\right) : \frac{18}{13} - 0.15}{\left(\frac{1}{3} + 0.5\right) : \frac{5}{2} + 0.2};$

c $\dfrac{3 - \frac{15}{22} \cdot \left(2 + \frac{1}{5}\right)}{\left(\frac{5}{6} + \frac{7}{10} - \frac{11}{15}\right) \cdot 1.875 + \frac{1}{4}};$

d $1 - \dfrac{1 + \frac{1}{1+2}}{2 + \frac{1}{1+3}} + \dfrac{2 + \frac{1}{3+4}}{3 + \frac{1}{3+6}};$

e $\dfrac{\left(1.87 - 1\frac{3}{25}\right) \cdot 1.2 + 1.25 + 1\frac{7}{18}}{1.4 : 0.01 - 50};$

f $\dfrac{7.5 - 0.028}{\frac{3}{4} - 0.36 : 0.6} - \left(\frac{1}{15} + \frac{3}{8} + 0.725\right) : 1\frac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{4.5 - 3\frac{4}{7}} \cdot \frac{65}{28};$

g $\left(\left(1 + \dfrac{1}{9 + \dfrac{1}{9 + \frac{1}{5}}}\right) : \frac{465}{419}\right) - \frac{1}{1995}.$

1.6. Uređaj u skupu Q

Uočimo da svaki racionalni broj možemo zapisati tako da mu je nazivnik pozitivan. Naime, ako je razlomak oblika $\frac{a}{-b}$, $a \in \mathbf{Z}$, $b > 0$, tada proširivanjem s (-1) dobivamo razlomak $\frac{-a}{b}$ kojemu je nazivnik pozitivni broj. Zato možemo pisati da je

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a \in \mathbf{Z},\ b \in \mathbf{N}\right\}.$$

Dva racionalna broja obično uspoređujemo ako su dani u obliku gdje je nazivnik pozitivni broj.

Uređaj na Q

Neka su $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d} \in \mathbf{Q}$, b, $d > 0$. Kažemo da je $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ako je $ad < bc$.

PRIMJER 1.

Usporedimo brojeve

a) $\frac{3}{4}$ i $\frac{-5}{-6}$; **b)** $\frac{10}{-13}$ i $\frac{-11}{14}$.

a) Prvo $\frac{-5}{-6}$ proširivanjem s -1 svedimo na razlomak s pozitivnim nazivnikom: $\frac{-5}{-6} = \frac{5}{6}$. Sada uspoređujemo $\frac{3}{4}$ i $\frac{5}{6}$. Kako je $3 \cdot 6 = 18 < 4 \cdot 5 = 20$, slijedi da je $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$.

b) Kako je $\frac{10}{-13} = \frac{-10}{13}$ i $(-10) \cdot 14 = -140 > 13 \cdot (-11) = -143$, slijedi da je $\frac{-10}{13} > \frac{-11}{14}$.

Racionalne brojeve koje možemo svesti na oblik u kojem su i brojnik i nazivnik pozitivni brojevi zovemo **pozitivni racionalni brojevi**, a racionalni brojevi koji u zapisu s pozitivnim nazivnikom imaju negativni brojnik nazivamo **negativni racionalni brojevi**.

PRIMJER 2.

Dokažimo da je aritmetička sredina $\frac{r_1 + r_2}{2}$ racionalnih brojeva r_1 i r_2 opet racionalni broj koji se nalazi između tih brojeva.

Neka su $r_1 = \frac{a}{b}$ i $r_2 = \frac{c}{d}$, a, $c \in \mathbf{Z}$, b, $d \in \mathbf{N}$. Tada je $\frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{ad + bc}{2bd}$ što je očito opet racionalni broj.

Ako je $r_1 \leqslant r_2$, tj. $ad \leqslant bc$, dokažimo da vrijedi

$$r_1 \leqslant \frac{r_1 + r_2}{2} \leqslant r_2.$$

Prema definiciji uspoređivanja brojeva $r_1 = \frac{a}{b}$ i $\frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{ad + bc}{2bd}$ treba provjeriti vrijedi li $a \cdot 2bd \leqslant b \cdot (ad + bc)$. Ovo je ekvivalentno s $2ad \leqslant ad + bc$ (podijelili smo s $b > 0$), tj. $ad \leqslant bc$. Zadnja nejednakost je istinita prema pretpostavci, pa je istinita i početna, tj. $r_1 \leqslant \frac{r_1 + r_2}{2}$. Analogno se dokazuje i druga nejednakost.

Ovim primjerom smo dokazali jedno vrlo važno svojstvo skupa $\mathbf{Q}$, koje glasi:

Gustoća skupa Q

Skup $\mathbf{Q}$ je **gust**, tj. između svaka dva racionalna broja postoji racionalni broj.

Primijetimo da ni skup $\mathbf{N}$ ni skup $\mathbf{Z}$ nisu imali ovo svojstvo, jer, na primjer, između dva cijela broja -2 i -1 ne postoji nijedan cijeli broj.

ZADACI 1.6.

1. Usporedi brojeve:

a $-\frac{3}{5}$ i $\frac{8}{15}$; b $\frac{21}{43}$ i $\frac{22}{41}$; c $\frac{-31}{20}$ i $\frac{30}{-29}$.

2. Poredaj po veličini brojeve od najmanjeg do najvećeg:

a $\frac{3}{7}, \frac{12}{7}, \frac{-4}{7}, \frac{18}{7}, \frac{25}{7}, 0$; b $-\frac{23}{11}, -\frac{111}{11}, \frac{-43}{11}, -1, -9$;

c $\frac{8}{3}, \frac{11}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}$; d $\frac{49}{111}, \frac{1}{3}, \frac{21}{37}, \frac{152}{333}$.

3. Napiši jedan racionalni broj koji se nalazi između racionalnih brojeva:

a 5 i 19; b $\frac{17}{8}$ i $\frac{21}{8}$; c $\frac{19}{15}$ i $\frac{4}{3}$;

d $-\frac{12}{7}$ i -1; e $-\frac{11}{9}$ i $-\frac{7}{9}$; f $-\frac{17}{21}$ i $-\frac{1}{3}$.

4. Napiši dva racionalna broja koji se nalaze između racionalnih brojeva:

a 3 i 4; b $\frac{1}{2}$ i 1; c $\frac{5}{3}$ i $\frac{7}{3}$;

d $\frac{8}{7}$ i $\frac{6}{5}$; e -10 i -9; f $-\frac{11}{3}$ i $-\frac{11}{5}$.

5. Dokaži ako je $r_1 > r_2$, r_1, $r_2 \in \mathbf{Q}$, da je tada $r_1 + r > r_2 + r$ za svaki $r \in \mathbf{Q}$.

6. Dokaži ako je $r_1 > r_2$, r_1, $r_2 \in \mathbf{Q}$, da je tada $r_1 \cdot r > r_2 \cdot r$ za svaki $r > 0$, $r \in \mathbf{Q}$.