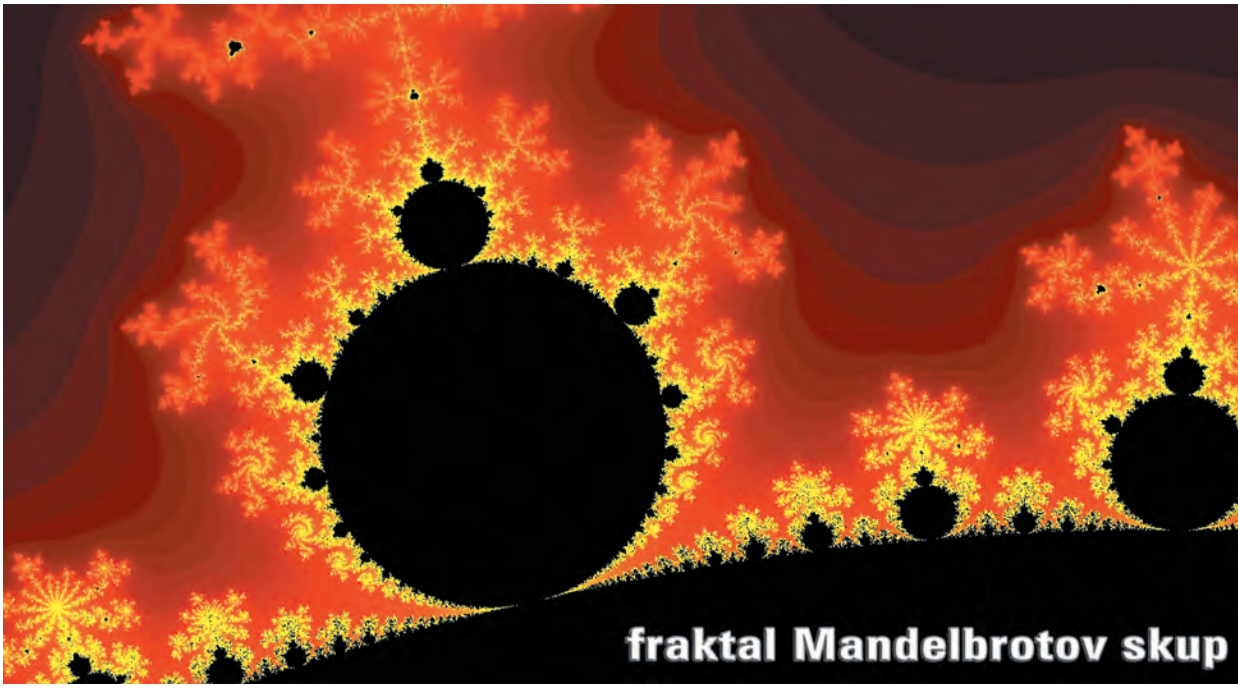


1. Skup kompleksnih brojeva

1.1. Skupovi brojeva

Pri prebrojavanju raznovrsnih objekata iz naše okoline koristimo **prirodne brojeve**. Tako ćemo reći da u razrednom odjeljenju ima 35 učenika, da u autobusu ima 52 sjedala, da stol ima 4 noge, da jedna godina ima 31 536 000 sekunda i sl.

Skup svih prirodnih brojeva označavamo slovom $\mathbf{N}$ i pišemo $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Tijekom dosadašnjeg školovanja naučili smo zbrajati i oduzimati, množiti i dijeliti prirodne brojeve. Pri zbrajanju prirodnih brojeva uočili smo ova svojstva:

1. Zbroj dvaju prirodnih brojeva je prirodan broj, tj.

$$\text{ako je } x \in \mathbf{N} \text{ i } y \in \mathbf{N}, \text{ tada je } x + y \in \mathbf{N}.$$

2. Zbrajanje je komutativna operacija, tj.

$$x + y = y + x \text{ za svaki } x,\ y \in \mathbf{N}.$$

3. Zbrajanje je asocijativna operacija, tj.

$$x + (y + z) = (x + y) + z \text{ za svaki } x,\ y,\ z \in \mathbf{N}.$$

Za množenje prirodnih brojeva vrijede slična svojstva:

1. Umnožak dvaju prirodnih brojeva je prirodan broj, tj.

$$\text{ako je } x \in \mathbf{N} \text{ i } y \in \mathbf{N}, \text{ tada je i } x \cdot y \in \mathbf{N}.$$

2. Množenje je komutativno, tj.

$$x \cdot y = y \cdot x \text{ za svaki } x,\ y \in \mathbf{N}.$$

3. Množenje je asocijativno, tj.

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \text{ za svaki } x,\ y,\ z \in \mathbf{N}.$$

Zbrajanje i množenje vezani su svojstvom distributivnosti koje glasi:

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \text{ za svaki } x,\ y,\ z \in \mathbf{N}.$$

Pri rješavanju problemskih zadataka obično se javljaju jednadžbe. Evo nekoliko primjera jednadžbi čiji su koeficijenti prirodni brojevi:

$$2 + x = 18, \quad 3x = 27, \quad 2x + 14 = 32.$$

Riješiti jednadžbu u skupu $\mathbf{N}$ znači odrediti sve prirodne brojeve x koji uvršteni u tu jednadžbu daju istinitu jednakost.

Tako je, na primjer, rješenje jednadžbe $2 + x = 18$ broj $x = 18 - 2 = 16$ jer uvrstimo li 16 u jednadžbu, dobivamo

$$\begin{aligned} 2 + 16 &= 18 \\ 18 &= 18, \end{aligned}$$

tj. dobili smo istinitu jednakost. Kažemo da je ova jednadžba **rješiva** u skupu $\mathbf{N}$.

Promotrimo jednadžbu $10+x=7$. Je li ona rješiva u skupu $\mathbf{N}$? Drugim riječima, postoji li prirodni broj x koji zbrojen s 10 daje broj 7? Odgovor je niječan. Ne postoji prirodni broj koji je rješenje jednadžbe $10+x=7$. Dakle, jednadžba $a+x=b$, a, $b\in\mathbf{N}$ nije uvijek rješiva u skupu prirodnih brojeva. Da bi takva jednadžba uvijek imala rješenje, skup $\mathbf{N}$ treba proširiti, tj. dopuniti ga nulom i negativnim cijelim brojevima. Tako dobivamo skup cijelih brojeva kojeg označavamo sa $\mathbf{Z}$, tj.

$$\mathbf{Z}=\{\ldots,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\ldots\}.$$

Vidimo da je $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}$.

U skupu $\mathbf{Z}$ jednadžba $10+x=7$ ima rješenje i ono glasi $x=7-10=-3$. Kažemo da je u skupu $\mathbf{Z}$ oduzimanje uvijek izvedivo. Pri ovom proširivanju računske operacije zbrajanje i množenje zadržavaju svoja svojstva. Opracije su komutativne i asocijativne, vrijedi i svojstvo distributivnosti, a zbroj, odnosno umnožak, dvaju cijelih brojeva je cijeli broj.

U skupu $\mathbf{Z}$ svaka je jednadžba $a+x=b$, a, $b\in\mathbf{Z}$ rješiva. Ali, postoje jednadžbe koje nisu rješive u $\mathbf{Z}$. Evo nekoliko primjera takvih jednadžbi:

$$9x=46,\qquad -5x+1=0,\qquad 2(x-1)=7.$$

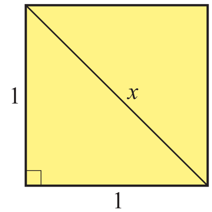
Promotrimo prvu od njih. Njezino bi rješenje bio cijeli broj koji pomnožen s 9 daje 46, ali takav očito ne postoji. Dakle, jednadžba oblika $ax=b$, a, $b\in\mathbf{Z}$ općenito nije rješiva u $\mathbf{Z}$. Zato se skup cijelih brojeva $\mathbf{Z}$ proširuje do skupa racionalnih brojeva $\mathbf{Q}$ koji sadrži omjere cijelih brojeva, tj.

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{a}{b}:\ a,b\in\mathbf{Z},\ b\neq 0\right\}.$$

U skupu $\mathbf{Q}$ jednadžba $9x=46$ ima rješenje i ono glasi $x=\dfrac{46}{9}$. Kažemo da je dijeljenje brojem različitim od 0 uvijek izvedivo u skupu $\mathbf{Q}$.

I pri ovom proširivanju operacije zbrajanja i množenja zadržavaju svoja svojstva, ali dobivaju i neka nova koja smo opisali u 1. razredu.

Je li postupak proširivanja skupova brojeva gotov? Nije, jer pokušamo li izračunati duljinu dijagonale jediničnog kvadrata, susrećemo se s kvadratnom jednadžbom. Naime, ako je x duljina dijagonale kvadrata, tada prema Pitagorinu poučku vrijedi



$$\begin{aligned}x^2&=1^2+1^2\\x^2&=1+1\\x^2&=2,\end{aligned}$$

tj. dobivamo kvadratnu jednadžbu $x^2=2$ čije rješenje očito postoji (to je duljina dijagonale kvadrata), a može se pokazati da to rješenje nije racionalan broj. Za rješenje te jednadžbe koristimo oznaku $x=\sqrt{2}$. Dakle, $\sqrt{2}$ nije racionalan broj već **iracionalan**. U osmom smo se razredu susreli s brojevima čiji decimalni zapis nije konačan niti sadrži neku skupinu znamenaka koja se periodički ponavlja. Racionalni i iracionalni brojevi zajedno čine **skup realnih brojeva**. Uz to vrijedi $\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

Pritom se sva svojstva operacija zbrajanja i množenja koja su vrijedila u skupu $\mathbf{Q}$ prenose i na skup $\mathbf{R}$.

Istaknimo ovdje sva ta svojstva.

Svojstva zbrajanja realnih brojeva	Svojstva množenja realnih brojeva
1. Zatvorenost zbrajanja Za svaki $x,\ y \in \mathbf{R}$ vrijedi $x + y \in \mathbf{R}$.	1. Zatvorenost množenja Za svaki $x,\ y \in \mathbf{R}$ vrijedi $x \cdot y \in \mathbf{R}$.
2. Asocijativnost zbrajanja Za svaki $x,\ y,\ z \in \mathbf{R}$ vrijedi $x + (y + z) = (x + y) + z$.	2. Asocijativnost množenja Za svaki $x,\ y,\ z \in \mathbf{R}$ vrijedi $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
3. Komutativnost zbrajanja Za svaki $x,\ y \in \mathbf{R}$ vrijedi $x + y = y + x$.	3. Komutativnost množenja Za svaki $x,\ y \in \mathbf{R}$ vrijedi $x \cdot y = y \cdot x$.
4. Postojanje nule Za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $x + 0 = x$.	4. Postojanje jedinice Za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi $x \cdot 1 = x$.
5. Postojanje suprotnog elementa Za svaki realni broj x postoji samo jedan realni broj $-x$ takav da je $x + (-x) = 0$.	5. Postojanje recipročnog elementa Za svaki realni broj x, različit od nule, postoji samo jedan realni broj x^{-1} takav da je $x \cdot x^{-1} = 1$. x^{-1} zovemo inverz ili recipročni broj broja x.
6. Distributivnost množenja prema zbrajanju Za svaki $x,\ y,\ z \in \mathbf{R}$ vrijedi $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.	

ZADACI 1.1.

1. Odredi koji je od danih brojeva cijeli:

a -1; **b** $\frac{44}{5}$; **c** π; **d** 241;

e -2003; **f** $1\frac{4}{9}$; **g** $3.7\dot{1}$; **h** 0.

2. Odredi koji je od danih brojeva racionalan:

a $-\frac{14}{227}$; **b** 0; **c** -351; **d** $\frac{141}{144}$;

e $\frac{\pi}{3}$; **f** $\sqrt{2} + 1$; **g** 821; **h** 37.21.

3. Odredi koji je od danih brojeva racionalan, a koji iracionalan:

a $-\frac{16}{225}$; **b** $2\frac{1}{9}$; **c** $-3.\dot{7}$; **d** $4\sqrt{3}$;

e -227; f 2π; g $4\sqrt{2}$; h 0.

4. Riješi jednadžbe i napiši kojem skupu brojeva pripada rješenje svake od njih:

a $120 - x = 26$; b $19 - 5x = 9$;
c $3(x - 45) + 37 = 49$; d $-471 + 2(5 + x) = 17$;
e $7(2x + 1) = 6(2 - x)$; f $0.6(x - 8) = 0.7 - 4.2$;
g $12x - 3(5 + x) = 2(x - 1) - 3x$; h $-30 - 3(x - 7) = 12x - 7(2x - 3)$.

5. Imaju li sljedeće jednadžbe rješenja u skupu $\mathbf{N}$?

a $4(5x+1)-3(6x-2)=5(x+5)$; b $\frac{x}{7} + \frac{x}{8} = 15$;
c $\frac{5x}{6} + 7 = \frac{3x}{4}$.

6. Imaju li sljedeće jednadžbe rješenja u skupu $\mathbf{Z}$?

a $10x - 3(x + 6) = 16 - 2(19 - 7x)$; b $5 - \frac{2x}{7} = -x$;
c $\frac{2}{7}(x - 2) = \frac{1}{11}(5x + 3)$.

7. Imaju li sljedeće jednadžbe rješenja u skupu $\mathbf{Q}$?

a $4(5x + 2) - 3(6x - 2) = 5(x + 5)$; b $\frac{x}{7} - \frac{x}{8} = 12$;
c $x^2 - 25 = 0$; d $x^2 - 3 = 0$.

8. Nađi sva rješenja jednadžbe $(x - 3)(x + 12) = 0$ u skupu

a prirodnih brojeva; b cijelih brojeva.

9. Je li jednadžba $x^2 = -1$ rješiva u skupu $\mathbf{R}$?

1.2. Skup kompleksnih brojeva

Proučimo posljednji zadatak prethodnog poglavlja:

Je li jednadžba $x^2 = -1$ rješiva u skupu $\mathbf{R}$?

Drugim riječima, postoji li realni broj x koji kvadriran daje negativan broj? Poznavajući svojstva kvadriranja, znamo da je kvadrat realnog broja ili pozitivan ili 0, tj. nikad nije negativan. Dakle, u skupu $\mathbf{R}$ jednadžba $x^2 = -1$ nema rješenja.

Kao i nekoliko puta dosad, prilazimo proširivanju promatranog skupa brojeva na veći skup u kojem će promatrana jednadžba imati rješenje, uz očuvanje svojstava zbrajanja i množenja.

Označimo s i rješenje jednadžbe $x^2 = -1$. Broj i zovemo imaginarna jedinica i za njega vrijedi $i^2 = -1$, tj. $i = \sqrt{-1}$.

Imaginarna jedinica

Imaginarna jedinica je broj i za koji vrijedi $i^2 = -1$.

Skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ proširujemo do novog skupa kojeg nazivamo **skup kompleksnih brojeva** i označavamo s $\mathbf{C}$. Skup $\mathbf{C}$ sadrži sve realne brojeve, zatim rješenje jednadžbe $x^2 = -1$, tj. sadrži broj i, ali i brojeve $a + i$, bi, $a + bi$ gdje su a i $b \in \mathbf{R}$, jer zbrajanje i množenje moraju biti izvedivi u skupu $\mathbf{C}$. Ukratko, skup kompleksnih brojeva je skup brojeva oblika $a + bi$, gdje su a i b realni brojevi.

Skup kompleksnih brojeva

$$\mathbf{C} = \{a + bi : \ a, \ b \in \mathbf{R}\}.$$

Brojeve oblika bi, gdje je $b \in \mathbf{R}$ zovemo **imaginarni** brojevi.

PRIMJER 1.

Zapišimo brojeve $\sqrt{-16}$, $\sqrt{-\frac{25}{9}}$, $\sqrt{-0.64}$, $\sqrt{-7}$ kao imaginarne brojeve.

$$\sqrt{-16} = 4i, \qquad \sqrt{-\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}i,$$
$$\sqrt{-0.64} = 0.8i, \qquad \sqrt{-7} = i\sqrt{7}.$$

Ako je kompleksni broj z oblika

$$z = a + bi, \quad a, \ b \in \mathbf{R},$$

tada broj a zovemo **realni dio** broja z i pišemo $a = \operatorname{Re} z$, a b zovemo **imaginarni dio** broja z i pišemo $b = \operatorname{Im} z$.

imaginarna jedinica

$$z = a + bi$$

realni dio broja z

imaginarni dio broja z

PRIMJER 2.

Odredimo realni i imaginarni dio kompleksnih brojeva $4 + 5i$, $-7 - 12i$, $\frac{3}{7}i$, -18.

$$\operatorname{Re}(4 + 5i) = 4, \ \operatorname{Im}(4 + 5i) = 5; \qquad \operatorname{Re}(-7 - 12i) = -7, \ \operatorname{Im}(-7 - 12i) = -12;$$
$$\operatorname{Re}\left(\frac{3}{7}i\right) = 0, \ \operatorname{Im}\left(\frac{3}{7}i\right) = \frac{3}{7}; \qquad \operatorname{Re}(18) = 18, \ \operatorname{Im}(18) = 0.$$

Dva su kompleksna broja **jednaka** ako i samo ako su im jednaki i realni i imaginarni dijelovi.

Dakle, ako su $z_1 = a_1 + b_1 i$ i $z_2 = a_2 + b_2 i$ dva kompleksna broja, oni su jednaki ako i samo ako vrijedi

$$a_1 = a_2 \quad \text{i} \quad b_1 = b_2.$$

PRIMJER 3.

Odredimo realne brojeve p i q tako da su kompleksni brojevi z_1 i z_2 jednaki, ako je

a) $z_1 = -2 + pi,\ z_2 = q + \frac{3}{2}i;$ **b)** $z_1 = 1 + (2p+1)i,\ z_2 = (p+q) - qi.$

a) Iz definicije jednakosti slijedi da je $-2 = q$ i $p = \frac{3}{2}$.

b) Iz definicije jednakosti slijedi da je $1 = p + q$ i $2p + 1 = -q$. Ovo je sustav s dvjema nepoznanicama p i q koji riješimo supstitucijom tako da iz druge jednadžbe izrazimo $q = -2p - 1$ i uvrstimo u prvu jednadžbu: $1 = p + q$, $1 = p + (-2p - 1)$, $1 = p - 2p - 1$, $1 = -p - 1$, $p = -1 - 1$, $p = -2$. Sad je $q = -2p - 1 = -2(-2) - 1 = 4 - 1 = 3$.

ZADACI 1.2.

1. Zapiši pomoću imaginarne jedinice:

a $\sqrt{-49}$; b $\sqrt{-100}$; c $\sqrt{-144}$; d $\sqrt{-\frac{25}{4}}$;
e $\sqrt{-\frac{100}{81}}$; f $\sqrt{-0.36}$; g $\sqrt{-1.69}$; h $\sqrt{-0.04}$;
i $\sqrt{-2}$; j $\sqrt{-5}$; k $\sqrt{-\frac{1}{3}}$; l $\sqrt{-\frac{4}{7}}$.

2. Odredi realni i imaginarni dio danih brojeva:

a $z = 5 + 14i$; b $z = -2 + 18i$; c $z = 13 - 7i$; d $z = -4 - 5i$;
e $z = 3$; f $z = -5$; g $z = 8i$; h $z = -14i$;
i $z = i\sqrt{2}$; j $z = 0$; k $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$; l $z = 1 + \sqrt{3} + i\sqrt{5}$.

3. Koliki mora biti broj m da bi kompleksni brojevi z_1 i z_2 bili jednaki?

a $z_1 = m + 4i,\ z_2 = -3 + 4i$; b $z_1 = (2 - m) + 8i,\ z_2 = 14 + 8i$;
c $z_1 = 32 - 7mi,\ z_2 = 32 + 25i$.

4. Odredi realne brojeve x i y tako da kompleksni brojevi z_1 i z_2 budu jednaki:

a $z_1 = x + 3i,\ z_2 = 7 + yi$; b $z_1 = 1 - x + 5i,\ z_2 = 18 - yi$;
c $z_1 = 2 + 3x + 18i,\ z_2 = 20 + (7 - y)i$; d $z_1 = 10 + (5 - x)i,\ z_2 = 2y - 4 - 2i$.

5. Odredi realne brojeve x i y tako da kompleksni brojevi z_1 i z_2 budu jednaki:

a $z_1 = (2 + x) - 3i,\ z_2 = y + (1 - x)i$; b $z_1 = (3 + 2x) + yi,\ z_2 = 2 + y + (x - 1)i$;
c $z_1 = (5x - y) + (2 - x)i,\ z_2 = 18 - 7yi$; d $z_1 = (x + y) - (x - y)i,\ z_2 = 20 - 4i$.

6. Odredi realne brojeve a i b iz jednadžbi:

a $3a + 7i = 21 - 49bi$; b $(a + b) - 18i = 2 - ai$;
c $a + 2i - 78 + 3bi = 2$; d $a + b + 6i - 14 = 4 + 4ib$.

1.3. Zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva

U svim dosad promatranim proširenjima skupova brojeva računske operacije zbrajanja i množenja sačuvale su svoja osnovna svojstva. Tako će biti i sada. Dakle, u skupu kompleksnih brojeva zbrajanje i množenje je komutativno i asocijativno, te je množenje distributivno obzirom na zbrajanje. Uz to, vrijedi $z+0=z$ i $z\cdot 1=z$ za svaki kompleksni broj z. Svaki kompleksni broj ima svoj suprotan broj, a ako je uz to broj različit od nule, tada ima i svoj inverz.

PRIMJER 1.

Zbrojimo brojeve $z_1=5+16i$ i $z_2=8-12i$.

$$\begin{aligned}z_1+z_2&=(5+16i)+(8-12i)\\&=5+16i+8-12i=(5+8)+(16i-12i)\\&=13+4i.\end{aligned}$$

Dakle, dva kompleksna broja zbrajamo tako da posebno zbrojimo njihove realne dijelove, a posebno imaginarne dijelove. Drugim riječima, ako su $z_1=a_1+b_1i$ i $z_2=a_2+b_2i$ dva kompleksna broja, tada je $z_1+z_2=a_1+a_2+(b_1+b_2)i$.

PRIMJER 2.

Pomnožimo brojeve $z_1=3+4i$ i $z_2=2-3i$.

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2&=(3+4i)(2-3i)=3\cdot 2-3\cdot 3i+4i\cdot 2-4i\cdot 3i\\&=6-9i+8i-12i^2=6-9i+8i-12\cdot(-1)\\&=6+12+(-9i+8i)\\&=18-i.\end{aligned}$$

Dakle, dva kompleksna broja $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ množimo kao što množimo dva binoma uz uvažavanje svojstva imaginarne jedinice da je $i^2=-1$, te dobivamo $z_1\cdot z_2=a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2+(a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1)i$.

Zbrajanje i množenje u $\mathbf{C}$

Ako su $z_1=a_1+b_1i$ i $z_2=a_2+b_2i$ dva kompleksna broja, tada vrijedi

$$\begin{aligned}z_1+z_2&=a_1+a_2+(b_1+b_2)i,\\z_1\cdot z_2&=a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2+(a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1)i.\end{aligned}$$

PRIMJER 3.

Oduzmimo brojeve $z_1 = 3 - 4i$ i $z_2 = 5 - 8i$.

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (3-4i) - (5-8i) = 3 - 4i - 5 + 8i \\ &= (3-5) + (-4i + 8i) \\ &= -2 + 4i. \end{aligned}$$

PRIMJER 4.

Izračunajmo $(2z_1 - z_2)(z_1 + 3z_2)$ ako su $z_1 = 1 + 3i$ i $z_2 = 2 - 4i$.

Prvo izračunamo vrijednost svake zagrade posebno.

$$\begin{aligned} 2z_1 - z_2 &= 2(1+3i) - (2-4i) = 2 + 6i - 2 + 4i = 10i, \\ z_1 + 3z_2 &= (1+3i) + 3(2-4i) = 1 + 3i + 6 - 12i = 7 - 9i. \end{aligned}$$

Sad je

$$\begin{aligned} (2z_1 - z_2)(z_1 + 3z_2) &= 10i(7-9i) = 70i - 90i^2 \\ &= 70i - 90(-1) = 90 + 70i. \end{aligned}$$

PRIMJER 5.

Izračunajmo z^2 ako je $z = 5 + 8i$.

Zadatak rješavamo uporabom formule za kvadrat binoma: $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

$$\begin{aligned} z^2 &= (5+8i)^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 8i + (8i)^2 = 25 + 80i + 64i^2 \\ &= 25 + 80i - 64 = -39 + 80i. \end{aligned}$$

PRIMJER 6.

Popunimo tablicu:

Potencija broja i	i	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8	i^9
Rezultat									

Što primjećujemo?

Lako izračunamo da je $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$, $i^7 = i^4 \cdot i^3 = i^3 = -i$, $i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$, $i^9 = i^8 \cdot i = i$, pa ispunjena tablica izgleda ovako:

Potencija broja i	i	i^2	i^3	i^4	i^5	i^6	i^7	i^8	i^9
Rezultat	i	-1	$-i$	1	i	-1	$-i$	1	i

Vidimo da se skupina rezultata i, -1, $-i$, 1 ponavlja. Dakle, svaka se četiri koraka pojavljuje rezultat i, tj. potencije i, i^5, i^9, i^{13}, i^{17}, ... jednake su i. Uočimo da eksponenti 1, 5, 9, 13, 17 pri dijeljenju s 4 daju ostatak 1 što je upravo eksponent od i.

Rezultat -1 dobit ćemo kod potencija i^2, i^6, i^{10}, i^{14}, i^{18} itd. Eksponenti 2, 6, 10, 14, 18 pri dijeljenju s 4 daju ostatak 2, što je upravo eksponent potencije i^2 koja daje rezultat -1.

Rezultat $-i$ dobit ćemo kod potencija i^3, i^7, i^{11}, i^{15}, i^{19} itd. Eksponenti 3, 7, 11, 15, 19 pri dijeljenju s 4 daju ostatak 3, što je upravo eksponent potencije i^3 čija je vrijednost $-i$.

Slično, rezultat 1 dobivamo kod onih potencija čiji su eksponenti djeljivi s 4.

Dakle, potencije broja i su brojevi i, -1, $-i$, 1 i to prema ovom pravilu: ako je ostatak pri dijeljenju eksponenta s 4 jednak 1, rezultat potenciranja je i; ako je ostatak 2, rezultat je -1; ako je ostatak 3, rezultat je $-i$; ako je ostatak 0, rezultat je 1.

To zapisujemo ovako

$$i^{4k+1} = i, \qquad i^{4k+2} = -1,$$
$$i^{4k+3} = -i, \qquad i^{4k} = 1.$$

Tako je, na primjer, $i^{99} = -i$ jer je $99 : 4 = 24$ i ostatak 3.

ZADACI 1.3.

1. Izračunaj:

a $(3-4i)+(5+18i)$; **b** $(2-17i)+(5-7i)$; **c** $(2.7+1.8i)+(-8-4.2i)$;

d $(0.1-1.22i)+(-2.5+1.7i)$; **e** $\left(\frac{1}{10}-\frac{5}{2}i\right)+\left(-\frac{7}{10}+\frac{11}{2}i\right)$; **f** $(3\sqrt{2}-4i\sqrt{3})+(7\sqrt{2}+11i\sqrt{3})$.

2. Izračunaj z_1+z_2, z_1-z_2 ako je

a $z_1=3-4i$, $z_2=4+3i$; **b** $z_1=5+6i$, $z_2=-4-7i$; **c** $z_1=10-11i$, $z_2=21+14i$;

d $z_1=-2-18i$, $z_2=-3-21i$; **e** $z_1=23+3i$, $z_2=4-51i$; **f** $z_1=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$, $z_2=-\frac{5}{2}-\frac{9}{2}i$;

g $z_1=-\frac{4}{5}-\frac{1}{3}i$, $z_2=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}i$; **h** $z_1=2.3-4.5i$, $z_2=0.1+1.4i$; **i** $z_1=\sqrt{3}+\sqrt{2}i$, $z_2=7\sqrt{3}-18\sqrt{2}i$.

3. Izračunaj $2z_1-3z_2$, $\frac{1}{2}z_1+\frac{3}{2}z_2$ ako je

a $z_1=5+6i$, $z_2=1-i$; **b** $z_1=i$, $z_2=14+15i$; **c** $z_1=31-45i$, $z_2=-11-21i$;

d $z_1=0.5+4.1i$, $z_2=-2.7+4i$; **e** $z_1=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$, $z_2=-\frac{5}{2}+i$; **f** $z_1=\frac{2}{3}+\frac{3}{4}i$, $z_2=-\frac{1}{3}-\frac{7}{4}i$.

4. Ako je $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 5 + 7i$, izračunaj:

a z_1+z_2; b z_1-z_2; c $2z_1$; d $2z_1+z_2$;
e $3z_1+4z_2$; f $-3z_2$; g z_1-3z_2; h $5z_1-10z_2$;
i $\frac{1}{2}z_2$; j $\frac{1}{2}z_1+\frac{3}{2}z_2$; k $\frac{3}{4}z_1-\frac{1}{3}z_2$; l $0.1z_1+2.2z_2$.

5. Ako je $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 5 + 3i$, $z_3 = -2 - 5i$, izračunaj:

a $z_1+z_2+z_3$; b $3z_1-z_2-z_3$; c $8z_1+10z_2+2z_3$; d $4z_1-2z_2+7z_3$;
e $z_1-2z_2+\frac{1}{3}z_3$; f $\frac{1}{2}z_1+\frac{4}{3}z_2-\frac{1}{6}z_3$; g $\frac{5}{8}z_1-\frac{11}{4}z_2+\frac{1}{2}z_3$; h $2.1z_1+5.3z_2-1.8z_3$;
i $0.01z_1-1.05z_2+2.48z_3$.

6. Izračunaj:

a $12(4-7i)$; b $-3(21+12i)$; c $(2-i)(2+i)$; d $(9-13i)(9+13i)$;
e $(7-2i)(8+4i)$; f $(2+i)(3-i)$; g $(3-2i)(-5-4i)$; h $(-8-4i)(-2-i)$.

7. Izračunaj $z \cdot w$ ako je:

a $z = 3 - 2i$, $w = 3 + 2i$; b $z = 10 + 12i$, $w = -8 - 3i$;
c $z = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}i$, $w = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}i$; d $z = \sqrt{3} + \sqrt{5}i$, $w = 7\sqrt{3} - 4\sqrt{5}i$.

8. Izračunaj:

a $(2-i)(1+2i)(3-4i)$; b $(1+i)(2+i)(-3+i)$.

9. Ako je $z_1 = 3 - 4i$, $z_2 = 2 + 5i$, izračunaj:

a $z_1 \cdot z_2$; b $z_1 + z_1 \cdot z_2$; c $1 - z_1 \cdot z_2$; d $2+11i-z_1 \cdot z_2$; e z_1^2;
f z_2^2; g $z_1-z_2+z_1 \cdot z_2$; h $(z_1+z_2)(z_1-z_2)$.

10. Izračunaj z^2 ako je:

a $z = 2 + 3i$; b $z = 1 - i$; c $z = 1 + i$;
d $z = 8 - 2i$; e $z = \frac{1}{2} + i$; f $z = \sqrt{2} - i$.

11. Izračunaj $z^2 - 3z + 5$ ako je:

a $z = 3 + 4i$; b $z = 1 + i$; c $z = 1 + \sqrt{2}i$.

12. Koristeći formulu za kub binoma $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$ izračunaj z^3, ako je:

a $z = 1 - i$; b $z = 2 + 2i$; c $z = \sqrt{3} + i$;
d $z = 1 - i\sqrt{3}$; e $z = 2 - 3i$; f $z = 3 + 4i$.

13. Izračunaj:

a i^{12}; b i^{21}; c i^{83};
d i^{141}; e i^{2002}; f i^{4888}.

14. Izračunaj:

a $i^2+i^4+i^6+i^8+i^{10}$; b $1-i+i^2-i^3$; c $i^{100}+i^{101}+i^{102}+i^{103}$;
d $i^{57}+i^{59}+i^{61}$; e $(1+i^{41})(1+i^{91})$; f $(i^{55}-i^{78})^2$.

15. Izračunaj koliko je $(1+i)^2$, $(1+i)^4$, $(1+i)^6$, $(1+i)^{100}$, $(1+i)^{101}$.

1.4. Kompleksno konjugirani brojevi. Dijeljenje u skupu C

Promotrimo li par brojeva $z_1 = 3-2i$ i $z_2 = 3+2i$, uočavamo da su im realni dijelovi jednaki, a imaginarni su im dijelovi suprotni brojevi. Takve brojeve nazivamo **kompleksno konjugirani brojevi**. Dakle, ako je $z = a + bi$ bilo koji kompleksni broj, njemu kompleksno konjugiran broj je

$$\bar{z} = a - bi.$$

PRIMJER 1.

Odredimo kompleksno konjugirane brojeve brojeva $z_1 = 4 - 3i$, $z_2 = 18i$, $z_3 = 7$.

$\bar{z}_1 = 4 + 3i$, $\bar{z}_2 = -18i$, $\bar{z}_3 = 7$.

PRIMJER 2.

Izračunajmo $z + \bar{z}$ ako je $z = 8 - 13i$.

$z + \bar{z} = (8 - 13i) + (8 + 13i) = 8 - 13i + 8 + 13i = 16$. Uočimo da je $16 = 2 \cdot 8 = 2 \cdot \operatorname{Re} z$. Dakle, zbroj dvaju međusobno kompleksno konjugiranih brojeva jednak je dvostrukom realnom dijelu tih brojeva.

Kompleksno konjugiranje ima ova svojstva:

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2. \end{aligned}$$

Dokažimo prvo svojstvo:
Ako je $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, tada je

$$\begin{aligned} \overline{z_1 + z_2} &= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i \\ &= a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \end{aligned}$$

Analogno se dokazuje i drugo svojstvo.

Promotrimo što je umnožak dvaju kompleksno konjugiranih brojeva.

PRIMJER 3.

Izračunajmo umnoške i izvedimo zaključak o predznaku umnoška:

a) $(5-8i)(5+8i)$; **b)** $(a+bi)(a-bi)$.

a) $(5-8i)(5+8i)=5^2-(8i)^2=25-64i^2=25-64\cdot(-1)=25+64=89>0$;

b) $(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2-b^2i^2=a^2-b^2\cdot(-1)=a^2+b^2\geqslant 0$.

Dakle, umnožak dvaju kompleksno konjugiranih brojeva je uvijek nenegativan broj, i posebno, ako su ti brojevi različiti od 0, njihov je umnožak pozitivan broj.

Ovo ćemo svojstvo koristiti pri dijeljenju kompleksnih brojeva. Pokažimo na primjeru kako se dijele kompleksni brojevi.

PRIMJER 4.

Izračunajmo $\dfrac{z_1}{z_2}$ ako je $z_1=2-i$, $z_2=3+4i$.

Imaginarne se jedinice u nazivniku oslobodimo tako da razlomak $\dfrac{z_1}{z_2}$ proširimo brojem $\overline{z}_2$. Novi je nazivnik tada $z_1\cdot\overline{z}_2=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ realan broj.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2}&=\frac{2-i}{3+4i}=\frac{2-i}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i}\\&=\frac{(2-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{6-8i-3i+4i^2}{9+16}\\&=\frac{6-11i-4}{25}=\frac{2-11i}{25}=\frac{2}{25}-\frac{11}{25}i.\end{aligned}$$

ZADACI 1.4.

1. Odredi broj kompleksno konjugiran broju:

a $7-3i$; **b** $-14-5i$; **c** $8+13i$; **d** $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{3}i$;

e $2i$; **f** $-18i$; **g** 4 ; **h** -12.5 ;

i $\sqrt{2}-i$; **j** $\sqrt{2}+i$; **k** $1-\pi$; **l** $\sqrt{3}-i\sqrt{2}$.

2. Izračunaj $\overline{z}+z$ i $\overline{z}-z$ ako je:

a $z=2-3i$; **b** $z=4+5i$; **c** $z=-2.5-1.4i$;

d $z=10$; **e** $z=i$; **f** $z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. Na brojevima $z_1=3-4i$ i $z_2=-2+3i$ pokaži da vrijedi svojstvo $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z}_1\cdot\overline{z}_2$.

4. Izračunaj:

a $\frac{5+3i}{2i}$; b $\frac{-10+i}{8i}$; c $\frac{-7-2i}{3i}$;
d $\frac{14-3i}{5i}$; e $\frac{10}{i}$; f $\frac{-12+i}{2i}$.

5. Izračunaj:

a $\frac{2}{1-i}$; b $\frac{4}{2+i}$; c $\frac{5}{-2+3i}$; d $\frac{1+2i}{3-2i}$; e $\frac{-4+5i}{5-2i}$;
f $\frac{8+10i}{1-i}$; g $\frac{3+2i}{1+i}$; h $\frac{4-i}{4+i}$; i $\frac{5-i}{4-2i}$.

6. Izračunaj:

a $\frac{\frac{1}{2}-i}{\frac{1}{2}+i}$; b $\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}i}{\frac{1}{3}-\frac{3}{2}i}$; c $\frac{1.2-0.3i}{1+0.2i}$.

7. Odredi realni i imaginarni dio sljedećih kompleksnih brojeva:

a $\frac{8+3i}{4-3i}$; b $\frac{12-i}{4+i}$; c $\frac{5-3i}{5+3i}$.

8. Izračunaj:

a $\frac{5}{i}-\frac{10}{3i}$; b $\frac{11}{2i}+\frac{1}{1+i}$; c $\frac{1}{1-i}+\frac{1}{1+i}$; d $\frac{2-i}{2+i}-\frac{4}{3-i}$.

9. Izračunaj $z+\frac{1}{z}$ ako je:

a $z=1-i$; b $z=2+i$; c $z=1+i$; d $z=i$.

10. Izračunaj realni dio broja $\frac{2-3i}{(3+4i)(1+i)}$.

11. Izračunaj imaginarni dio broja $\frac{(3-4i)(1+i)}{2+3i}$.

12. Odredi realni i imaginarni dio brojeva:

a $\left(\frac{1}{3+4i}\right)^2$; b $\left(\frac{1}{1+i}\right)^2$; c $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$. d $\left(\frac{1}{1+\sqrt{3}i}\right)^3$.

13. Izračunaj:

a $\frac{i^{45}-i^{56}}{2+i}$; b $\frac{i^{2007}-i^{2008}}{i^{2009}-i^{2010}}$; c $\left(i^{201}-\frac{i^{306}}{i^{307}}\right)^{402}$; d $\left(\frac{i^{78}-i^{87}}{i^{98}-i^{101}}\right)^2$;
e $\left(\frac{2}{1-\sqrt{3}i}\right)^{28}$; f $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{2008}$; g $\left(\frac{1-i^{81}}{1+i^{73}}\right)^{103}$; h $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{1001}$.

1.5. Apsolutna vrijednost kompleksnog broja. Kompleksna ravnina

Kao što smo vidjeli u prethodnoj temi, umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva je uvijek nenegativan realan broj, tj. ako je $z = a + bi$, imamo

$$z\bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 \geqslant 0.$$

Apsolutna vrijednost ili modul kompleksnog broja z definira se kao kvadratni korijen iz broja $a^2 + b^2$.

Apsolutna vrijednost ili **modul** kompleksnog broja z je broj

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Drugim riječima, apsolutna vrijednost broja z jednaka je kvadratnom korijenu zbroja kvadrata njegovog realnog i imaginarnog dijela, tj.

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}.$$

PRIMJER 1.

Izračunajmo apsolutnu vrijednost brojeva:

a) $z = -3 + 4i$; **b)** $z = 8i$; **c)** $z = -12$.

a) Budući da je $\operatorname{Re} z = -3$, $\operatorname{Im} z = 4$, vrijedi $|z| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

b) Budući da je $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = 8$, vrijedi $|z| = \sqrt{0^2 + 8^2} = 8$.

c) Iz $\operatorname{Re} z = -12$ i $\operatorname{Im} z = 0$ slijedi $|z| = \sqrt{(-12)^2 + 0^2} = 12$.

PRIMJER 2.

Provjerimo da za brojeve $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = 1 - i$ vrijedi:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \qquad \text{i} \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Izračunajmo umnožak $z_1 \cdot z_2$, količnik $\dfrac{z_1}{z_2}$ i odgovarajuće apsolutne vrijednosti.

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i)(1 - i) = 3 - 3i + 4i - 4i^2 = 7 + i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 + 4i}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i} = \frac{3 + 3i + 4i + 4i^2}{1^2 + 1^2} = \frac{-1 + 7i}{2},$$

$$|z_1| = \sqrt{3^2+4^2} = 5, \quad |z_2| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2},$$
$$|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Sad je $|z_1| \cdot |z_2| = 5\sqrt{2} = |z_1 \cdot z_2|$ i $\dfrac{|z_1|}{|z_2|} = \dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2} = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$.

Svojstva $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ i $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ vrijede, ne samo u ovom konkretnom slučaju nego i za sve kompleksne brojeve z_1, z_2.

Dokažimo prvo svojstvo. Neka su $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$. Tada je

$$z_1 \cdot z_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

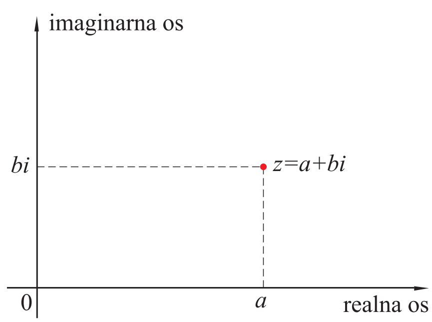
pa je

$$\begin{aligned}|z_1 \cdot z_2| &= \sqrt{(a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2}\\ &= \sqrt{{a_1}^2{a_2}^2 + {b_1}^2{b_2}^2 + {a_1}^2{b_2}^2 + {a_2}^2{b_1}^2}.\end{aligned}$$

Izračunajmo i $|z_1| \cdot |z_2|$

$$\begin{aligned}|z_1| \cdot |z_2| &= \sqrt{{a_1}^2 + {b_1}^2} \cdot \sqrt{{a_2}^2 + {b_2}^2} = \sqrt{({a_1}^2 + {b_1}^2)({a_2}^2 + {b_2}^2)}\\ &= \sqrt{{a_1}^2{a_2}^2 + {b_1}^2{b_2}^2 + {a_1}^2{b_2}^2 + {a_2}^2{b_1}^2}.\end{aligned}$$

Očito je da vrijedi $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.



Svaki se kompleksan broj $z = a + bi$ u ravnini poistovjećuje s parom (a, b)

Iz primjera 1.c) vidimo da se ovako definirana apsolutna vrijednost kompleksnog broja na skupu $\mathbf{R}$ podudara s pojmom apsolutne vrijednosti realnih brojeva koji smo usvojili u prethodnom razredu.

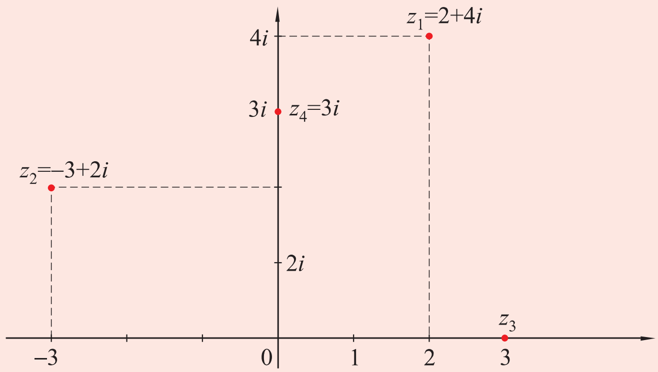
Kao što realne brojeve prikazujemo na brojevnom pravcu, tako i kompleksni brojevi imaju svoj grafički prikaz. Njih prikazujemo u ravnini.

Naime, kompleksni broj $z = a+bi$ poistovjećujemo s uređenim parom (a, b) koji prikazujemo u Kartezijevom koordinatnom sustavu na uobičajeni način.

Os apscisa koordinatnog sustava naziva se **realna os**, a os ordinata **imaginarna os**. Ravnina u kojoj se kompleksni brojevi prikazuju kao što smo opisali zove se **kompleksna** ili **Gaussova ravnina**.

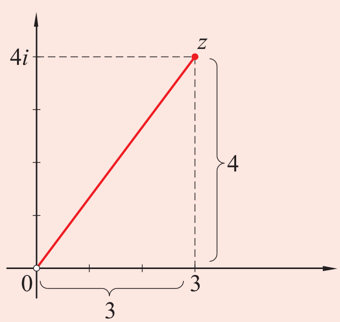
PRIMJER 3.

Prikažimo u kompleksnoj ravnini brojeve $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = -3 + 2i$, $z_3 = 3$, $z_4 = 3i$.



PRIMJER 4.

Prikažimo u kompleksnoj ravnini broj $z = 3 + 4i$, a zatim izračunajmo njegovu udaljenost od ishodišta, te apsolutnu vrijednost.



Udaljenost z od ishodišta izračunat ćemo pomoću Pitagorina poučka:

$$d = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5.$$

Apsolutnu vrijednost računamo prema formuli:

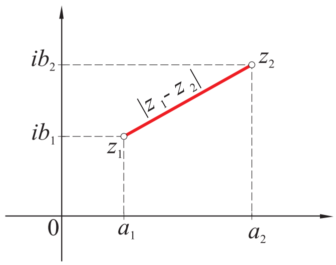
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Uočavamo da su apsolutna vrijednost kompleksnog broja $z = 3 + 4i$ i njegova udaljenost od ishodišta jednake.

Promotrimo čemu je jednaka apsolutna vrijednost razlike dvaju kompleksnih brojeva. Neka su $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ dva kompleksna broja. Tada je

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i, \text{ pa je}$$

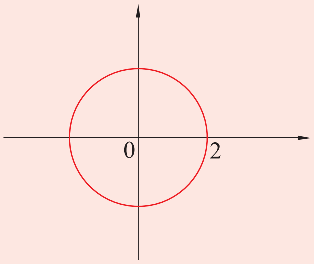
$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$



Dakle, $|z_1 - z_2|$ jednako je udaljenosti između točaka (a_1, b_1) i (a_2, b_2), tj. to je udaljenost između brojeva z_1 i z_2 prikazanih u kompleksnoj ravnini.

PRIMJER 5.

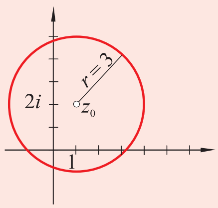
Odredimo skup svih kompleksnih brojeva z za koje vrijedi:
a) $|z| = 2$, b) $|z-(1+2i)| = 3$.



a) Tražimo one kompleksne brojeve z čija je udaljenost do ishodišta kompleksne ravnine jednaka 2. Dakle, radi se o točkama kružnice sa središtem u ishodištu i polumjera 2.

b) Traženi brojevi su oni čija je udaljenost do broja $z_0 = 1+2i$ jednaka 3. Svi takvi brojevi nalaze se na kružnici sa središtem $z_0 = 1+2i$ i polumjerom 3.
Ako taj uvjet prikažemo pomoću jednadžbe, tj. analitički, dobivamo: ako je $z = x+yi$, tada je

$$|z-(1+2i)| = |x+yi-(1+2i)| = |(x-1)+(y-2)i|$$
$$= \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}.$$



Uvjet glasi: $\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=3$, tj. $(x-1)^2+(y-2)^2=9$.

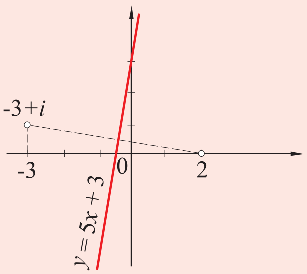
To je analitički zapis kružnice sa središtem (1,2) i polumjerom 3.

PRIMJER 6.

Nacrtajmo u kompleksnoj ravnini skup točaka određen uvjetom:
a) $|z-2| = |z+3-i|$, b) $|z-i| \leqslant 2$.

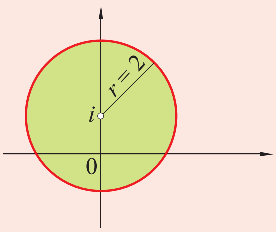
a) Stavimo $z = x+yi$ i nađemo analitički zapis:

$$|x+yi-2| = |x+yi+3-i|$$
$$|(x-2)+yi| = |(x+3)+(y-1)i|$$
$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}$$
$$x^2-4x+4+y^2 = x^2+6x+9+y^2-2y+1$$
$$y = 5x+3$$



Dakle, traženi skup su točke pravca $y = 5x+3$. To je, ustvari, simetrala dužine čije su rubne točke 2 i $-3+i$.

b) Skup točaka za koje vrijedi jednakost $|z-i| = 2$ su točke kružnice sa središtem i i polumjerom 2, a one za koje vrijedi znak $\leqslant$ su točke kruga istog središta i polumjera.



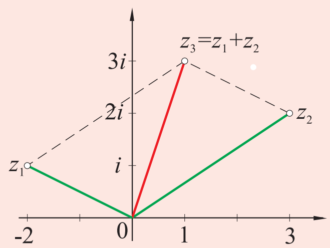
PRIMJER 7.

Prikažimo u kompleksnoj ravnini brojeve $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 3 + 2i$ i njihov zbroj $z_1 + z_2$.

Izračunajmo zbroj:

$$z_3 = z_1 + z_2 = 1 + 3i$$

i nacrtajmo ga. Uočimo da je $z_3 - z_1 = z_2$ i $z_3 - z_2 = z_1$, pa vrijede jednakosti $|z_3 - z_1| = |z_2 - 0|$ i $|z_3 - z_2| = |z_1 - 0|$. Drugim riječima, točke 0, z_2, z_3 i z_1 određuju paralelogram čija je jedna dijagonala upravo spojnica točaka O i z_3.



Povežemo li ovu sliku sa znanjem o vektorima i o zbrajanju vektora po pravilu paralelograma, vidimo da je $\overrightarrow{Oz_3} = \overrightarrow{Oz_1} + \overrightarrow{Oz_2}$ gdje su $\overrightarrow{Oz_1}$, $\overrightarrow{Oz_2}$ i $\overrightarrow{Oz_3}$ vektori s početkom u O i završnom točkom z_1, z_2 i z_3 redom.

ZADACI 1.5.

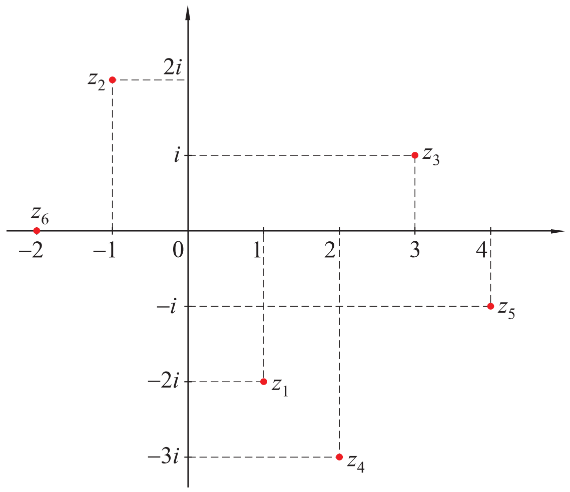
1. Izračunaj apsolutnu vrijednost kompleksnog broja z, ako je:

a $z = 3 + 4i$; **b** $z = 1 - 3i$; **c** $z = -5 - 12i$; **d** $z = 1 - 2i$;
e $z = 1 + i$; **f** $z = 10$; **g** $z = 12i$; **h** $z = -14i$;
i $z = -21$; **j** $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; **k** $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$; **l** $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

2. Prikaži grafički kompleksne brojeve:

a $z_1 = 1 - 2i$; **b** $z_2 = 2 + 3i$; **c** $z_3 = -4 - 3i$;
d $z_4 = 6$; **e** $z_5 = 2i$; **f** $z_6 = -3i$.

3. Koji su kompleksni brojevi prikazani na slici?



4. Koji kompleksni brojevi odgovaraju točkama $A(-3,2)$, $B(7,-8)$, $C(0,2)$, $D(-4,-1)$, $E(5,-2)$, $F(3,0)$? Nacrtaj ih u kompleksnoj ravnini.

5. Nacrtaj u kompleksnoj ravnini dane brojeve i izračunaj im udaljenost od ishodišta:

a $z=-3-4i$; **b** $z=1-i$; **c** $z=2+i$; **d** $z=\frac{1}{2}+2i$.

6. Ako je $z_1=3-4i$ i $z_2=12+5i$, izračunaj:

a z_1+z_2; **b** z_1-z_2; **c** $z_1\cdot z_2$; **d** $|z_1|$;
e $|z_2|$; **f** $|z_1\cdot z_2|$; **g** $\frac{z_1}{z_2}$; **h** $\frac{|z_1|}{|z_2|}$;
i $\operatorname{Re} z_1+\operatorname{Im} z_2$; **j** $|z_1|\cdot\operatorname{Re} z_2$; **k** $|z_1|\cdot z_2$; **l** $\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}$.

7. Izračunaj $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1\cdot z_2|$ i $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$ ako je:

a $z_1=4+3i$, $z_2=5-12i$; **b** $z_1=6-8i$, $z_2=-15-8i$;
c $z_1=7i$, $z_2=-3$; **d** $z_1=1+i$, $z_2=1-i$.

8. Izračunaj $|z|$, ako je:

a $z=(1+i)(1-i)(3+4i)$; **b** $z=(-8+6i)(3-2i)(-3+2i)$; **c** $z=(\sqrt{3}+i)(-1+\sqrt{3}i)(4-3i)$;
d $z=(1+i)^7$. **e** $z=(-3-4i)^2(1+\sqrt{3}i)^4$.

9. Izračunaj $|z|$, ako je:

a $z=\frac{3+4i}{8-15i}$; **b** $z=\frac{(1+\sqrt{2}i)(1+\sqrt{3}i)}{1+\sqrt{5}i}$;
c $z=\frac{1+i^{95}}{1-i^{95}}$; **d** $z=\frac{(1-2i)^6}{(-2+5i)^3}$.

10. Prikaži u kompleksnoj ravnini skup točaka z za koje vrijedi uvjet:

a $|z|=2$; **b** $|z|=4$; **c** $|z|=5$; **d** $|z-1|=2$; **e** $|z-3|=1$;
f $|z+2|=1$; **g** $|z-i|=2$; **h** $|z+3i|=1$; **i** $|z-2-3i|=1$.

11. Nacrtaj u kompleksnoj ravnini skup točaka određen uvjetom:

a $|z|\leqslant 2$ **b** $|z|\geqslant 1$; **c** $|z+i|\leqslant 2$;
d $|z+1-3i|>1$; **e** $|z+2+i|<2$; **f** $1<|z-1|\leqslant 3$.

12. Nacrtaj u kompleksnoj ravnini skup točaka određen uvjetom:

a $|z-2|=|z+1|$ **b** $|z-i|=|z+2|$; **c** $|z|=|z-3+2i|$; **d** $|z+3i|=|z-4+2i|$.

13. Odredi skup točaka u kompleksnoj ravnini za koji vrijedi:

a $\operatorname{Im} z=2$; **b** $\operatorname{Re} z=-3$; **c** $\operatorname{Im} z=0$;
d $\operatorname{Im} z=\operatorname{Re} z$. **e** $\operatorname{Im}\overline{z}=2\operatorname{Re} z$. **f** $z\cdot\overline{z}=9$.

14. Zadani su brojevi z_1 i z_2. Nacrtaj ih u kompleksnoj ravnini, te im po pravilu paralelograma odredi zbroj z_1+z_2. Rezultat provjeri i računski.

a $z_1=2+i$, $z_2=1+2i$; **b** $z_1=-1-i$, $z_2=2+3i$;
c $z_1=-2+3i$, $z_2=4-2i$; **d** $z_1=-3-i$, $z_2=-1-2i$.

PREGLED GRADIVA

Odnosi skupova brojeva

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

Skup kompleksnih brojeva

$$\mathbf{C} = \{z = a + bi : a,\ b \in \mathbf{R}\}.$$

Imaginarna jedinica i je broj za koji vrijedi $i^2 = -1$.

Realni dio kompleksnog broja $z = a + bi$ je realni broj a. Označavamo: $\operatorname{Re} z = a$.

Imaginarni dio kompleksnog broja $z = a + bi$ je realni broj b. Označavamo: $\operatorname{Im} z = b$.

Broju $z = a + bi$ **kompleksno konjugiran broj** je broj $\bar{z} = a - bi$.

Apsolutna vrijednost ili **modul** kompleksnog broja z je broj $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$|z_1 - z_2|$ je udaljenost brojeva z_1 i z_2 prikazanih u kompleksnoj ravnini.

Potencije broja i:

$$i^1 = i, \qquad i^2 = -1, \qquad i^3 = -i, \qquad i^4 = 1.$$