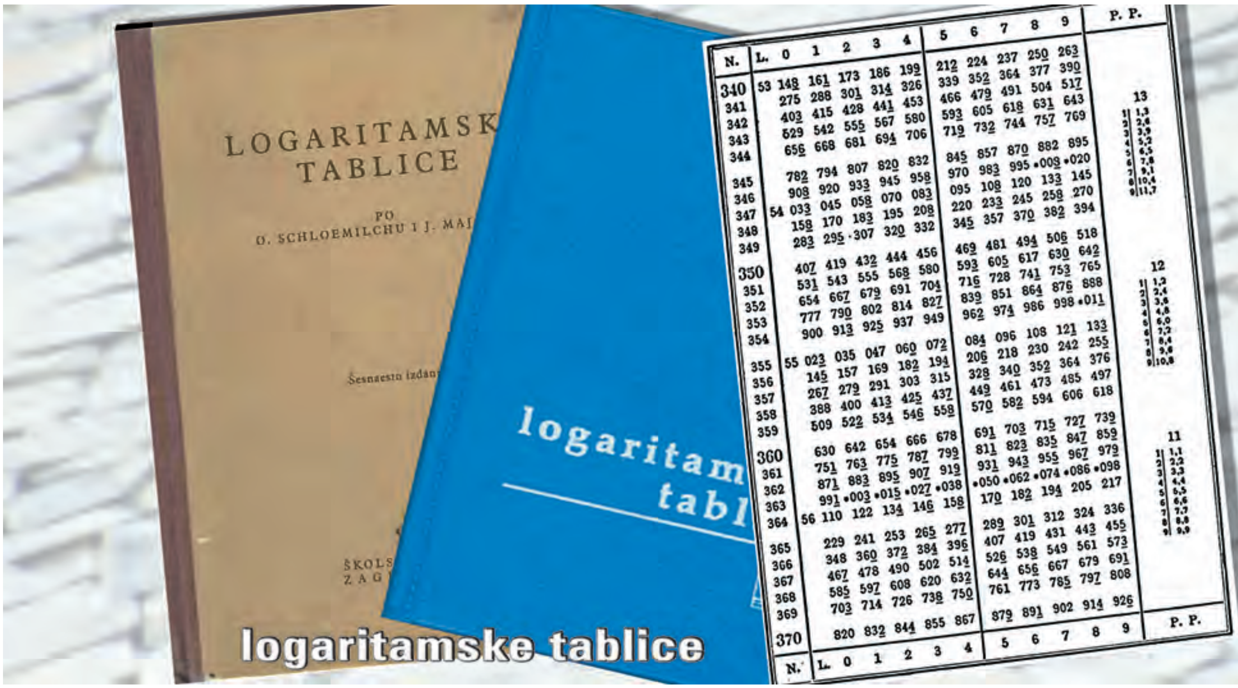
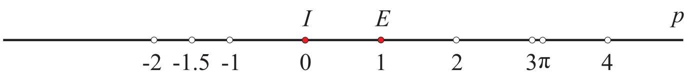


1. Trigonometrijske funkcije realnog broja

1.1. Brojevna kružnica

Brojevni pravac

Na pravcu p istaknimo dvije različite točke I i E. Točki I pridružimo broj 0, a točki E broj 1. Svakoj točki pravca p možemo pridružiti jedan realan broj. Vrijedi i obratno, svakom realnom broju pridružena je jedna točka pravca p.



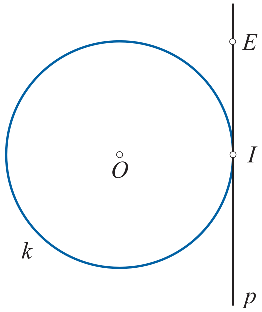
Brojevni pravac.

Pravac p zajedno s tim pridruživanjem naziva se **brojevni pravac** ili **koordinatna os**. Točka I naziva se **ishodište** koordinatnog sustava na pravcu, a točka E **jedinična točka**.

Dužina $\overline{IE}$ zove se **jedinična dužina** brojevnog pravca p.

Brojevna kružnica

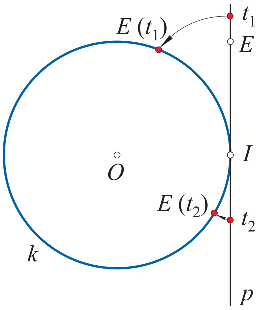
Neka je k kružnica središta O i polumjera $r=1$, a točka I neka je točka kružnice k.



Brojevni pravac p dira kružnicu k, $d(O,I)=d(I,E)=1$.

Uočimo brojevni pravac p koji dira kružnicu k u točki I koja je ujedno i ishodišna točka pravca p. Neka je jedinična dužina $\overline{IE}$ brojevnog pravca p jednaka polumjeru kružnice k, pri čemu je točka E postavljena tako da ako se krećemo od točke O do točke E preko I, gibanje ima pozitivan smjer, tj. smjer suprotan od gibanja kazaljke na satu.

Pravac p namotajmo bez klizanja i rastezanja na kružnicu k tako da polupravac s pozitivnim brojevima namatamo u pozitivnom smjeru, a polupravac na kojemu su smješteni negativni brojevi u negativnom smjeru. Kako je svakom realnom broju pridružena točno jedna točka pravca p, ovim namatanjem smo svakom realnom broju pridružili točno jednu točku kružnice. Ovo pridruživanje zovemo **eksponencijalno preslikavanje** pravca na kružnicu i označavamo s E.

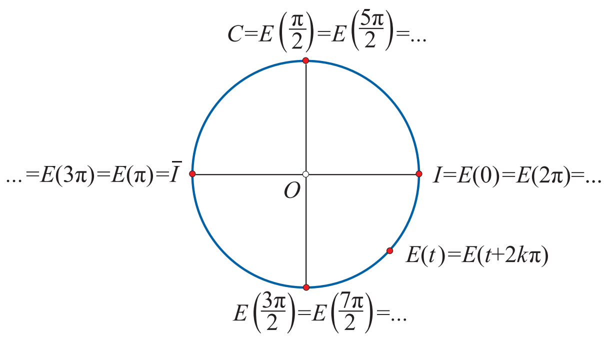


Namatanje pravca na kružnicu.

Brojevna kružnica

Kružnicu k zajedno s eksponencijalnim preslikavanjem $E:\mathbf{R}\to k$ nazivamo **brojevna** ili **trigonometrijska kružnica**.

Broju 0 je pridružena točka I. Kako je duljina jedinične kružnice jednaka 2π, to se broj 2π preslikava opet u točku I. Dalje, broj 4π preslikava se u točku I.



Duljina jedinične polukružnice je π, pa se broj π preslikava u točku $\bar{I}$ (vidi sliku) koja je dijametralno suprotna točki I. Ali isto tako, i brojevi $3\pi = \pi + 2\pi$, $5\pi = \pi + 2 \cdot 2\pi, \ldots$ se također preslikavaju u točku $\bar{I}$.

Četvrtina kružnice ima duljinu $\frac{\pi}{2}$, pa znači da se u točku C preslikava broj $\frac{\pi}{2}$, ali i brojevi $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, $\frac{\pi}{2} + 4\pi, \ldots$.

Dakle,

$$\begin{aligned}
&I = E(0) = E(2\pi) = E(4\pi) = E(-2\pi) = \ldots, && \text{tj.} \quad I = E(2k\pi), && k \in \mathbf{Z},\\
&\bar{I} = E(\pi) = E(-\pi) = E(3\pi) = E(5\pi) = \ldots, && \text{tj.} \quad \bar{I} = E((2k+1)\pi), && k \in \mathbf{Z},\\
&C = E\left(\frac{\pi}{2}\right) = E\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = E\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \ldots, && \text{tj.} \quad C = E\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), && k \in \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

Općenito možemo zaključiti da se svake dvije točke koje su na pravcu udaljene za 2π ili za višekratnik broja 2π namatanjem stope u jednu točku kružnice, tj. vrijedi

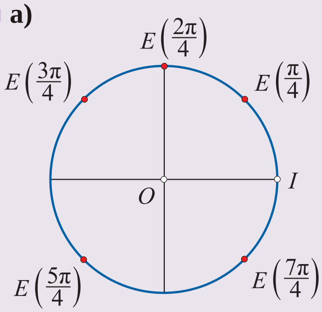
$$E(t + 2k\pi) = E(t) \text{ za svaki } t \in \mathbf{R} \text{ i } k \in \mathbf{Z}.$$

PRIMJER 1.

Nacrtajmo $E(t)$, ako je t jednako:

a) $\frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$; **b)** $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$; **c)** $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{3\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

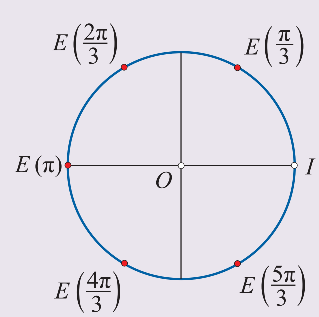
a)



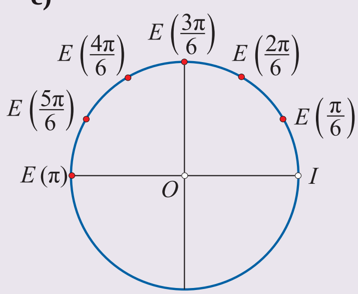
Četvrtina polukružnice ima duljinu $\frac{\pi}{4}$. Točke $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $E\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $E\left(\frac{5\pi}{4}\right)$, $E\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ dijele četvrtine kružnice na jednake dijelove.

b)

Trećina polukružnice ima duljinu $\frac{\pi}{3}$. Točke $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$ i $E\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ dijele gornju polukružnicu na tri jednaka dijela.



c)



Točke $E\left(\frac{\pi}{6}\right), \ldots, E\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ dijele gornju polukružnicu na šest jednakih dijelova.

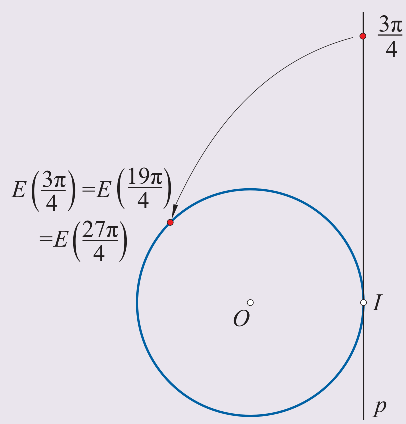
PRIMJER 2.

Za realni broj $t = \frac{19\pi}{4}$ nađimo brojeve $t_1 \in [0, 2\pi\rangle$, $t_2 \in [6\pi, 8\pi\rangle$, takve da vrijedi $E(t) = E(t_1) = E(t_2)$.

Kako je $\frac{19\pi}{4} = 4\pi + \frac{3\pi}{4}$ i $\frac{3\pi}{4} \in [0, 2\pi\rangle$ to je $t_1 = \frac{3\pi}{4}$.
Broj t_2 računamo ovako:

$$\begin{aligned}\frac{19\pi}{4} &= \left(4\pi + \frac{3\pi}{4}\right) - 6\pi + 6\pi \\ &= (4\pi - 6\pi) + \left(6\pi + \frac{3\pi}{4}\right) \\ &= -2\pi + \frac{27\pi}{4},\end{aligned}$$

pa je $t_2 = \frac{27\pi}{4} \in [6\pi, 8\pi\rangle$. Brojevi $\frac{19\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{27\pi}{4}$ preslikavaju se u istu točku trigonometrijske kružnice.



ZADACI 1.1.

1. Na brojevnoj kružnici odredi točke $E(t)$ ako je t:

a π; **b** 3π; **c** 2005π; **d** $-\pi$; **e** -5π;
f -2003π; **g** 2π; **h** 8π; **i** 1626π; **j** -2π;
k -6π; **l** -238π; **k** $\frac{\pi}{2}$; **l** $\frac{9\pi}{2}$; **m** $\frac{2005\pi}{2}$;
n $-\frac{\pi}{2}$; **o** $-\frac{9\pi}{2}$; **p** $-\frac{2001\pi}{2}$.

2. Na brojevnoj kružnici odredi točke $E(t)$ ako je t:

a $\frac{\pi}{3}$; **b** $\frac{2\pi}{3}$; **c** $\frac{\pi}{5}$; **d** $\frac{21}{4}\pi$; **e** $-\frac{3\pi}{4}$;
f $-\frac{171}{5}\pi$; **g** $-\frac{1998}{7}\pi$; **h** $-\frac{289}{3}\pi$; **i** $\frac{1999}{3}\pi$.

3. Na brojevnoj kružnici skiciraj položaj točke $E(t)$ ako je t:

a 1; **b** 12.65; **c** 16.785; **d** 1988; **e** -1;
f -0.23; **g** -1103; **h** -30.28; **i** 6.72;
pri čemu uzmi da je $\pi \approx 3.14159$.

4. Odredi $t \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:

a 132π; **b** 213π; **c** -11π;
d -42π; **e** $\frac{19\pi}{2}$; **f** $\frac{1999\pi}{2}$.

5. Odredi $t \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:

a $\frac{121\pi}{3}$; **b** $\frac{1432\pi}{3}$; **c** $\frac{127\pi}{6}$;
d $\frac{1546\pi}{5}$; **e** $-\frac{237\pi}{4}$; **f** $-\frac{37\pi}{10}$.

6. Odredi $t \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:

a 16.28; **b** 32.14; **c** -10.31;
d -8; **e** 101; **f** -7.51,
pri čemu uzmi da je $\pi \approx 3.14$.

7. Odredi $t \in [-2\pi, 0\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:

a 13π; **b** -1434π; **c** $\frac{25\pi}{4}$;
d $-\frac{1235\pi}{6}$; **e** $\frac{132\pi}{17}$; **f** $-\frac{218\pi}{25}$.

8. Odredi $t \in [10\pi, 12\pi\rangle$ takav da je $E(t) = E(x)$ ako je zadan x:

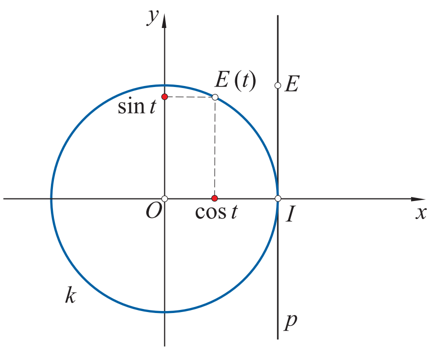
a $\frac{\pi}{4}$; **b** $\frac{3\pi}{4}$; **c** $-\frac{\pi}{2}$;
d $\frac{32\pi}{3}$; **e** $\frac{25\pi}{6}$; **f** $-\frac{35\pi}{3}$.

1.2. Definicija trigonometrijskih funkcija

Funkcije sinus i kosinus

Brojevnu kružnicu $k(O, r=1)$ smjestimo u koordinatni sustav u ravnini tako da se ishodište koordinatnog sustava podudara sa središtem O kružnice k, a os x neka se poklapa s pravcem OI.

Sada je brojevni pravac p paralelan s osi y, a njegove točke I i E imaju koordinate $(1, 0)$ i $(1, 1)$ redom. Kao što smo već opisali, realnom broju t pridružena je točka $E(t)$ kružnice k.



Kosinus i sinus realnog broja

Apscisa točke $E(t)$ naziva se **kosinus broja** t i označava se s $\cos t$.

Ordinata točke $E(t)$ naziva se **sinus broja** t i označava se sa $\sin t$.

Funkcija koja broju t pridružuje broj $\cos t$ naziva se **kosinus** i označava se s $\cos$, a funkcija koja broju t pridružuje broj $\sin t$ naziva se **sinus** i označava se sa $\sin$.

Funkcije kosinus i sinus definirane su na skupu $\mathbf{R}$, a kodomena im je $[-1,1]$ jer su koordinate točke $E(t)$ brojevi ne veći od 1 po apsolutnoj vrijednosti.

Funkcije sinus i kosinus

$$\cos : \mathbf{R} \to [-1,1] \qquad \sin : \mathbf{R} \to [-1,1]$$

$$t \mapsto \cos t \qquad t \mapsto \sin t$$

PRIMJER 1.

Nacrtajmo točku $E(t)$ i izračunajmo sinus i kosinus od t, ako je t:

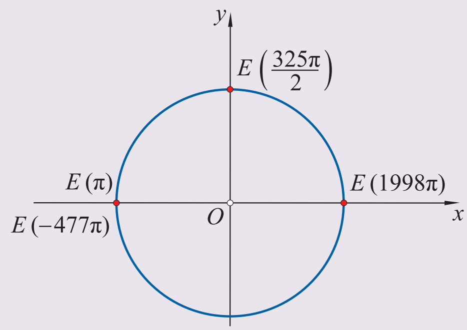
a) π; **b)** 1998π; **c)** -477π; **d)** $\dfrac{325}{2}\pi$.

$\sin\pi = 0$, $\cos\pi = -1$;

$\sin 1998\pi = 0$, $\cos 1998\pi = 1$;

$\sin(-477\pi) = 0$, $\cos(-477\pi) = -1$;

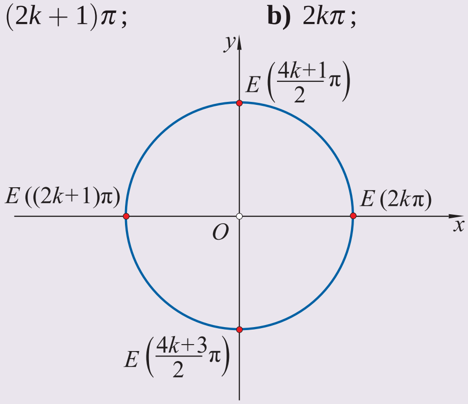
$\sin\dfrac{325}{2}\pi = 1$, $\cos\dfrac{325}{2}\pi = 0$.



PRIMJER 2.

Nacrtajmo točku $E(t)$ i izračunajmo sinus i kosinus od t, ako je t:

a) $(2k+1)\pi$; **b)** $2k\pi$; **c)** $\dfrac{4k+1}{2}\pi$; **d)** $\dfrac{4k+3}{2}\pi$.



$\sin(2k+1)\pi = 0$,

$\cos(2k+1)\pi = -1$;

$\sin 2k\pi = 0$, $\cos 2k\pi = 1$;

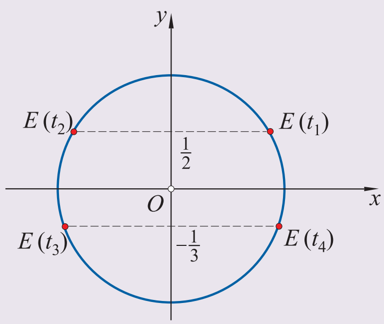
$\sin\dfrac{4k+1}{2}\pi = 1$, $\cos\dfrac{4k+1}{2}\pi = 0$;

$\sin\dfrac{4k+3}{2}\pi = -1$, $\cos\dfrac{4k+3}{2}\pi = 0$.

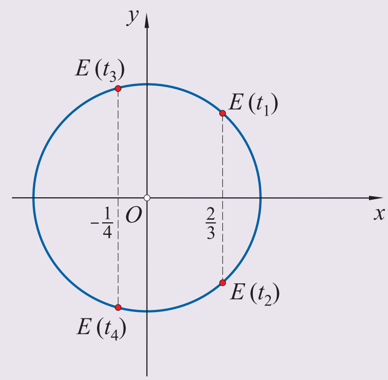
PRIMJER 3.

Nacrtajmo točke $E(t)$ za koje vrijedi:

a) $\sin t = \frac{1}{2}$; **b)** $\sin t = -\frac{1}{3}$; **c)** $\cos t = \frac{2}{3}$; **d)** $\cos t = -\frac{1}{4}$.

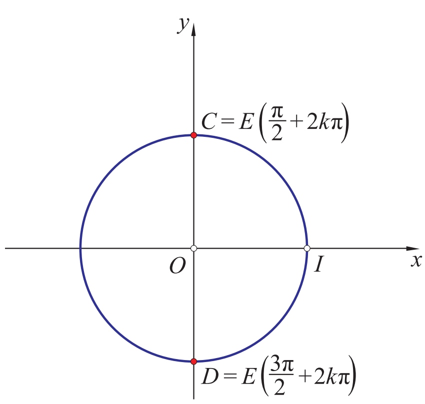


Za točke $E(t_1)$ i $E(t_2)$ vrijedi $\sin t_1 = \sin t_2 = \frac{1}{2}$. Za točke $E(t_3)$ i $E(t_4)$ vrijedi $\sin t_3 = \sin t_4 = -\frac{1}{3}$.



Za točke $E(t_1)$ i $E(t_2)$ vrijedi $\cos t_1 = \cos t_2 = \frac{2}{3}$. Za točke $E(t_3)$ i $E(t_4)$ vrijedi $\cos t_3 = \cos t_4 = -\frac{1}{4}$.

Funkcija tangens



C i D su točke trigonometrijske kružnice s apscisom 0.

Funkcija **tangens**, u oznaci tg, definira se pomoću funkcija sinus i kosinus ovako:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}, \quad \cos t \neq 0.$$

Za koje brojeve t vrijedi $\cos t \neq 0$?

Jedine točke na brojevnoj kružnici s apscisom 0 su točke $C(0,1)$ i $D(0,-1)$. Brojevi koji se namatanjem preslikavaju u točku C su brojevi $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}, \ldots$, $\frac{-3\pi}{2}$, $\frac{-7\pi}{2}, \ldots$, tj. $C = E\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. Za točku D vrijedi $D = E\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), k \in \mathbf{Z}$. Dakle, tangens je definiran za sve realne brojeve t različite od $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Funkcija tangens

$$\operatorname{tg} : \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbf{Z}\right\} \to \mathbf{R}$$

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$$

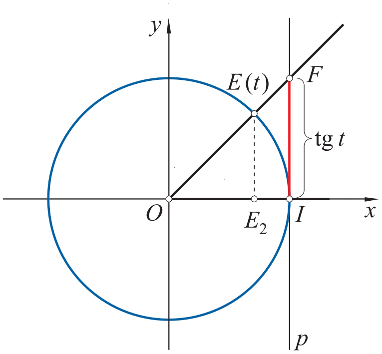
Gdje se na brojevnoj kružnici pojavljuje tangens broja t? Neka je $t \in \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbf{Z}\right\}$ takav da $E(t)$ pripada prvom kvadrantu. Označimo sa E_1 ortogonalnu projekciju točke $E(t)$ na os x, a sa F presjek pravca p i spojnice $OE(t)$.

Očito je da su trokuti $OE_1E(t)$ i OIF slični, pa vrijedi

$$\frac{|FI|}{|OI|} = \frac{|E_1E(t)|}{|OE_1|},$$

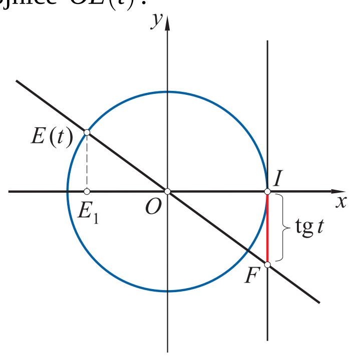
tj. uvažavajući da je $|OI| = 1$, $|E_1E(t)| = \sin t$, $|OE_1| = \cos t$, dobivamo

$$|FI| = \frac{\sin t}{\cos t} = \operatorname{tg} t.$$



Geometrijska interpretacija broja $\operatorname{tg} t$.

Dakle, točka F ima koordinate $(1, \operatorname{tg} t)$, tj. tangens broja t je ordinata točke dobivene presjekom pravca p i spojnice $OE(t)$.



$E(t)$ je u drugom kvadrantu i $\operatorname{tg} t$ je opet ordinata točke F.

Promotrimo slučaj kad je $E(t)$ u drugom kvadrantu, tj. kad je $\sin t > 0$ i $\cos t < 0$.

Definirajmo opet točke E_1 i F kao u prethodnom slučaju. Vrijedi $\triangle OE_1E(t) \sim \triangle OIF$, pa je

$$\frac{|FI|}{|OI|} = \frac{|E_1E(t)|}{|E_1O|},$$

tj. $|FI| = \dfrac{\sin t}{|\cos t|} = |\operatorname{tg} t|$. Dakle, udaljenost od F do x-osi iznosi $|\operatorname{tg} t|$, a kako je F u četvrtom kvadrantu, ordinata joj je negativan broj, pa je $F = (1, -|\operatorname{tg} t|) = (1, \operatorname{tg} t)$ jer je $\operatorname{tg} t$ negativan zbog negativnosti kosinusa od t. Znači i u ovom slučaju je $\operatorname{tg} t$ ordinata točke F.

U slučajevima kad $E(t)$ pripada trećem, odnosno, četvrtom kvadrantu uz analogni postupak imamo isti zaključak koji posebno i istaknimo.

Tangens broja t

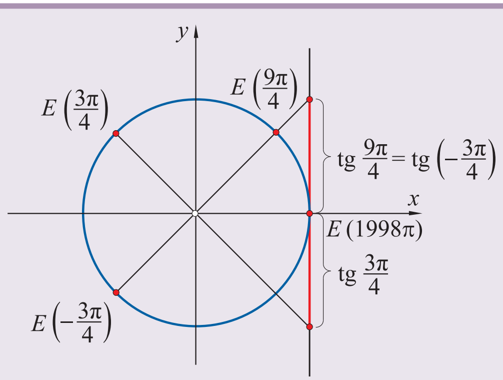
Tangens broja t je ordinata točke dobivene presjekom pravca p i spojnice točaka O i $E(t)$. Pravac p nazivamo **tangensnom osi**.

PRIMJER 4.

Nacrtajmo $E(t)$ na trigonometrijskoj kružnici i $\operatorname{tg} t$ na tangensnoj osi ako je t:

a) $\dfrac{9\pi}{4}$; **b)** $\dfrac{3\pi}{4}$;

c) 1998π; **d)** $-\dfrac{3\pi}{4}$.



Funkcija kotangens

Funkcija **kotangens**, u oznaci ctg, definira se ovako

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}, \quad \sin t \neq 0.$$

Brojevi za koje je $\sin t = 0$ su oni koji se preslikaju u točke $I(1,0)$ i $\bar{I}(-1,0)$. Kako je $I = E(2k\pi), k \in \mathbf{Z}$ i $\bar{I} = E(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, brojevi za koje je $\sin t = 0$ su oblika $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ pa je domena funkcije ctg skup $\mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\}$.

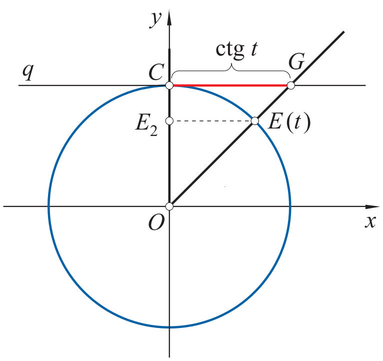
Funkcija kotangens

$$\operatorname{ctg} : \mathbf{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbf{Z}\} \to \mathbf{R}$$
$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Neka je q tangenta brojevne kružnice k u točki $C(0,1)$. Uzmimo takav realan broj t kojemu namatanjem pridružena točka $E(t)$ koja pripada prvom kvadrantu.

Neka je E_2 ortogonalna projekcija točke $E(t)$ na y-os, a G presjek pravca q i spojnice $OE(t)$. Trokuti $OE_2E(t)$ i OCG su slični i kako je $|E_2E(t)| = \cos t, |OC| = 1$ i $|OE_2| = \sin t$, to je $\dfrac{|CG|}{|CO|} = \dfrac{|E_2E(t)|}{|E_2O|}$, tj. $|CG| = \dfrac{\cos t}{\sin t} = \operatorname{ctg} t$, tj. koordinate točke G su $(\operatorname{ctg} t, 1)$.

U ostalim slučajevima kada $E(t)$ pripada ostalim kvadrantima način razmišljanja je sličan, pa imamo sljedeći zaključak.



Geometrijska interpretacija kotangensa broja t.

Kotangens broja t

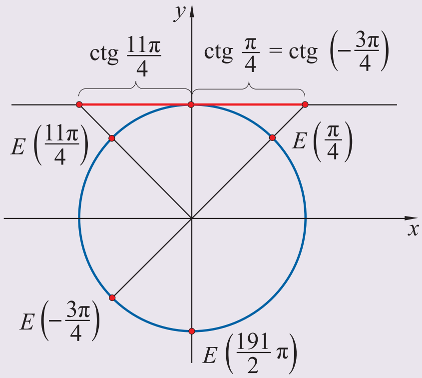
Kotangens broja t je apscisa točke dobivene presjekom pravca q i spojnice točaka O i $E(t)$. Pravac q nazivamo **kotangensnom osi**.

PRIMJER 5.

Nacrtajmo $E(t)$ na trigonometrijskoj kružnici i $\operatorname{ctg} t$ na kotangensnoj osi ako je t:

a) $\dfrac{\pi}{4}$; **b)** $\dfrac{11\pi}{4}$;

c) $\dfrac{191}{2}\pi$; **d)** $-\dfrac{3\pi}{4}$.



PRIMJER 6.

Odredimo predznake trigonometrijskih funkcija u pojedinim kvadrantima.

Ako je $E(t)$ u prvom kvadrantu, tada su obje koordinate te točke pozitivne, tj. $\sin t > 0$, $\cos t > 0$, te su i $\operatorname{tg} t$ i $\operatorname{ctg} t$ pozitivni. Za ostale kvadrante vrijedi ova tablica:

kvadrant	I.	II.	III.	IV.
$\sin t$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos t$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\operatorname{tg} t$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\operatorname{ctg} t$	$+$	$-$	$+$	$-$

ZADACI 1.2.

1. Nacrtaj $E(t)$ i istakni sinus i kosinus od t ako je t jednako:

a 32π; b -14π; c -197π;
d $\dfrac{321\pi}{2}$; e $-\dfrac{141\pi}{2}$; f $\dfrac{33\pi}{4}$.

2. Nađi $\sin t$, $\cos t$ ako je t:

a 27π; b -18π; c 384π;
d $\dfrac{21}{2}\pi$; e $-\dfrac{43}{2}\pi$; f $-\dfrac{1997}{2}\pi$.

3. Nacrtaj na trigonometrijskoj kružnici točke $E(t)$ za koje vrijedi:

a $\sin t = \dfrac{3}{4}$; b $\sin t = \dfrac{1}{6}$; c $\sin t = -\dfrac{1}{4}$;
d $\cos t = \dfrac{1}{3}$; e $\cos t = -\dfrac{1}{2}$; f $\cos t = -\dfrac{2}{3}$.

4. Nacrtaj $E(t)$ i istakni tangens i kotangens od t (ukoliko postoje), ako je t jednako:

a 36π; b -43π; c $\dfrac{19}{2}\pi$;
d $\dfrac{-123\pi}{2}$; e $\dfrac{145\pi}{4}$; f $-\dfrac{237\pi}{4}$.

5. Istakni na trigonometrijskoj kružnici točke $E(t)$ za koje vrijedi:

a $\operatorname{tg} t = 1$; b $\operatorname{tg} t = 2$; c $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{4}$;
d $\operatorname{ctg} t = 1.5$; e $\operatorname{ctg} t = -1.8$; f $\operatorname{ctg} t = 2$.

6. Izračunaj:

a $\cos\pi - \cos 4\pi + \sin\dfrac{\pi}{2}\cdot\cos(-\pi)$;

b $\sin\dfrac{3\pi}{2} - \cos\pi + \sin\pi$;

c $\sin 1996\pi - \cos 1997\pi + \operatorname{tg} 1998\pi$;

d $\dfrac{\operatorname{tg} 14\pi + \sin\left(-\dfrac{17}{2}\pi\right)}{\sin 27\pi - \cos 27\pi}$;

e $\dfrac{\sin\dfrac{19\pi}{2} + \cos^2\left(-\dfrac{5\pi}{2}\right)}{\sin^2\left(-\dfrac{19\pi}{2}\right) + \cos\left(\dfrac{5\pi}{2}\right)}$;

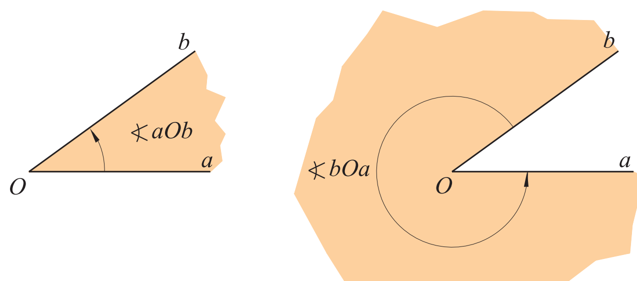
f $\dfrac{\cos^2 7\pi - 2\sin^2 7\pi}{\cos^2\dfrac{17\pi}{2} + 2\sin^2\dfrac{17\pi}{2}}$.

1.3. Trigonometrijske funkcije kutova

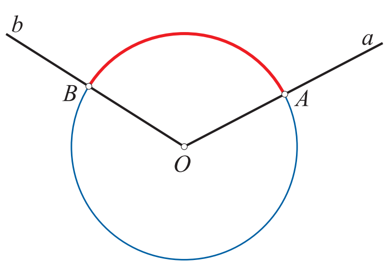
Kut i mjere kuta

Kutom $\sphericalangle aOb$ nazivamo onaj dio ravnine određen polupravcima a i b sa zajedničkim vrhom O koji bi prebrisao polupravac a pri rotaciji u pozitivnom smjeru oko točke O do polupravca b.

Polupravac a zovemo prvi ili početni krak kuta $\sphericalangle aOb$, a polupravac b drugi ili završni krak kuta.



Kutovi $\sphericalangle aOb$ i $\sphericalangle bOa$ zajedno čine puni kut.



Opišimo oko vrha O kuta $\sphericalangle aOb$ kružnicu k jediničnog polumjera sa središtem u O. Ta kružnica siječe krak a u točki A, a krak b u točki B.

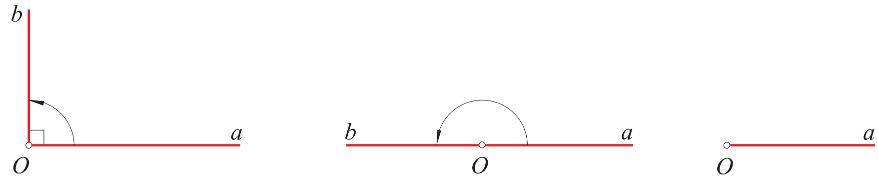
Pomoću luka $\overset{\frown}{AB}$ mjerimo kut $\sphericalangle aOb$. Naime, vrijedi sljedeća definicija.

Glavna mjera

Glavna mjera u radijanima kuta $\sphericalangle aOb$ jest duljina luka $\overset{\frown}{AB}$ pri čemu se od dva moguća luka određena točkama A i B uzima onaj na kojem se kretanje od točke A do točke B vrši u pozitivnom smjeru.

Kažemo da smo kut $\sphericalangle aOb$ izmjerili u radijanima i pišemo $|\sphericalangle aOb| = t_0$ rad, gdje je t_0 duljina luka $\overset{\frown}{AB}$.

Tako na primjer, nul-kut $\sphericalangle aOa$ ima glavnu mjeru 0 radijana, što kraće zapisujemo 0 rad, pravi kut $\sphericalangle aOb$, $a \perp b$, ima glavnu mjeru $\frac{\pi}{2}$ rad, ispruženi kut $\sphericalangle aOb$, gdje je $a \cup b$ pravac, ima glavnu mjeru π rad.



Pravi kut ima glavnu mjeru $\frac{\pi}{2}$ radijana ili 90°; ispruženi kut ima mjeru π radijana ili 180°; nul-kut ima mjeru 0 radijana ili 0°.

Povijesno gledano, stariji način mjerenja kutova jest mjerenje u stupnjevima. U tom slučaju je glavna mjera ispruženog kuta jednaka 180 stupnjeva, što kraće zapisujemo sa 180°, a kut s mjerom od t radijana ima

$$s = \frac{180}{\pi} \cdot t$$

stupnjeva. Pri toj pretvorbi obično koristimo i manje dijelove stupnja: minute ($1' = \frac{1}{60}$ stupnja) i sekunde ($1'' = \frac{1}{60}$ minute). U nekim dijelovima svijeta u upotrebi je i mjerenje kutova u gradima. U tom je slučaju glavna mjera ispruženog kuta jednaka 200 grada.

U sljedećoj tablici navedene su mjere nekih kutova u stupnjevima i u radijanima:

mjera u stupnjevima	0°	30°	45°	60°	75°	80°	90°	270°
mjera u radijanima	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$

Uvedimo koordinatni sustav (O, x, y) tako da se vrh O kuta $\sphericalangle aOb$ podudara s ishodištem O, a prvi krak a s pozitivnim dijelom x-osi, te neka je k trigonometrijska kružnica.

Sjetimo li se postupka namatanja pravca na kružnicu, zaključujemo da je

$$B = E(t_0)$$

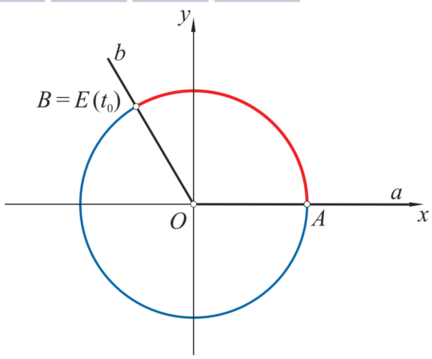
gdje je t_0 glavna mjera kuta, tj. duljina luka $\overset{\frown}{AB}$.

Ali, vrijedi i

$$B = E(t_0 + 2k\pi)$$

za svaki cijeli broj k.

Brojeve $t_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ nazivamo **mjere** kuta $\sphericalangle aOb$.



Broj $t_0 \in [0, 2\pi\rangle$ nazivamo glavna mjera kuta $\sphericalangle aOb$, a brojeve $t_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, mjerama tog kuta.

Mjera kuta

Ako je t_0 glavna mjera kuta $\sphericalangle aOb$ onda svaki element skupa

$$\{t_0 + 2k\pi; k \in \mathbf{Z}\}$$

nazivamo **mjerom** tog kuta.

Dakle, kad kažemo "kut od 30°", "kut od $\frac{\pi}{6}$ rad" ili "kut od 390°", "kut od $-\frac{11\pi}{6}$" radi se o istom kutu, ali s različitim mjerama: 30°, $\frac{\pi}{6}$ rad, 390°, $-\frac{11\pi}{6}$ rad. Ukoliko u mjeri kuta ne piše kratica "rad", podrazumijeva se da se radi o radijanskoj mjeri.

PRIMJER 1.

Sljedećim kutovima nađimo glavne mjere u radijanima:

a) 328π; **b)** $\frac{431}{3}\pi$; **c)** $1081°$; **d)** $-213°$.

a) Kako je $328\pi = 0 + 2 \cdot 164\pi$, to je glavna mjera tog kuta jednaka 0 radijana.

b) Iz $\frac{431}{3}\pi = \frac{71 \cdot 6 + 5}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi + 71 \cdot 2\pi$ slijedi da je glavna mjera jednaka $\frac{5}{3}\pi$ radijana.

c) $1081° = 3 \cdot 360° + 1°$, pa je glavna mjera jednaka $1°$, tj. $\frac{\pi}{180}$ rad.

d) $-213° = -360° + 147°$, te je glavna mjera jednaka $147°$, tj. $\frac{147\pi}{180}$ rad.

PRIMJER 2.

Kutu od $75°$ napišimo radijansku mjeru koja pripada intervalu

a) $[0, 2\pi\rangle$; **b)** $[-10\pi, -8\pi\rangle$; **c)** $[122\pi, 124\pi\rangle$.

a) Pretvorimo $75°$ u radijane: $75° = \frac{75\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$ i to je glavna mjera u radijanima.

b) $\frac{5\pi}{12} = 10\pi + \left(-10\pi + \frac{5\pi}{12}\right) = 10\pi - \frac{115\pi}{12}$ i tražena mjera iz tog intervala je $-\frac{115\pi}{12}$.

c) $\frac{5\pi}{12} = -122\pi + \left(122\pi + \frac{5\pi}{12}\right) = -122\pi + \frac{1469\pi}{12}$, te je tražena mjera $\frac{1469\pi}{12}$.

PRIMJER 3.

Danu radijansku mjeru kuta napišimo u stupnjevima:

a) 1 rad; **b)** 34 rad; **c)** -28.2 rad.

a) Koristeći formulu imamo

$$s = \frac{180}{\pi}t = \frac{180}{t} = 57.295779°.$$

Također, mogli smo koristiti i džepno računalo tako da u stanju RAD upišemo dani broj u radijanima, tj. 1, te prelaskom u stanje DEG dobivamo broj u stupnjevima. Uobičajeno je ovaj broj zapisati i pomoću minuta i sekunda. Broj minuta dobivamo tako da oduzmemo cjelobrojni dio i razliku pomnožimo sa 60: $0.295779° \cdot 60 = 17.74674'$. Oduzmemo li od ovog broja cjelobrojni dio i ostatak pomnožimo sa 60, dobit ćemo sekunde: $0.74674' \cdot 60 = 44.80''$. Dakle, mjera u stupnjevima kuta od 1 radijana iznosi $57°17'45''$. Ovaj postupak pretvaranja stupnjeva u minute i sekunde je na većini džepnih računala također automatiziran (tipka $\rightarrow$ D.MS).

b) $34 \text{ rad} = 1948.056503° = 1948°3'23''$.

c) $-28.2 \text{ rad} = -1615.740982° = -1615°44'28''$.

PRIMJER 4.

Napišimo $35°2'14''$ u radijanima.

Prvo je potrebno dani broj pretvoriti u stupnjeve:

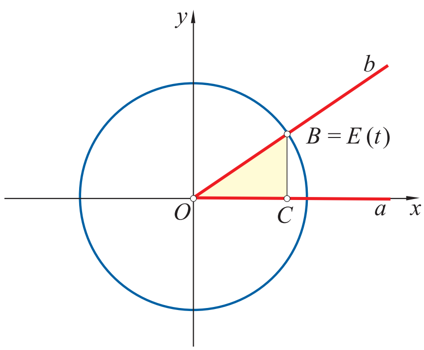
$$s = 35°2'14'' = 35 + \frac{2}{60} + \frac{14}{3600} = 35.037222°,$$

a zatim

$$t = \frac{s\pi}{180} = 0.611515 \text{ rad}.$$

I ova pretvorba iz oblika “stupnjevi-minute-sekunde” u stupnjeve, te u radijane može se vršiti pomoću džepnog računala. Naime, računalo postavimo u stanje DEG te unesemo podatak u obliku 35.0214. Pritiskom na tipku $\rightarrow$ DEG dobivamo 35.037222, a zatim prelaskom u stanje RAD taj broj se pretvara u radijane.

Trigonometrijske funkcije kuta



Promotrimo sada šiljasti kut $\sphericalangle aOb$. Dakle, točka B je u prvom kvadrantu i $B = E(t)$.

Do sada smo naučili da su uz taj kut vezana dva pojma vrlo sličnih naziva:

- trigonometrijske funkcije šiljastog kuta $\sphericalangle aOb$;
- trigonometrijske funkcije broja t.

Ta dva pojma definirali smo nezavisno. Prvi pojam definiran je u 2. razredu. Ponovimo te definicije.

Trigonometrijske vrijednosti šiljastog kuta

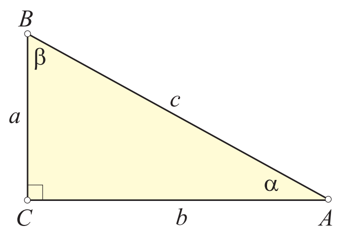
Neka je ABC pravokutni trokut s hipotenuzom $\overline{AB}$ i kutom α pri vrhu A.

Omjer $\frac{a}{c}$ nasuprotne katete i hipotenuze naziva se **sinus kuta** α i označava sa $\sin\alpha$.

Omjer $\frac{b}{c}$ priležeće katete i hipotenuze naziva se **kosinus kuta** α i označava s $\cos\alpha$.

Omjer $\frac{a}{b}$ nasuprotne i priležeće katete naziva se **tangens kuta** α i označava s $\operatorname{tg}\alpha$.

Omjer $\frac{b}{a}$ priležeće i nasuprotne katete naziva se **kotangens kuta** α i označava s $\operatorname{ctg}\alpha$.



U pravokutnom trokutu vrijedi

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta,$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\beta,$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\beta.$$

Drugi pojam definiran je u prethodnim poglavljima. Tako je sinus broja t ordinata točke $B = E(t)$ trigonometrijske kružnice, kosinus istog broja t je apscisa točke B, tangens broja t je kvocijent sinusa i kosinusa od t, a kotangens broja t je kvocijent kosinusa i sinusa od t. Povežimo sada trigonometrijske funkcije kutova s trigonometrijskim funkcijama realnih brojeva.

Promotrimo opet sliku šiljastog kuta na prethodnoj stranici. Sinus broja t je duljina $|BC|$. Ali, uočimo li pravokutan trokut OCB, vidimo da je sinus kuta $\sphericalangle aOb$ omjer $\dfrac{|BC|}{|OB|}$, što je jednako $|BC|$ jer je kružnica jedinična.

Dakle, ta dva pojma: sinus šiljastog kuta kuta i sinus njegove mjere se podudaraju. Isto se može pokazati i za ostale trigonometrijske funkcije, tj. vrijedi sljedeće.

Trigonometrijske funkcije šiljastog kuta i trigonometrijske funkcije bilo koje mjere tog kuta se podudaraju.

Ovdje je mjesto i vrijeme da se prisjetimo i trigonometrijskih funkcija nekih specijalnih šiljastih kutova.

$t(^\circ)$	$t\,(\text{rad})$	$\sin t$	$\cos t$	$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} t$
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Uspostavili smo vezu između trigonometrijskih funkcija šiljastih kutova i trigonometrijskih funkcija realnih brojeva. Prirodno proširenje te veze na trigonometrijske funkcije bilo kakvih kutova dano je sljedećom definicijom.

Trigonometrijske funkcije kuta

Neka je t bilo koja mjera kuta $\sphericalangle aOb$ u radijanima. Vrijednost trigonometrijske funkcije kuta $\sphericalangle aOb$ jednaka je vrijednosti te trigonometrijske funkcije realnog broja t.

Specijalno, sinus pravog kuta jednak je $\sin\dfrac{\pi}{2}$, tj. 1; sinus ispruženog kuta jednak je $\sin\pi$, tj. 0, itd.

PRIMJER 5.

Izračunajmo:

a) $\sin \dfrac{31\pi}{2}$; **b)** $\cos 750°$.

a) $\dfrac{31\pi}{2} = \dfrac{7 \cdot 4 + 3}{2}\pi = 14\pi + \dfrac{3\pi}{2}$. Glavna mjera je $\dfrac{3\pi}{2}$. Dakle, $\sin \dfrac{31\pi}{2} = \sin \dfrac{3\pi}{2} = -1$.

b) Prvo nađimo glavnu mjeru tog kuta: $750° = 2 \cdot 360° + 30°$. Glavna mjera je $30°$. Tada je $\cos 750° = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

ZADACI 1.3.

1. Pretvori u stupnjeve, minute i sekunde:

a 1.8 rad; b 21.35 rad; c -4.2 rad.

2. Pretvori u radijane:

a $10°21'43''$; b $31°2'59''$; c $121°1''$.

3. Napiši još bar 4 mjere kuta u radijanima čija je jedna mjera zadana, te pretvori sve te mjere iz radijana u stupnjeve:

a $\dfrac{\pi}{2}$; b $\dfrac{8}{3}\pi$; c $\dfrac{19\pi}{4}$;

d $-\dfrac{141}{4}\pi$; e $-\dfrac{1999}{3}\pi$; f $-\dfrac{147}{5}\pi$.

4. Napiši još bar 4 mjere u stupnjevima kuta čija je jedna mjera zadana, te pretvori sve te mjere iz stupnjeva u radijane:

a $330°$; b $-60°$; c $80°$;

d $1440°$; e $-1998°$; f $-1°$.

5. Odredi glavnu mjeru u radijanima kutova kojima su dane mjere:

a $\dfrac{13\pi}{2}$; b $\dfrac{148}{5}\pi$; c $\dfrac{872}{3}\pi$;

d -144π; e $-\dfrac{287}{4}\pi$; f $-\dfrac{117}{10}\pi$.

6. Odredi glavnu mjeru u stupnjevima kutova kojima su dane mjere:

a $1080°$; b $456°$; c $12345°$;

d $-345°$; e $-5°$; f $-1457°$.

7. Odredi glavnu mjeru i sinus danog kuta:

a $390°$; b $1110°$; c $-330°$; d $3630°$;

e $420°$; f $780°$; g $-300°$; h $2580°$;

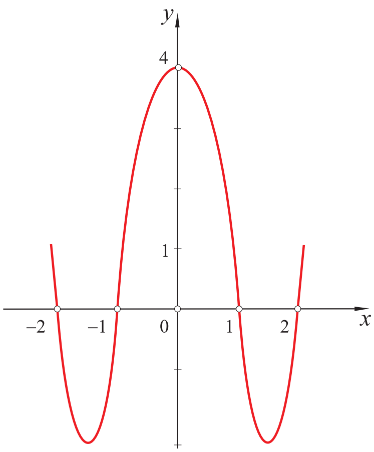
i $405°$; j $765°$; k $-315°$; l $3645°$.

8. Odredi glavnu mjeru i kosinus kuta:

a $\dfrac{9\pi}{4}$; b $-\dfrac{\pi}{4}$; c $-\dfrac{9\pi}{4}$; d $\dfrac{81\pi}{4}$;
e $\dfrac{7\pi}{3}$; f $-\dfrac{\pi}{3}$; g $-\dfrac{7\pi}{3}$; h $\dfrac{43\pi}{3}$;
i $\dfrac{13\pi}{6}$; j $-\dfrac{\pi}{6}$; k $-\dfrac{13\pi}{6}$; l $\dfrac{133\pi}{6}$.

1.4. Parnost kosinusa, neparnost sinusa, tangensa i kotangensa

Parne i neparne funkcije



Promotrimo funkciju $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$. Za nju vrijedi

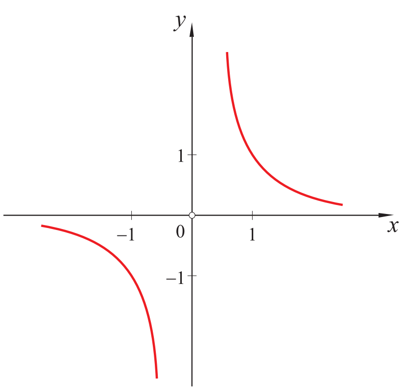
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 - 5(-x)^2 + 4 \\ &= x^4 - 5x^2 + 4 = f(x), \end{aligned}$$

tj. vrijednosti funkcije jednake su ako su argumenti suprotni brojevi. Funkciju s takovim svojstvom nazivamo **parna** funkcija. Graf parne funkcije osno je simetričan obzirom na y-os.

Parna i neparna funkcija

Za funkciju $f : D_f \to \mathbf{R}$ kažemo da je **parna** ako za svaki $x \in D_f$ vrijedi $f(-x) = f(x)$.

Za funkciju $f : D_f \to \mathbf{R}$ kažemo da je **neparna** ako za svaki $x \in D_f$ vrijedi $f(-x) = -f(x)$.



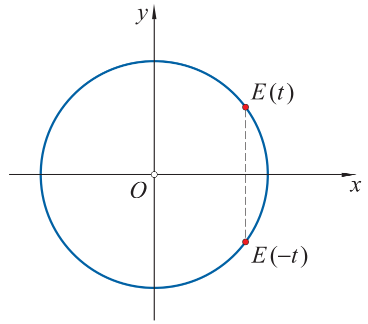
S druge strane, za funkciju $g(x) = \dfrac{1}{x^3}$ vrijedi

$$g(-x) = \frac{1}{(-x)^3} = -g(x), \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$

tj. u suprotnim brojevima g poprima suprotne vrijednosti. Funkcije s tim svojstvom nazivamo **neparne** funkcije. Graf neparne funkcije centralno je simetričan obzirom na ishodište.

Napomenimo da većina funkcija nije ni parna ni neparna.

Parnost kosinusa, neparnost sinusa



Promotrimo sada točke na brojevnoj kružnici kojima su pridruženi brojevi t i $-t$.

Točke $E(t)$ i $E(-t)$ simetrične su obzirom na x-os, te stoga imaju jednake apscise i suprotne ordinate. Dakle, vrijede sljedeće tvrdnje.

Za svaki realni broj t vrijedi $\cos(-t) = \cos t$, tj. kosinus je parna funkcija.

Za svaki realni broj t vrijedi $\sin(-t) = -\sin t$, tj. sinus je neparna funkcija.

PRIMJER 1.

Ispitajmo parnost funkcija

a) $f_1(x) = \sin 2x$; **b)** $f_2(x) = \sin^4 8x - \cos x$.

a) $f_1(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f_1(x)$, te je f_1 neparna.

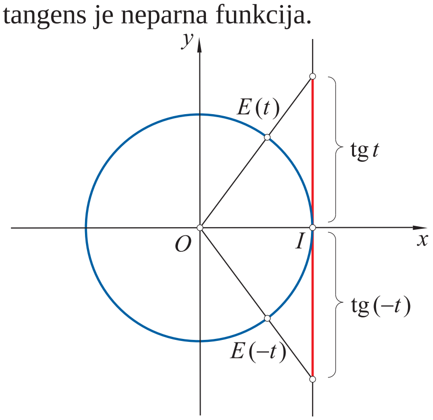
b) $f_2(-x) = \sin^4(-8x) - \cos(-x) = (-\sin 8x)^4 - \cos x = \sin^4 8x - \cos x = f_2(x)$, pa je f_2 parna funkcija.

Neparnost tangensa i kotangensa

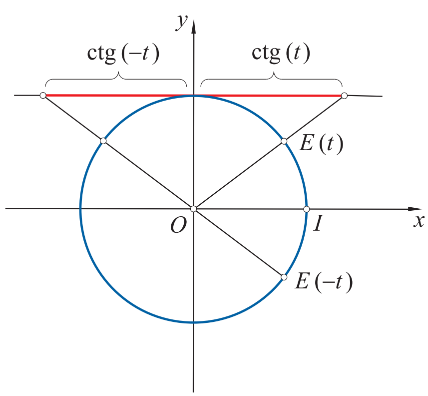
Koristeći definiciju tangensa, parnost kosinusa i neparnost sinusa imamo

$$\operatorname{tg}(-t) = \frac{\sin(-t)}{\cos(-t)} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t, \quad \forall t \in D_{\operatorname{tg}}.$$

Dakle, tangens je neparna funkcija.



Tangensi brojeva t i $-t$ su suprotni brojevi.



Kotangensi brojeva t i $-t$ su suprotni brojevi.

Na isti način dobivamo da je kotangens također neparna funkcija. Naime,

$$\operatorname{ctg}(-t)=\frac{\cos(-t)}{\sin(-t)}=\frac{\cos t}{-\sin t}=-\operatorname{ctg} t.$$

Neparnost tangensa i kotangensa

Funkcije tangens i kotangens su neparne, tj. vrijedi

$$\operatorname{tg}(-t)=-\operatorname{tg} t,\quad \forall t\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi : k\in\mathbf{Z}\right\},$$
$$\operatorname{ctg}(-t)=-\operatorname{ctg} t,\quad \forall t\in\mathbf{R}\setminus\{k\pi : k\in\mathbf{Z}\}.$$

ZADACI 1.4.

1. Pojednostavni izraze:

a $\sin x\cos(-y)+\sin(-x)\cos(-y)$;
b $\sin t\cos u-\sin t\cos(-u)$;
c $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}(-\beta)-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)$;
d $\operatorname{tg} x\sin y-\operatorname{ctg}(-x)\sin(-y)$.

2. Provjeri da su sljedeće funkcije parne:

a $f(x)=x^6+8x^4-2$;
b $f(x)=11x^4-23$;
c $f(x)=\cos 5x$;
d $f(x)=3\cos x$;
e $f(x)=7\cos 11x$;
f $f(x)=\sin^2 x$.

3. Dokaži da su sljedeće funkcije parne:

a $f(x)=|x|+2x^2$;
b $f(x)=2\cos x+13\cos^3 x$;
c $f(x)=\sin^2 x+\operatorname{ctg}^2 x$;
d $f(x)=\sin^4 2x$;
e $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{x^4}$;
f $f(x)=\dfrac{\cos x-\operatorname{ctg}^2 x}{1+\cos x}$.

4. Provjeri da su sljedeće funkcije neparne:

a $f(x)=x^7-3x^5+4x$;
b $f(x)=8x^{11}+12x^3$;
c $f(x)=\sin 7x$;
d $f(x)=4\sin 2x$;
e $f(x)=\sin^3 x$;
f $f(x)=\sin x\cos x$.

5. Dokaži da su sljedeće funkcije neparne:

a $f(x)=\sqrt[3]{x}-x$;
b $f(x)=\operatorname{tg} x+\sin x$;
c $f(x)=3\operatorname{tg} x-4\operatorname{ctg} x$;
d $f(x)=2\operatorname{tg} x-\sin x\cos x$;
e $f(x)=\dfrac{1-\cos^4 x}{\sin x}$;
f $f(x)=\dfrac{x+\operatorname{tg} x}{\sin x}$.

6. Ispitaj parnost ovih funkcija:

a $f(x)=x+\sin 2x$;
b $f(x)=\sin^3 3x\cdot\cos 5x$;
c $f(x)=\dfrac{3}{2}\sin 2x-\dfrac{\pi}{3}$;
d $f(x)=\operatorname{tg}|x|-1$;
e $f(x)=x^4+\cos x(1+\sin x)$;
f $f(x)=2|\sin x|-\operatorname{ctg}^2 3x$;
g $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$;
h $f(x)=\dfrac{\cos x\cdot\sin 2x}{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} 2x}$;
i $f(x)=\dfrac{x+\sin^3 x}{\operatorname{tg} 4x}$;
j $f(x)=\dfrac{\cos x-\sin^4 x}{\operatorname{ctg}^2 x}$;
k $f(x)=\dfrac{1}{\sin x+\cos x}$;
l $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x}{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}$;
m $f(x)=\dfrac{5\cos^3 x}{|\sin x+x|}$;
n $f(x)=\dfrac{x^4+\operatorname{tg}(x^2+4)}{x-\operatorname{tg} x}$.