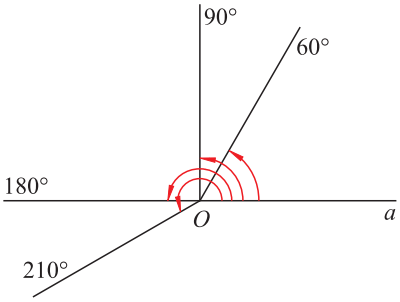
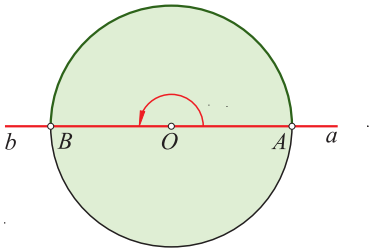
1. Trigonometrijske funkcije realnog broja

1.1. Brojevna kružnica

U drugom razredu, a i ranije, govorili smo o kutovima čija je mjera bila dana u stupnjevima. Tako je, na primjer, pravi kut imao 90°, ispruženi kut 180°, puni kut 360°.

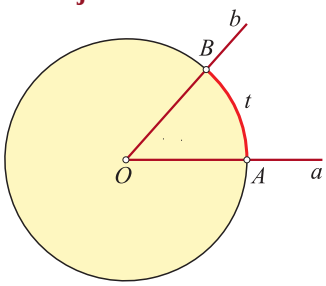


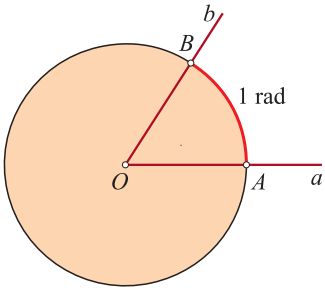
Uvedimo sada jedan drugi način mjerenja kutova. Promotrimo ispruženi kut $\sphericalangle aOb$. Oko vrha O opišimo kružnicu k jediničnog polumjera. Ona siječe polupravac a u točki A, a polupravac b u točki B.



U prvom smo razredu naučili da je opseg kruga $O = 2r\pi$, pa konkretno u ovom slučaju, opseg kruga je 2π jer je $r = 1$. No tada je duljina luka $\overset{\frown}{AB}$ jednaka polovici opsega tj. jednaka je π (≈ 3.14). Kažemo da ispruženi kut ima π radijana. Drugim riječima, povezali smo kut s duljinom luka jedinične kružnice.

Naravno da ovaj postupak možemo provesti za bilo koji kut $\sphericalangle aOb$. Oko vrha O kuta $\sphericalangle aOb$ opišemo jediničnu kružnicu koja krak a siječe u točki A, a krak b u točki B. Sad kutu pridružujemo duljinu luka od točke A do točke B. Ta se duljina luka naziva **radijanska mjera** kuta.





Budući da su u upotrebi oba načina mjerenja, dobro je znati kako jednu mjeru kuta pretvoriti u drugu. Označimo s α° mjeru kuta u stupnjevima, a s α_r mjeru istog kuta u radijanima. Tada je

$$\pi : 180^\circ = \alpha_r : \alpha^\circ.$$

Da bismo stekli neki osjećaj za radijansku mjeru spomenimo da kut od 1 radijana ima približno $57^\circ 17' 44''$ (slika desno). Dakle, duljina luka jedinične kružnice koji pripada kutu od $57^\circ 17' 74''$ jednaka je njezinom polumjeru, tj. 1.

U sljedećoj tablici navedene su mjere nekih kutova u stupnjevima i u radijanima:

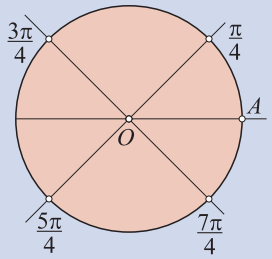
mjera u stupnjevima	0°	30°	45°	60°	75°	80°	90°	270°
mjera u radijanima	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$

Primjer 1.

Nacrtajmo kutove α, ako je α:

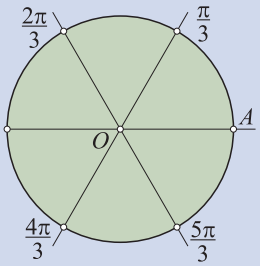
a) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$; **b)** $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$; **c)** $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$.

a)



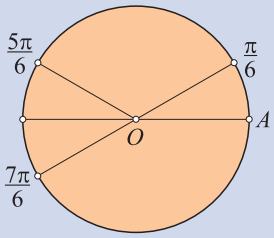
Četvrtina polukružnice ima duljinu $\frac{\pi}{4}$.

b)



Trećina polukružnice ima duljinu $\frac{\pi}{3}$.

c)



Krak kuta od $\frac{\pi}{6}$ *radijana prolazi točkom na kružnici koja s* A *čini luk duljine* $\frac{\pi}{6}$.

Primjer 2.

Napišimo $35°2'14''$ u radijanima.

Prvo je potrebno dani broj pretvoriti u stupnjeve:

$$\alpha° = 35°2'14'' = 35 + \frac{2}{60} + \frac{14}{3600} = 35.037222°,$$

a zatim iz razmjera $\pi : 180° = \alpha_r : \alpha°$ slijedi

$$\alpha_r = \frac{\alpha° \pi}{180} = 0.611515 \text{ rad}.$$

Ova pretvorba iz oblika "stupnjevi-minute-sekunde" u stupnjeve, te u radijane može se vršiti pomoću džepnog računala. Naime, računalo postavimo u stanje DEG te unesemo podatak u obliku 35.0214. Pritiskom na tipku $\rightarrow$ DEG dobivamo 35.037222, a zatim izračunamo α_r. Neka računala automatski prelaskom u stanje RAD taj broj pretvaraju u radijane.

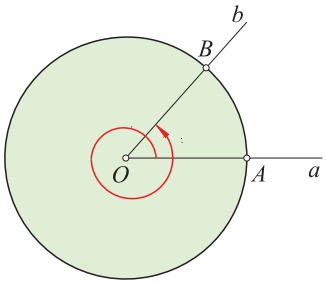
Primjer 3.

Kut od 2.5 rad izrazimo u stupnjevima.

$\pi : 180^\circ = \alpha_r : \alpha^\circ$, $\pi : 180^\circ = 2.5 : \alpha^\circ$, $\alpha^\circ = \dfrac{180^\circ \cdot 2.5}{\pi}$, $\alpha \approx 143.239448^\circ$, $\alpha \approx 143^\circ 14' 22''$.

U ovom smo računu upotrijebili džepno računalo da bismo došli do veličine $\alpha \approx 143.239448^\circ$. Većina džepnih računala ima već ugrađenu tipku za prebacivanje u oblik $\mathrm{D}^\circ\,\mathrm{M}'\,\mathrm{S}''$, tj. stupnjevi-minute-sekunde. Ukoliko ta funkcija nije ugrađena, postupak je sljedeći: od 143.239448 oduzmemo 143 i pomnožimo sa 60. Dobivamo rezultat 14.36688. To su minute. Želimo li dobiti još i sekunde, od tog broja oduzmemo cijeli dio i ostatak pomnožimo sa 60. Dobijamo $22.0128''$. Dakle, $\alpha \approx 143^\circ 14' 22''$.

U većini ovakvih računa gdje se pojavljuje broj π dobijemo približne vrijednosti, jer je π iracionalan broj pa ga prikazujemo s manje ili više točnim aproksimacijama.



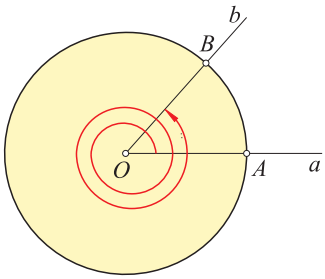
Mjera kuta $\sphericalangle aOb$ *je* $\alpha + 2\pi$.

Promotrimo kako dolazimo do kutova mjere veće od 360°, odnosno 2π radijana. Kut $\sphericalangle aOb$ je, dakle, uređeni par polupravaca a i b s istim početkom O. Zamislimo da je početni krak a nepomičan, a da smo do položaja polupravca b došli vrtnjom oko O u pozitivnom smjeru, tj. u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu, te neka je α mjera kuta $\sphericalangle aOb$.

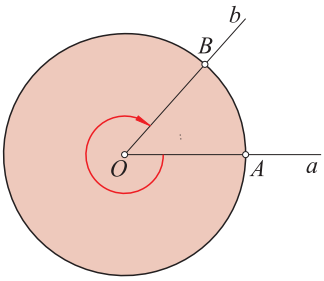
Nastavi li polupravac b rotirati još jedan cijeli krug, dolazi u svoj početni položaj.

Mjera tako dobivenog kuta je $\alpha + 360^\circ$, odnosno $\alpha + 2\pi$ ako je izražena u radijanima.

Sad lako možemo zamisliti kako tvorimo kutove od $\alpha + 2 \cdot 2\pi$, $\alpha + 3 \cdot 2\pi$, itd. Naime, nastavi li polupravac b rotirati dva kruga od svog početnog položaja dobivamo kut mjere $\alpha + 2 \cdot 2\pi$, za tri kruga $\alpha + 3 \cdot 2\pi$, itd.



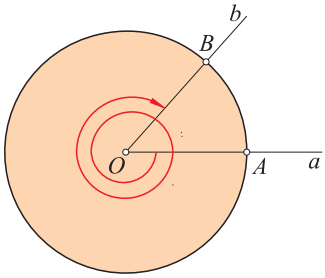
Mjera kuta $\sphericalangle aOb$ *je* $\alpha + 2 \cdot 2\pi$.



Kut $\sphericalangle aOb$ *je kut s negativnom mjerom.*

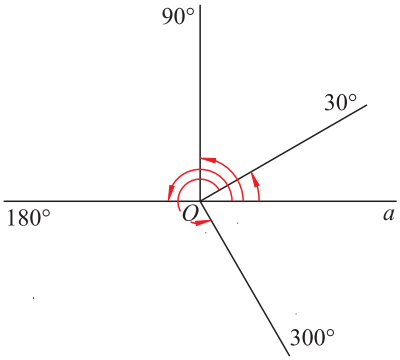
Do položaja polupravca b možemo doći i vrtnjom oko O u negativnom smjeru, tj. u smjeru kretanja kazaljke na satu. Tad govorimo o kutu s negativnom mjerom. Ta mjera iznosi $\alpha - 2\pi$, gdje je α mjera iz intervala $[0, \pi\rangle$.

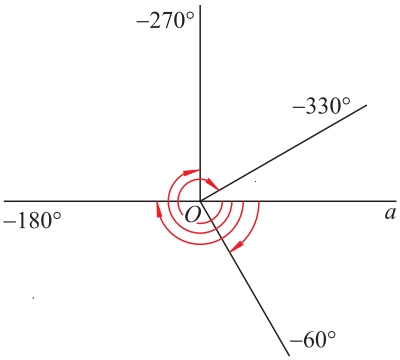
Nastavi li se polupravac b vrtjeti u negativnom smjeru još jedan krug, dolazi u svoj početni položaj, a mjera tog kuta iznosi $\alpha - 2 \cdot 2\pi$.



Mjera kuta $\sphericalangle aOb$ *je* $\alpha - 2\pi$.

Na donjim su slikama nacrtani kutovi kojima su na lijevoj slici dane pozitivne mjere, a na desnoj slici negativne mjere.





Uglavnom, svi kutovi mjera α, $\alpha + 2\pi$, $\alpha + 4\pi$, $\alpha + 6\pi$, $\alpha - 2\pi$, $\alpha - 4\pi$,... imaju završni položaj kraka b isti, tj. u istoj točki B sijeku kružnicu k. Kažemo da brojevima $\alpha + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ pridružujemo točku B. Štoviše, svakom realnom broju x možemo pridružiti na jediničnoj kružnici odgovarajuću točku B, jer je svaki broj x radijanska mjera nekog kuta. Brojevi kojima je pridružena ista točka B na kružnici se međusobno razlikuju za $2k\pi$, tj. $360°k$.

Kružnica s ovakvim pridruživanjem naziva se **brojevna kružnica**.

Mjera kuta iz intervala $[0, 2\pi\rangle$, odnosno $[0, 360°\rangle$ naziva se **glavna mjera**.

Primjer 4.

Kutovima od: **a)** 328π; **b)** $\frac{431}{3}\pi$; **c)** $1081°$; **d)** $-213°$ nađimo glavne mjere u radijanima.

a) Kako je $328\pi = 0 + 2 \cdot 164\pi$, glavna je mjera tog kuta jednaka 0 radijana.

b) Iz $\frac{431}{3}\pi = \frac{71 \cdot 6 + 5}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi + 71 \cdot 2\pi$ slijedi da je glavna mjera jednaka $\frac{5}{3}\pi$ radijana.

c) $1081° = 3 \cdot 360° + 1°$, pa je glavna mjera jednaka $1°$.

d) $-213° = -360° + 147°$, te je glavna mjera jednaka $147°$.

Zadaci 1.1.

1. Nacrtaj na brojevnoj kružnici kutove od:

a) $60°, 120°, 180°, 240°, 300°;$ b) $30°, 150°, 210°, 330°;$

c) $45°, 135°, 225°, 315°;$ d) $90°, 180°, 270°, 360°.$

2. Nacrtaj kutove od:

a) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2};$ b) $0, \pi, 2\pi;$ c) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3};$

d) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4};$ e) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}.$

3. Pretvori u stupnjeve:

a) $\frac{\pi}{2};$ b) $\frac{3\pi}{2};$ c) $\frac{\pi}{4};$ d) $\frac{3\pi}{4};$ e) $\frac{5\pi}{4};$ f) $\frac{\pi}{6};$

g) $\frac{\pi}{3};$ h) $\frac{2\pi}{3};$ i) $\frac{\pi}{8};$ j) $\frac{3\pi}{8};$ k) $\frac{\pi}{12};$ l) $\frac{7\pi}{12}.$

4. Pretvori u stupnjeve, minute i sekunde:

a) 1.5 rad; b) 3 rad; c) 0.5 rad; d) 1.2 rad; e) 1.32 rad.

5. Pretvori u radijane i skiciraj na kružnici:

a) $60°;$ b) $90°;$ c) $180°;$ d) $210°;$

e) $225°;$ f) $135°;$ g) $270°;$ h) $330°.$

6. Pretvori u radijane:

a) $40°;$ b) $100°;$ c) $55°;$ d) $27°;$

e) $35°21';$ f) $75°34';$ g) $211°25';$ h) $321°59';$

i) $10°21'43'';$ j) $31°2'59'';$ k) $121°1'';$ l) $3401°3'20''.$

7. Nađi glavnu mjeru kutova i nacrtaj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:

a) $720°;$ b) $540°;$ c) $1080°;$ d) $3600°;$

e) $450°;$ f) $1530°;$ g) $1710°;$ h) $5670°.$

8. Nađi glavnu mjeru kutova i nacrtaj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:

a) $390°;$ b) $510°;$ c) $4110°;$ d) $1290°;$

e) $-150°;$ f) $-30°;$ g) $-2130°;$ h) $-2550°.$

9. Nađi glavnu mjeru kutova i nacrtaj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:

a) $420°;$ b) $3720°;$ c) $1320°;$ d) $2100°;$

e $-2460°$; f $-60°$; g $-240°$; h $-840°$.

10. Nađi glavnu mjeru kutova i nacrtaj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:

a $405°$; b $3645°$; c $1215°$; d $2025°$;

e $-45°$; f $-225°$; g $-2115°$; h $-1935°$.

11. Nađi glavnu mjeru kutova i skiciraj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:

a $754°$; b $395°$; c $1234°$; d $82\,175°$;

e $-49°$; f $-351°$; g $-1000°$; h $-2147°$.

12. Nađi glavnu mjeru kutova i skiciraj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:

a 3π; b 15π; c -7π; d 191π;

e 2π; f -4π; g 2002π; h -1998π.

13. Nađi glavnu mjeru kutova i skiciraj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:

a $\frac{25\pi}{6}$; b $\frac{53\pi}{6}$; c $\frac{103\pi}{6}$; d $\frac{203\pi}{6}$;

e $-\frac{\pi}{6}$; f $-\frac{17\pi}{6}$; g $-\frac{91\pi}{6}$; h $-\frac{191\pi}{6}$.

14. Nađi glavnu mjeru kutova i skiciraj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:

a $\frac{97\pi}{3}$; b $\frac{194\pi}{3}$; c $\frac{388\pi}{3}$; d $\frac{605\pi}{3}$;

e $-\frac{47\pi}{3}$; f $-\frac{190\pi}{3}$; g $-\frac{140\pi}{3}$; h $-\frac{61\pi}{3}$.

15. Nađi glavnu mjeru kutova i skiciraj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:

a $\frac{81\pi}{4}$; b $\frac{123\pi}{4}$; c $\frac{221\pi}{4}$; d $\frac{287\pi}{4}$;

e $-\frac{\pi}{4}$; f $-\frac{91\pi}{4}$; g $-\frac{157\pi}{4}$; h $-\frac{797\pi}{4}$.

16. Nađi glavnu mjeru kutova i skiciraj na brojevnoj kružnici točke pridružene tim kutovima:

a $\frac{170\pi}{13}$; b $\frac{492\pi}{23}$; c $\frac{353\pi}{10}$; d $-\frac{472\pi}{7}$;

e 10; f 12.7; g 345; h -82.

17. Napiši još bar 4 mjere kuta u radijanima čija je jedna mjera zadana:

a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{8}{3}\pi$; c) $\frac{19\pi}{4}$;

d) $-\frac{141}{4}\pi$; e) $-\frac{1999}{3}\pi$; f) $-\frac{147}{5}\pi$.

Pretvori radijanske mjere u stupnjeve.

18. Napiši još bar 4 mjere u stupnjevima kuta čija je jedna mjera zadana:

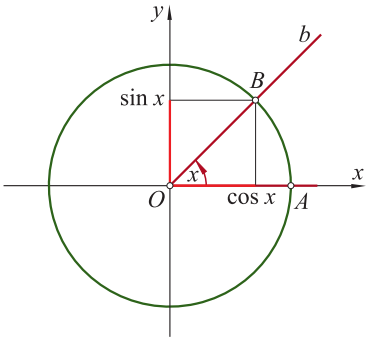
a) $330°$; b) $-60°$; c) $80°$;

d) $1440°$; e) $-1998°$; f) $-1°$.

Pretvori mjere u stupnjevima u mjere u radijanima.

1.2. Definicija trigonometrijskih funkcija

Sinus i kosinus



Smjestimo li brojevnu kružnicu k na koordinatni sustav tako da se polupravac a podudara s pozitivnim dijelom x-osi, a vrh O s ishodištem, dobivamo trigonometrijsku kružnicu. Promotrimo kut $\sphericalangle aOb$ mjere x. Krak b siječe brojevnu kružnicu u točki B koja, naravno, u tom koordinatnom sustavu ima dvije koordinate. Apscisu točke B nazivamo **kosinus broja** x, a ordinatu točke B **sinus broja** x.

Sinus realnog broja x

Sinus realnog broja x ordinata je one točke trigonometrijske kružnice koja je pridružena realnom broju x.

Kosinus realnog broja x

Kosinus realnog broja x apscisa je one točke trigonometrijske kružnice koja je pridružena realnom broju x.

Domena obiju funkcija je $\mathbf{R}$, tj. x je bilo koji realni broj. Budući da su koordinate točke B veće ili jednake -1, a manje ili jednake 1, kodomena tih funkcija je interval $[-1, 1]$. Ovo zapisujemo:

Funkcije sinus i kosinus

$$\cos : \mathbf{R} \to [-1, 1] \qquad \sin : \mathbf{R} \to [-1, 1]$$

$$x \mapsto \cos x \qquad x \mapsto \sin x$$

Primjer 1.

Izračunajmo sinus i kosinus od x, ako je x:

a) π; **b)** 1998π; **c)** $\frac{7\pi}{2}$; **d)** $\frac{325}{2}\pi$.

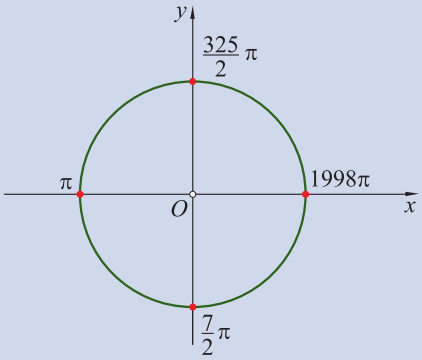
Nacrtajmo i sliku.

$\sin \pi = 0$, $\cos \pi = -1$;

$\sin 1998\pi = 0$, $\cos 1998\pi = 1$;

$\sin \frac{7\pi}{2} = -1$, $\cos \frac{7\pi}{2} = 0$;

$\sin \frac{325}{2}\pi = 1$, $\cos \frac{325}{2}\pi = 0$.

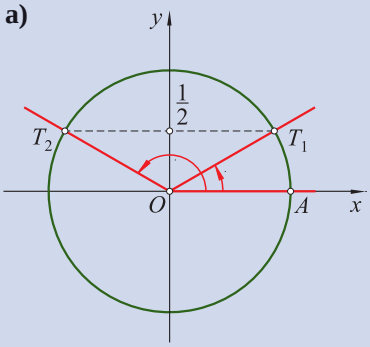


Primjer 2.

Nacrtajmo kutove mjere t za koje vrijedi:

a) $\sin t = \frac{1}{2}$; **b)** $\cos t = -\frac{1}{4}$.

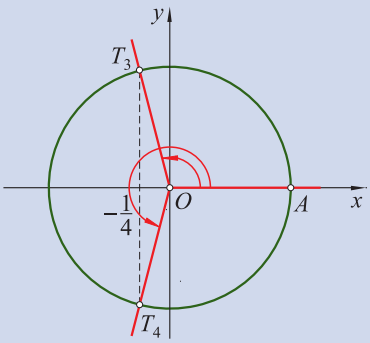
a)



Za kutove $\sphericalangle AOT_1$ *i* $\sphericalangle AOT_2$ *vrijedi*

$\sin t = \frac{1}{2}$.

b)



Za kutove $\sphericalangle AOT_3$ *i* $\sphericalangle AOT_4$ *vrijedi*

$\cos t = -\frac{1}{4}$.

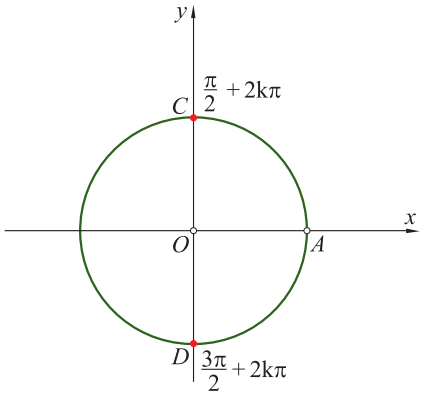
Funkcija tangens

Funkcija **tangens**, u oznaci tg, definira se pomoću funkcija sinus i kosinus ovako:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cos x \neq 0.$$

Za koje brojeve x vrijedi $\cos x \neq 0$?

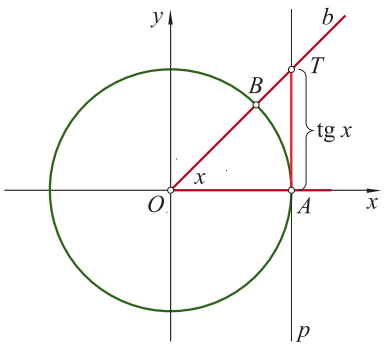
Jedine točke na brojevnoj kružnici s apscisom 0 su točke $C(0,1)$ i $D(0,-1)$ (slika desno).



C i D su točke trigonometrijske kružnice s apscisom 0.

Brojevi koji se preslikavaju u točku C su brojevi $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2} \cdots, \frac{-3\pi}{2}, \frac{-7\pi}{2}, \cdots$, tj. $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Točki D odgovaraju brojevi $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Dakle, tangens je definiran za sve realne brojeve x različite od $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

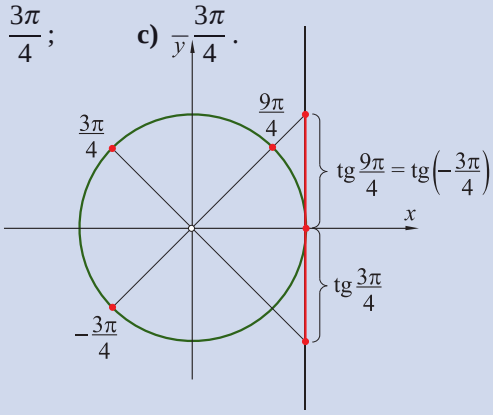


Na slici se tangens broja očitava ovako. U točki A povučemo tangentu p na kružnicu. Završni krak b kuta mjere x siječe tu tangentu u točki T koja u koordinatnom sustavu ima dvije koordinate. Druga koordinata, tj. ordinata točke T je upravo $\operatorname{tg} x$. Pravac p nazivamo **tangensna** os.

Primjer 3.

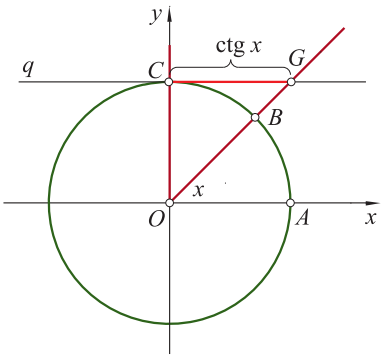
Nacrtajmo zadane kutove na trigonometrijskoj kružnici i $\operatorname{tg} x$ na tangensnoj osi ako je x:

a) $\frac{9\pi}{4}$; **b)** $\frac{3\pi}{4}$; **c)** $\frac{3\pi}{4}$.



Funkcija kotangens

Funkcija **kotangens**, u oznaci ctg, definira se ovako:



$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \sin x \neq 0.$$

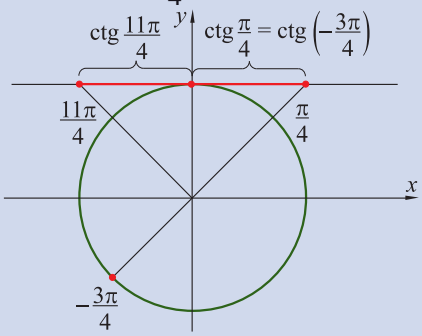
Brojevi za koje je $\sin x = 0$ su oblika $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, pa je dakle, $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ definirano za $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Na slici se kotangens očitava ovako. U točki $C(0,1)$ povucimo tangentu q na kružnicu. Završni krak kuta mjere x siječe tangentu u točki G koja u tom koordinatnom sustavu ima dvije koordinate. Njezina apscisa je kotangens broja x. Pravac q naziva se **kotangensna** os.

Primjer 4.

Nacrtajmo kutove mjere x na trigonometrijskoj kružnici i $\operatorname{ctg} x$ na kotangensnoj osi ako je x:

a) $\dfrac{\pi}{4}$; **b)** $\dfrac{11\pi}{4}$; **c)** $-\dfrac{3\pi}{4}$.



Primjer 5.

Odredimo predznake trigonometrijskih funkcija u pojedinim kvadrantima.

Ako je B u prvom kvadrantu, tada su obje koordinate te točke pozitivne, tj. $\sin x > 0$, $\cos x > 0$, te su i $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$ pozitivni.

Za ostale kvadrante vrijedi ova tablica:

kvadrant	I.	II.	III.	IV.
$\sin x$	+	+	−	−
$\cos x$	+	−	−	+
$\operatorname{tg} x$	+	−	+	−
$\operatorname{ctg} x$	+	−	+	−

Veza s trigonometrijskim funkcijama šiljastih kutova

U drugom smo razredu proučavali trigonometrijske funkcije samo šiljastih kutova. Ponovimo te definicije.

Trigonometrijske vrijednosti šiljastog kuta

Neka je ABC pravokutni trokut s hipotenuzom $\overline{AB}$ i kutom α pri vrhu A.

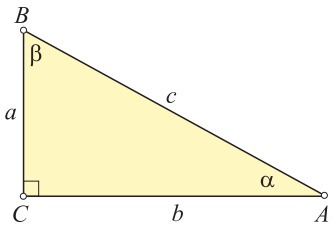
Omjer $\frac{a}{c}$ nasuprotne katete i hipotenuze naziva se **sinus kuta** α i označava sa $\sin\alpha$.

Omjer $\frac{b}{c}$ priležeće katete i hipotenuze naziva se **kosinus kuta** α i označava s $\cos\alpha$.

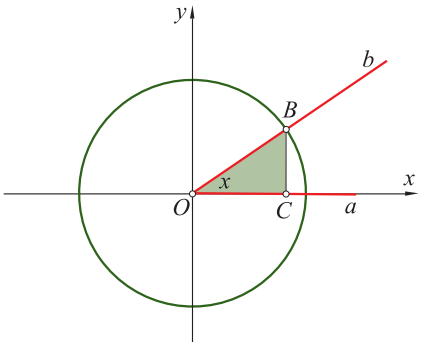
Omjer $\frac{a}{b}$ nasuprotne i priležeće katete naziva se **tangens kuta** α i označava s $\operatorname{tg}\alpha$.

Omjer $\frac{b}{a}$ priležeće i nasuprotne katete naziva se **kotangens kuta** α i označava s $\operatorname{ctg}\alpha$.

Trigonometrijske vrijednosti šiljastog kuta definiraju se pomoću pravokutnog trokuta. Vrijedi $\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$, $\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \operatorname{ctg}\beta$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\beta$. U drugom je razredu također pokazano da se vrijednosti trigonometrijskih funkcija kuta ne mijenjaju promatramo li međusobno slične trokute.



Naizgled su te definicije nešto drukčije od ovih koje smo sada uveli. Ali pokažimo da se radi o istim pojmovima.



$\sphericalangle aOb$ *je šiljasti kut s mjerom* $x \in \mathbf{R}$.

Promotrimo na slici pravokutni trokut OCB. Točka B ima koordinate $(\cos x, \sin x)$, tj. $|OC| = \cos x$, $|BC| = \sin x$. Prema onome što znamo iz drugog razreda vrijedi $\sin x = \frac{|BC|}{|OB|}$, ali budući da je kružnica jedinična, tj. $|OB| = 1$, slijedi da je $\sin x = |BC|$. Dakle, za šiljasti kut x sinus definiran u drugom razredu i u ovom poglavlju je jednak broj. Isto vrijedi i za ostale trigonometrijske funkcije.

Ovdje je mjesto i vrijeme da se prisjetimo i vrijednosti trigonometrijskih funkcija nekih specijalnih šiljastih kutova.

$t(°)$	t (rad)	$\sin t$	$\cos t$	$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} t$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Zadaci 1.2.

1. Nacrtaj trigonometrijsku kružnicu polumjera 1 dm, te pomoću kutomjera kutove

a) $10°$; b) $20°$; c) $30°$; d) $45°$; e) $75°$; f) $140°$;

g) $200°$; h) $310°$. Mjerenjem odredi sinus i kosinus tih kutova.

2. Nacrtaj kut mjere t i istakni na crtežu sinus i kosinus od t ako je t jednako:

a) 32π; b) -14π; c) -197π; d) $\frac{321\pi}{2}$; e) $-\frac{141\pi}{2}$; f) $\frac{33\pi}{2}$.

3. Odredi glavnu mjeru zadanog kuta, prikaži ga na trigonometrijskoj kružnici i istakni sinus i kosinus od x ako je x:

a) $30°$; b) $750°$; c) $-750°$; d) $2070°$; e) $60°$; f) $120°$;

g) $-420°$; h) $2100°$; i) $45°$; j) $135°$; k) $-405°$; l) $855°$.

4. Odredi glavnu mjeru zadanog kuta, prikaži ga na trigonometrijskoj kružnici i istakni sinus i kosinus od x ako je x:

a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{5\pi}{6}$; c) $\frac{17\pi}{6}$; d) $-\frac{17\pi}{6}$; e) $\frac{\pi}{3}$; f) $\frac{2\pi}{3}$;

g) $-\frac{17\pi}{3}$; h) $\frac{23\pi}{3}$; i) $\frac{\pi}{4}$; j) $\frac{3\pi}{4}$; k) $\frac{21\pi}{4}$; l) $-\frac{43\pi}{4}$.

5. Nađi $\sin t$, $\cos t$ ako je t:

a) 27π; b) -18π; c) 384π; d) $\frac{21}{2}\pi$; e) $-\frac{43}{2}\pi$; f) $-\frac{1997}{2}\pi$.

6. Nacrtaj na trigonometrijskoj kružnici točke pridružene kutu t za koje vrijedi:

a) $\sin t = \frac{3}{4}$; b) $\sin t = \frac{1}{6}$; c) $\sin t = -\frac{1}{4}$;

d) $\cos t = \frac{1}{3}$; e) $\cos t = -\frac{1}{2}$; f) $\cos t = -\frac{2}{3}$.

7. Odredi predznake funkcija sinus i kosinus brojeva

a) $427°$; b) $834°$; c) $22°15'$; d) $1237°$;

e) $\frac{18\pi}{5}$; f) $\frac{324\pi}{7}$; g) $\frac{423\pi}{8}$; h) $-\frac{123\pi}{4}$.

8. Nacrtaj dane kutove mjere x i na tangensnoj osi nacrtaj $\operatorname{tg} x$ ako je:

a) $30°$; b) $150°$; c) $210°$; d) $750°$;

e) $60°$; f) $120°$; g) $780°$; h) $-1500°$;

i) $45°$; j) $135°$; k) $855°$; l) $-135°$.

9. Nacrtaj dane kutove mjere x i na tangensnoj osi nacrtaj $\operatorname{tg} x$ ako je:

a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{7\pi}{6}$; c) $\frac{23\pi}{6}$; d) $-\frac{41\pi}{6}$;

e) $\frac{\pi}{3}$; f) $\frac{4\pi}{3}$; g) $\frac{19\pi}{3}$; h) $-\frac{101\pi}{6}$;

i) $\frac{\pi}{4}$; j) $\frac{5\pi}{4}$; k) $\frac{15\pi}{4}$; l) $-\frac{81\pi}{4}$.

10. Postoji li tangens od ovih brojeva:

a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{171\pi}{2}$; c) 12π; d) $-\frac{373}{2}\pi$;

e) -19π; f) $-\frac{321\pi}{2}$; g) $\frac{41\pi}{4}$; h) $\frac{3218}{7}\pi$?

11. Nacrtaj na trigonometrijskoj kružnici kutove mjere t za koje vrijedi:

a) $\operatorname{tg} t = 1$; b) $\operatorname{tg} t = 2$; c) $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{4}$;

d) $\operatorname{tg} t = 1.5$; e) $\operatorname{tg} t = -1.8$; f) $\operatorname{tg} t = 2$.

12. Nacrtaj kutove mjere x i istakni na kotangensnoj osi $\operatorname{ctg} x$ ako je x:

a) $30°$; b) $210°$; c) $-510°$; d) $1050°$;

e) $60°$; f) $240°$; g) $-480°$; h) $1020°$;

i) $45°$; j) $225°$; k) $855°$; l) $-45°$.

13. Nacrtaj kutove mjere x i istakni na kotangensnoj osi $\operatorname{ctg} x$ ako je x:

a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{5\pi}{6}$; c) $\frac{31\pi}{6}$; d) $\frac{43\pi}{6}$; e) $\frac{\pi}{3}$; f) $\frac{2\pi}{3}$;

g) $\frac{101\pi}{3}$; h) $-\frac{71\pi}{3}$; i) $\frac{\pi}{4}$; j) $\frac{3\pi}{4}$; k) $-\frac{73\pi}{4}$; l) $\frac{103\pi}{4}$.

14. Nacrtaj na trigonometrijskoj kružnici kutove mjere x za koje vrijedi:

a) $\operatorname{ctg} x = 1$;
b) $\operatorname{ctg} x = 2$;
c) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{2}$;
d) $\operatorname{ctg} x = -1$;
e) $\operatorname{ctg} x = 0$;
f) $\operatorname{ctg} x = -2.5$.

15. Izračunaj

a) $\sin 180^\circ + \cos 360^\circ$;
b) $2\cos 180^\circ - 4\sin 90^\circ$;
c) $3\sin 270^\circ - 5\cos 90^\circ$;
d) $8\sin 1080^\circ + 5\cos(-1080^\circ)$;
e) $\operatorname{tg} 540^\circ - 4\cos(-540^\circ)$;
f) $\operatorname{ctg} 450^\circ + 18\sin(-900^\circ)$;
g) $\dfrac{\operatorname{tg} 1440^\circ + \sin(-630^\circ)}{\sin 3600^\circ - \cos 3600^\circ}$;
h) $\dfrac{\cos^2(-270^\circ) - \cos^2 180^\circ}{\sin^2 450^\circ + \sin^2 270^\circ}$.

16. Izračunaj:

a) $\cos\pi - \cos 4\pi + \sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos(-\pi)$;
b) $\sin\frac{3\pi}{2} - \cos\pi + \sin\pi$;
c) $\sin 1996\pi - \cos 1997\pi + \operatorname{tg} 1998\pi$;
d) $\dfrac{\operatorname{tg} 14\pi + \sin(-\frac{17}{2}\pi)}{\sin 27\pi - \cos 27\pi}$;
e) $\dfrac{\sin\frac{19\pi}{2} + \cos^2(-\frac{5\pi}{2})}{\sin^2(-\frac{19\pi}{2}) + \cos(\frac{5\pi}{2})}$;
f) $\dfrac{\cos^2 7\pi - 2\sin^2 7\pi}{\cos^2\frac{17\pi}{2} + 2\sin^2\frac{17\pi}{2}}$;
g) $\dfrac{\cos\frac{21\pi}{2} + \cos 17\pi}{\sin^3\frac{9\pi}{2}}$;
h) $\dfrac{\sin^2\frac{27\pi}{2} - 3\cos^2 18\pi}{5\cos 7\pi - 4\sin\left(-\frac{7\pi}{2}\right)}$.

17. Odredi predznak funkcija sinus, kosinus, tangens i kotangens brojeva

a) 322°;
b) 431°;
c) -123°;
d) $25^\circ 30'$;
e) $\frac{14\pi}{5}$;
f) $\frac{721\pi}{8}$;
g) $\frac{3253\pi}{10}$;
h) $-\frac{234}{7}\pi$.