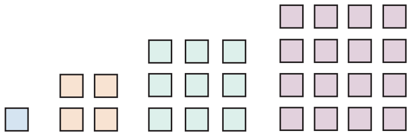
1

Nizovi i redovi

1.1. Pojam niza

U različitim časopisima za enigmatiku i testovima inteligencije nailazimo na zadatke tipa: Nastavi niz: 1, 4, 9, 16, 25,. . . .



U takvim se zadacima očekuje da čitatelj na temelju danih elemenata uoči neko pravilo, te da na temelju njega napiše jedan ili više članova niza koji nedostaju. No, što je niz? U prethodnom nizu prvi član je broj 1, drugi član je broj 4, treći je broj 9. Dakle, svakom prirodnom broju pridružen je neki broj, tj. imamo pridruživanje

$$\begin{array}{ll} 1 \mapsto 1 & \qquad 4 \mapsto 16 \\ 2 \mapsto 4 & \qquad 5 \mapsto 25 \\ 3 \mapsto 9 & \qquad n \mapsto n^2 \end{array}$$

Ovo razmatranje vrijedi i općenito.

Niz realnih brojeva je funkcija a koja svakom prirodnom broju n pridružuje neki realni broj a_n.

Kraće, niz a je funkcija $a : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $n \mapsto a_n$. Broj a_n zove se opći član niza. Za niz osim oznake a često koristimo i oznaku (a_n).

Niz možemo zadati na razne načine: formulom, rekurzijom, opisno, grafički. Mi ćemo ih zadavati formulom, tj. za opći član niza a_n bit će dana formula po kojoj se taj niz računa. Tako, na primjer, formula za opći član niza s početka teksta glasi $a_n = n^2$.

Primjer 1.

a) Napišimo nekoliko prvih članova niza parnih brojeva i formulu za opći član tog niza.

b) Napišimo prvih pet članova niza zadanog formulom $a_n = \dfrac{n+1}{2n}$.

a) Niz parnih brojeva počinje ovako 2, 4, 6, 8, 10, 12,. . . . Formula koja opisuje opći član tog niza je $a_n = 2n$.

b) $a_1 = \dfrac{1+1}{2 \cdot 1} = 1$, $a_2 = \dfrac{2+1}{2 \cdot 2} = \dfrac{3}{4}$, $a_3 = \dfrac{3+1}{2 \cdot 3} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$, $a_4 = \dfrac{4+1}{2 \cdot 4} = \dfrac{5}{8}$, $a_5 = \dfrac{5+1}{2 \cdot 5} = \dfrac{6}{10} = \dfrac{3}{5}$.

Ako promatramo samo nekoliko prvih članova niza tada govorimo o konačnom nizu: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$.

Zadaci 1.1.

1. Napiši prva 4 člana niza zadanog formulom:

a) $a_n = 2n + 1$; **b)** $a_n = n^2 - 2$; **c)** $a_n = 2^n$; **d)** $a_n = 2n^3 - 1$.

2. Niz je zadan formulom $a_n = \frac{n^2 - 1}{n}$. Izračunaj a_n, ako je n jednako:

a) 4; **b)** 10; **c)** 11; **d)** 20.

3. Napiši formulu za opći član niza kojemu je dano prvih pet članova:

a) 4, 6, 8, 10, 12,...; **b)** 1, 3, 5, 7, 9,...; **c)** $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$;

d) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \ldots$; **e)** 3, 9, 27, 81, 243,...; **f)** $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$.

1.2. Aritmetički niz

U ovom poglavlju detaljnije ćemo proučiti dvije vrste nizova koji imaju primjenu u financijskoj matematici, a i drugdje. To su aritmetički i geometrijski niz.

Niz (a_n) zovemo **aritmetičkim nizom** ako je razlika uzastopnih članova niza isti broj d, tj. ako je

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \text{za svaki } n \in N.$$

Na primjer, niz neparnih brojeva 1, 3, 5, 7, 9,... je jedan aritmetički niz, jer je razlika uzastopnih članova jednaka $d = 2$.

Broj d zovemo **razlika** ili **diferencija** aritmetičkog niza.

Za drugi član niza vrijedi: $a_2 - a_1 = d$, tj. $a_2 = a_1 + d$.

Za treći član niza vrijedi: $a_3 - a_2 = d$, $a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d$.

Za a_4 vrijedi: $a_4 - a_3 = d$, $a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d$.

Općenito za a_n vrijedi:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Očito, ako poznajemo prvi član niza a_1 i razliku d, tada možemo izračunati svaki član niza. Drugim riječima, aritmetički je niz određen svojim prvim članom a_1 i razlikom d.

Opći član aritmetičkog niza ima oblik

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Primjer 1.

Napišimo formulu za opći član aritmetičkog niza kojemu je prvi član $a_1 = 7$, a razlika $d = 12$. Napišimo i prva četiri člana niza.

Formula glasi $a_n = 7 + 12(n-1)$. Članovi niza su $a_1 = 7$, $a_2 = 19$, $a_3 = 31$, $a_4 = 43$.

Primjer 2.

Odredimo prvi član i razliku aritmetičkog niza 14, -16, -46, -76,. . . .

Očito je $a_1 = 14$. Razliku d dobivamo kao razliku dvaju uzastopnih članova:

$$d = a_2 - a_1 = -16 - 14 = -30.$$

Primjer 3.

Izračunajmo a_{18}, ako je aritmetički niz zadan ovako: 5, 8, 11,. . . .

Očito je $a_1 = 5$ i $d = a_2 - a_1 = 8 - 5 = 3$. Tada je $a_{18} = a_1 + 17d = 5 + 17 \cdot 3 = 56$.

Primjer 4.

Odredimo opći član aritmetičkog niza kojemu je šesti član 23, a deveti 35.

Iz $a_6 = 23$ i $a_9 = 35$ slijedi

$$a_1 + 5d = 23, \qquad a_1 + 8d = 35.$$

Ovo je sustav dviju jednadžbi s nepoznanicama a_1 i d čije rješenje je $a_1 = 3$, $d = 4$. Opći član niza glasi: $a_n = 3 + 4(n-1)$.

Zašto se promatrani niz zove aritmetički?
Uočimo da je $a_n - a_{n-1} = d$ i $a_{n+1} - a_n = d$, tj. $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n$.
Izrazimo li odavde a_n, dobivamo da je

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$
$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Dakle, svaki član aritmetičkog niza (osim prvog) je aritmetička sredina prethodnog i sljedećeg člana niza.

Ali, vrijedi i više. Član aritmetičkog niza je aritmetička sredina članova koji se nalaze na simetričnim mjestima prije i poslije promatranog člana, tj. $a_n = \dfrac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$ za $k < n$. Ovu formulu je lako provjeriti koristeći formulu za opći član niza. Naime, znamo da vrijedi $a_{n-k} = a_1 + (n-k-1)d$, $a_{n+k} = a_1 + (n+k-1)d$, pa je

$$\frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} = \frac{a_1 + (n-k-1)d + a_1 + (n+k-1)d}{2} = \frac{2a_1 + 2(n-1)d}{2}$$
$$= a_1 + (n-1)d = a_n.$$

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza

Primjer 5.

Marko je ovog ljeta sudjelovao u berbi jagoda. Budući da je bio početnik, prvi je dan ubrao samo 12 kg jagoda, ali je uvježbavanjem u tom poslu postigao da svaki dan ubire 1.5 kg više nego dan ranije. Koliko je ukupno kilograma jagoda Marko ubrao ako je berba trajala 7 dana?

Radi se o nizu čijih prvih sedam elemenata glasi:

$$12,\ 13.5,\ 15,\ 16.5,\ 18,\ 19.5,\ 21.$$

Ukupan zbroj je $S = 12 + 13.5 + \ldots + 19.5 + 21 = 115.5$ kg.

Koliko bi Marko ubrao da se radilo o jagodama mjesečarkama koje kontinuirano rode i da je berba trajala 100 dana? Očito je da bi bilo vrlo neracionalno ispisivati 100 članova niza te ih zbrajati. Stoga ćemo pronaći formulu koja će olakšati rješavanje tog problema. Dakle, problem je odrediti zbroj prvih n članova aritmetičkog niza, tj. odrediti zbroj $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Koristeći formulu za opći član niza imamo

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + (a_1 + (n-2)d) + (a_1 + (n-1)d) \\ &= na_1 + d(1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1)). \end{aligned}$$

Odredimo zbroj $s = 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1)$. Napišimo ga na dva načina i zbrojimo te dvije jednakosti:

$$\begin{aligned} s &= 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-3) + (n-2) + (n-1) \\ s &= (n-1) + (n-2) + (n-3) + \ldots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 2s &= \underbrace{n + n + n + \ldots + n + n + n}_{(n-1)\ \text{puta}} = n(n-1) \end{aligned}$$

pa je $s = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Sad je $S_n = na_1 + d\dfrac{n(n-1)}{2}$, tj. $S_n = \dfrac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$.

Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza dan je formulom

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d].$$

Iskoristimo li formulu za n-ti član niza: $a_n = a_1 + (n-1)d$, prethodna formula se može ovako transformirati:

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] = \frac{n}{2}[a_1 + (a_1 + (n-1)d)] = \frac{n}{2}(a_1 + a_n),$$

tj. dobili smo još jednu formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkog niza:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Primjer 6.

Izračunajmo prvi član i razliku aritmetičkog niza ako je zadano $a_5 = 18$, $S_8 = 128$.

Iz $a_5 = 18$ i $S_8 = 128$ imamo: $a_1 + 4d = 18$ i $4(2a_1 + 7d) = 128$. Rješenje tog sustava je $a_1 = 2$, $d = 4$.

Ponekad ne želimo uvoditi još jednu oznaku, u ovom slučaju S_n, pa za zapis zbroja koristimo, u matematici standardni simbol za zbroj: $\sum$. Tako se zbroj $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ kraće zapisuje ovako

$$\sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Ovaj izraz čitamo: “zbroj brojeva a_k pri čemu k ide od 1 do n”.

Zadaci 1.2.

1. Napiši prva četiri člana aritmetičkog niza ako je:

a) prvi član 4 i razlika 2;
b) prvi član 5 i razlika -3;
c) prvi član -10 i razlika 4;
d) prvi član -5 i razlika -1.

2. Izračunaj prvi član aritmetičkog niza, ako je poznata razlika d i jedan član niza:

a) $d = 2$, $a_5 = 14$;
b) $d = 3$, $a_{17} = 38$;
c) $d = -4$, $a_{12} = 128$;
d) $d = \frac{1}{2}$, $a_6 = 25$.

3. Izračunaj razliku aritmetičkog niza ako je:

a) $a_1 = 2$, $a_4 = 11$;
b) $a_1 = 3$, $a_{10} = -15$;
c) $a_1 = -8$, $a_{15} = 34$;
d) $a_1 = 2$, $a_9 = 28$.

4. Izračunaj a_1 i d aritmetičkog niza, ako je:

a) $a_3 = 10$, $a_9 = 34$;
b) $a_7 = 19$, $a_{13} = 7$;
c) $a_5 = 2$, $a_{49} = 266$;
d) $a_{24} = -53$, $a_{30} = 1$.

5. Odredi a_1 i d aritmetičkog niza, ako je

a) $a_3 + a_9 = 22$, $a_{11} + a_{25} = 70$;
b) $a_5 + a_{10} = 43$, $a_{21} + a_{15} = 106$;
c) $a_{11} - a_{19} = 16$, $a_{17} + a_{31} = 50$;
d) $a_9 - 2a_3 = -27$, $a_{11} + 10a_3 = -73$.

6. Ako je u aritmetičkom nizu (a_n) poznato da je $a_{22} = 36$, $a_{26} = 16$, koliko iznosi a_9?

7. Ako u aritmetičkom nizu vrijedi $a_9 - 3a_{14} = -77$ i $2a_{12} + 4a_{20} = 246$, odredi a_5.

8. Peć za pečenje keramike u “hladnom” stanju ima sobnu temperaturu tj. 21° C. Kad se peć uključi svake minute temperatura joj naraste za 9° C.

a) Kolika je temperatura peći nakon 20 minuta?
b) Glineni lonac treba peći na temperaturi od 318° C. Koliko je minuta potrebno za zagrijavanje peći?

9. Izračunaj zbroj prvih 20 članova aritmetičkog niza kojemu je zadano:

a) $a_1 = 4$, $d = 1$; **b)** $a_1 = 10$, $d = 2$;
c) $a_1 = 7$, $d = -2$; **d)** $a_1 = -20$, $d = -3$.

10. Izračunaj razliku aritmetičkog niza, ako je:

a) $a_1 = 14$, $S_{10} = 275$; **b)** $a_1 = -2$, $S_{19} = 304$;
c) $a_4 = 8$, $S_9 = 63$; **d)** $a_5 = 8$, $S_5 = 0$.

11. Izračunaj a_1 i d aritmetičkog niza, ako je:

a) $a_2 + a_4 = 8$, $S_{12} = 90$; **b)** $a_5 - a_2 = 6$, $S_{10} = 120$;
c) $S_2 + a_4 = 2$, $a_5 = 6$; **d)** $S_2 + S_4 = 53$, $2S_7 - S_4 = 64$.

12. Odredi zbroj svih prirodnih brojeva manjih od 250.

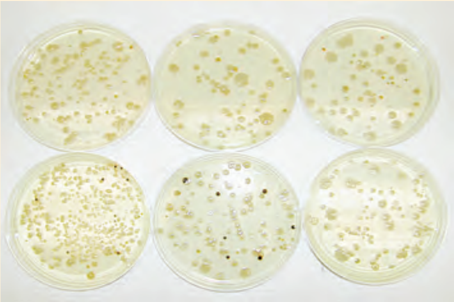
13. Izračunaj zbroj svih prirodnih brojeva između 200 i 300.

14. Koliki je zbroj svih prirodnih brojeva djeljivih s 14 između 100 i 2 000?

1.3. Geometrijski niz

Primjer 1.

Bakterije se razmnožavaju tako brzo da im se u svakoj minuti broj udvostruči. Koliko će se bakterija nalaziti u posudici nakon 6 minuta, ako je na početku mjerenja izmjereno da ih ima 4 000?



Nakon jedne minute bit će ih 8 000, nakon dvije minute bit će ih 16 000 itd. Dakle, imamo niz 8 000, 16 000, 32 000, 64 000, 128 000, 256 000 i to je broj nakon 6 minuta.

Uočimo da je kvocijent uzastopnih članova ovog niza jednak 2.

Niz (a_n) nazivamo **geometrijskim nizom** ako mu je kvocijent uzastopnih članova stalan broj q, tj. $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ za svaki $n \in \mathbf{N}$.

Broj q naziva se **kvocijent** ili **količnik** niza. Ako je a_1 prvi član geometrijskog niza, tada za a_2 vrijedi $\dfrac{a_2}{a_1} = q$, pa je $a_2 = a_1 q$.

Za a_3 vrijedi $\dfrac{a_3}{a_2} = q$, pa je $a_3 = a_2 q = (a_1 q)q = a_1 q^2$.

Za a_4 vrijedi $\dfrac{a_4}{a_3} = q$, pa je $a_4 = a_3 q = (a_1 q^2)q = a_1 q^3$.

Općenito, za a_n vrijedi $a_n = a_1 q^{n-1}$.

Opći član geometrijskog niza (a_n) ima oblik
$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Primjer 2.

Napišimo formulu za opći član i izračunajmo prva četiri člana geometrijskog niza ako je $a_1 = 4$, $q = \frac{1}{3}$.

Formula za opći član glasi: $a_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, a prva četiri člana su $a_1 = 4$, $a_2 = \frac{4}{3}$, $a_3 = \frac{4}{9}$, $a_4 = \frac{4}{27}$.

Primjer 3.

Odredimo prvi član i kvocijent geometrijskog niza $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \ldots$.

Očito je $a_1 = \frac{1}{3}$, a kvocijent je jednak $q = \frac{a_2}{a_1} = 2$.

Primjer 4.

Izračunajmo opći član niza ako je $a_{10} = 15$, $a_{15} = 480$.

Znamo da je $a_{10} = a_1 q^9$ i $a_{15} = a_1 q^{14}$. Iz $a_{10} = 15$ i $a_{15} = 480$ imamo $15 = a_1 q^9$, $480 = a_1 q^{14}$. Dijeljenjem tih dviju jednadžbi dobivamo $\frac{a_1 q^{14}}{a_1 q^9} = \frac{480}{15}$, tj. $q^5 = 32$, $q = 2$. Sad je $15 = a_1 \cdot 2^9$, tj. $a_1 = \frac{15}{512}$. Opći član niza je oblika $a_n = \frac{15}{512} \cdot 2^{n-1}$.

Ovakva vrsta nizova s razlogom je nazvana geometrijskim nizovima. Budući da je $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ i $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, tada je
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}}, \qquad \text{tj.} \qquad a_n = \sqrt{a_{n-1} a_{n+1}}.$$
Dakle, svaki član niza (osim prvoga) jednak je geometrijskoj sredini člana koji prethodi i člana koji slijedi promatrani član.

Slično vrijedi i za članove a_{n-k} i a_{n+k} simetrično raspoređene oko a_n. Naime iz $a_{n-k} = a_1 q^{n-k-1}$ i $a_{n+k} = a_1 q^{n+k-1}$ slijedi $\frac{a_{n+k}}{a_n} = \frac{a_1 q^{n+k-1}}{a_1 q^{n-1}} = q^k$ i $\frac{a_n}{a_{n-k}} = \frac{a_1 q^{n-1}}{a_1 q^{n-k-1}} = q^k$, pa je
$$\frac{a_{n+k}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-k}}, \qquad \text{tj.} \qquad a_n = \sqrt{a_{n-k}\, a_{n+k}} \quad \text{za} \quad k < n.$$

Zbroj prvih n članova geometrijskog niza

Kao i za aritmetički niz, tako ćemo i za geometrijski niz izvesti formulu za zbroj prvih n članova niza. Prvo uočimo da je

$$\begin{aligned}(1-q)&(1+q+q^2+\ldots+q^{n-2}+q^{n-1})\\ &=1+q+q^2+\ldots+q^{n-2}+q^{n-1}-q-q^2-q^3-\ldots-q^{n-1}-q^n\\ &=1-q^n,\end{aligned}$$

pa je

$$1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}\quad \text{za } q\neq 1. \qquad (*)$$

Sad za zbroj prvih n članova vrijedi

$$\begin{aligned}S_n&=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots+a_1q^{n-1}\\ &=a_1(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1})=a_1\frac{1-q^n}{1-q}\quad \text{za } q\neq 1.\end{aligned}$$

Formula za zbroj prvih n članova geometrijskog niza (a_n) glasi

$$S_n=a_1\frac{1-q^n}{1-q}\quad \text{za } q\neq 1.$$

Ako je $q=1$, tada se radi o konstantnom nizu a_1, a_1, a_1, $a_1, \ldots$ kod kojeg je zbroj prvih n članova jednak $S_n=na_1$.

Primjer 5.

Odredimo četvrti član geometrijskog niza čiji je kvocijent 2, a zbroj prvih pet članova jednak je 186.

Iz $S_5=186$ slijedi $a_1\dfrac{1-q^5}{1-q}=186$, tj. $a_1\dfrac{1-2^5}{1-2}=186$, $a_1=6$. Tada je $a_4=a_1q^3=6\cdot 2^3=48$.

Primjer 6.

U šećerani je za četiri mjeseca proizvedeno ukupno 7 989.4 tone šećera. Koliko se tona šećera proizvelo u svakom od ta četiri mjeseca, ako se proizvodnja svaki mjesec povećavala za 15% u odnosu na prethodni mjesec?

Neka je a_1 broj tona šećera proizvedenih u prvom mjesecu. U drugom mjesecu proizvodnja se povećala za 15%, pa iznosi $a_2=a_1+0.15a_1=1.15a_1$. U trećem je mjesecu proizvodnja $a_3=1.15a_2=1.15\cdot 1.15a_1=1.15^2a_1$, a u četvrtom mjesecu je $a_4=1.15a_3=1.15^3a_1$.

Vidimo da se radi o geometrijskom nizu s kvocijentom 1.15. Za četiri je mjeseca proizvedeno ukupno 7 989.4 t, tj. $S_4=7\,989.4$ t. Sad imamo $S_4=a_1\dfrac{1-q^4}{1-q}$, $7\,989.4=a_1\dfrac{1-1.15^4}{1-1.15}$, $7\,989.4=a_1\cdot\dfrac{0.749}{0.15}$, $a_1=1\,600$ t, $a_2=1.15a_1=1\,840$ t, $a_3=1.15^2a_1=2\,116$ t, $a_4=1.15^3a_1=2\,433.4$ t. Proizvodnja je po mjesecima bila redom: 1 600 t, 1 840 t, 2 116 t, 2 433.4 t.

Primjer 7.

Zbroj prva tri člana geometrijskog niza je $\frac{104}{9}$, a razlika trećeg i prvog člana je $-\frac{64}{9}$. Koji je to niz?

Geometrijski je niz određen svojim prvim članom i kvocijentom, pa ćemo iz danih podataka izračunati a_1 i q. Iz $S_3 = \frac{104}{9}$ upotrebom $(*)$ dobivamo $a_1 \frac{1-q^3}{1-q} = \frac{104}{9}$, tj. $a_1(1+q+q^2) = \frac{104}{9}$. Iz drugog uvjeta imamo $a_3 - a_1 = -\frac{64}{9}$, tj. $a_1(q^2-1) = -\frac{64}{9}$. Dijeljenjem tih dviju jednakosti dobivamo

$$\frac{a_1(1+q+q^2)}{a_1(q^2-1)} = \frac{\frac{104}{9}}{-\frac{64}{9}}, \quad \text{tj.} \quad \frac{1+q+q^2}{q^2-1} = -\frac{13}{8}.$$

Ta se jednadžba svodi na kvadratnu $21q^2 + 8q - 5 = 0$ čija rješenja su $q_1 = -\frac{5}{7}$, $q_2 = \frac{1}{3}$.

U prvom slučaju je $(a_1)_1 = \frac{-\frac{64}{9}}{q^2-1} = \frac{392}{27}$, a u drugom $(a_1)_2 = 8$.

Zadaci 1.3.

1. Napiši prva četiri člana geometrijskog niza, ako je

a) prvi član 2, kvocijent 3;

b) prvi član 12, kvocijent $\frac{1}{2}$;

c) prvi član -8, kvocijent 2;

d) prvi član -1, kvocijent -3.

2. Izračunaj prvi član geometrijskog niza ako je poznat kvocijent q i jedan član niza:

a) $q = 2$, $a_7 = 128$; **b)** $q = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{4}$; **c)** $q = 3$, $a_4 = 81$; **d)** $q = \frac{1}{3}$, $a_5 = -\frac{2}{81}$.

3. Izračunaj kvocijent geometrijskog niza ako je:

a) $a_1 = 3$, $a_3 = 12$; **b)** $a_1 = -4$, $a_4 = -108$; **c)** $a_1 = 24$, $a_5 = \frac{3}{2}$; **d)** $a_1 = 1$, $a_6 = 32$.

4. Izračunaj prvi član i kvocijent geometrijskog niza ako je:

a) $a_3 = 50$, $a_5 = 1\,250$; **b)** $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_5 = \frac{3}{16}$; **c)** $a_4 = 270$, $a_7 = 7\,290$; **d)** $a_{11} = 3\,072$, $a_7 = 192$.

5. Izračunaj prvi član i kvocijent geometrijskog niza ako je:

a) $a_2 + a_4 = 10$, $a_3 + a_5 = 20$;

b) $a_8 - a_6 = 384$, $a_6 - a_4 = 96$;

c) $a_1 + a_4 = \frac{45}{4}$, $a_1 + a_2 = 15$;

d) $a_6 + a_7 = 97\,200$, $a_8 - a_7 = 145\,800$.

6. Izračunaj S_n ako je:

a) $a_1 = 5$, $q = 2$, $n = 5$;

b) $a_1 = -16$, $q = 3$, $n = 4$.

7. Izračunaj q ako je:

a) $S_3 = 35, \ a_1 = 5;$ **b)** $S_3 = \frac{7}{4}, \ a_2 = \frac{1}{2}.$

8. Zbroj prva tri člana geometrijskog niza je 21, a produkt prvog i trećeg člana je 36. Izračunaj prvi član i kvocijent tog niza.

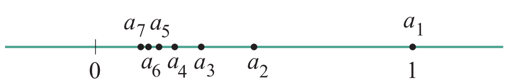
9. Neki stroj amortizira se za 5 godina uz godišnji otpis vrijednosti od 20%.

a) Ako je nabavna cijena stroja 7 800 kn, kolika je njegova cijena nakon 4 godine?

b) Napiši formulu kojom se računa vrijednost stroja nakon n godina, za $n < 5$.

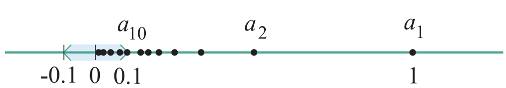
1.4. Konvergentni nizovi

Proučimo ponašanje članova niza $a_n = \frac{1}{n}$. Prvih nekoliko članova je: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$.
Nacrtajmo na brojevnom pravcu te brojeve.



Približavaju li se ovi brojevi nekom broju? Da, približavaju se broju 0. Dakle, s povećanjem broja n vrijednosti članova niza (a_n) sve više se približavaju broju 0. Kažemo da je 0 **limes** niza (a_n).

Pogledajmo koliko se članova niza nalazi u nekom simetričnom intervalu oko 0. Promotrimo prvo interval $\langle -0.1, 0.1 \rangle$. Broj a_n bit će u njemu ako je $-0.1 < a_n < 0.1$, tj. $-0.1 < \frac{1}{n} < 0.1$. Budući da je $n > 0$, lijeva nejednakost je uvijek ispunjena, ali desna vrijedi za $n > 10$. Dakle, izvan intervala $\langle -0.1, 0.1 \rangle$ nalazi se prvih deset članova niza, a svi ostali, beskonačno njih nalaze se unutar tog intervala.



Promotrimo interval $\langle -0.01, 0.01 \rangle$. U njemu se nalaze svi članovi niza za koje je $n > 100$. Opet van intervala imamo konačno mnogo članova niza, njih 100, a unutar intervala nalaze se svi ostali, beskonačno njih.

I takva se situacija ponavlja za svaki interval koji odaberemo oko 0. Naime, ako odaberemo bilo koji interval oko 0, na primjer, $\langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$, gdje je $\varepsilon > 0$, tada iz $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$ slijedi da se za $n > \frac{1}{\varepsilon}$ svi članovi niza nalaze unutar tog intervala. Ovo svojstvo limesa, da u svakom intervalu oko njega ima beskonačno članova niza, a van intervala konačno mnogo jest njegova definicija.

Za realni broj L kažemo da je **limes** niza (a_n) ako se izvan svakog intervala oko broja L nalazi konačno mnogo članova niza.

Limes niza još se naziva i granična vrijednost niza, a koristi se oznaka: $L = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Čitamo "$L$ je limes od a_n kad n teži u beskonačno". Uobičajena je i oznaka: $a_n \to L$ kad $n \to \infty$.

Niz (a_n) koji ima limes naziva se **konvergentan** niz, a niz koji nema limes naziva se **divergentan** niz.

Primjer 1.

Proučimo ponašanje danih nizova i pokušajmo odrediti njihov limes, ako je:

a) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, **b)** $a_n = \dfrac{1}{2^n}$.

a) Prvih nekoliko članova niza je $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$. Ispišimo ih u tablici u obliku decimalnih brojeva.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	0.5	0.667	0.75	0.8	0.833	0.857	0.875	0.889	0.9	0.909

Ispišimo još neke članove tog niza.

n	20	50	100	1 000	10 000	100 000
a_n	0.952	0.98	0.99	0.999	0.9999	0.999 99

Vidimo da se a_n približava broju 1, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) Tablica za prvih nekoliko članova niza izgleda ovako

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	0.5	0.25	0.125	0.0625	0.031 25	0.0156	0.0078	0.0039	0.0019

n	20	50	100	200
a_n	0.000 000 953	$8.882 \cdot 10^{-16}$	$7.889 \cdot 10^{-31}$	$6.223 \cdot 10^{-61}$

Dakle, kad n teži u beskonačno, a_n se približava 0. Dakle, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.

Općenito za svaki $-1 < q < 1$ vrijedi da je $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,

Primjer 2.

Proučite ponašanje nizova:

a) $a_n = n - 1$, **b)** $a_n = (-1)^n$, **c)** $a_n = 2^n$.

a)

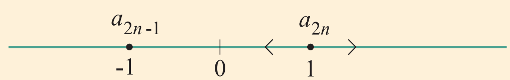
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a_n	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Vidimo da članovi niza $a_n = n-1$ rastu neograničeno i ne približavaju se nijednom broju. Dakle, ovaj niz nema limesa, divergentan je. Ali budući da mu članovi neograničeno rastu, za takav niz pišemo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ i kažemo da teži u beskonačnost.

b)

n	1	2	3	4	5	6	7	8
a_n	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

Vrijednosti članova ovog niza su -1 ili 1,



Ovaj niz nema limesa. Na prvi pogled izgleda da se 1 ili -1 mogu uzeti kao limes, ali kad bi na primjer 1 bio limes, tada bi se u svakom malom intervalu oko 1 nalazilo beskonačno mnogo članova niza a_n (svi s parnim indeksima), ali izvan intervala bi se nalazilo također beskonačno mnogo članova niza a_n (svi s neparnim indeksima). Dakle, 1 nije limes. Slično razmatranje se provodi i za -1. Niz $(-1)^n$ je divergentan.

c)

n	1	2	3	4	5	6	7
$a_n = 2^n$	2	4	8	16	32	64	128

Članovi niza neograničeno rastu, niz je divergentan, ali teži u ∞, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

Općenito za svaki $q > 1$ vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$.

Računanje s limesima

Proučavati niz, određivati moguće kandidate za njegov limes, dokazivati da se radi ili ne o limesu je za mnoge nizove komplicirano. Zato se pri računanju limesa služimo poznavanjem limesa nekih osnovnih nizova i sljedećim teoremom.

Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi realnih brojeva s limesima A i B redom. Tada je

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B,$$

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = cA \quad \text{za bilo koji } c \in R,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B} \quad \text{ako su } b_n \text{ i } B \text{ različiti od } 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n)^k = A^k.$$

Osnovni limesi koji se koriste pri računanju su:

$$\lim_{n\to\infty} a = a,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \infty & \text{ako je } q > 1, \\ 1 & \text{ako je } q = 1, \\ 0 & \text{ako je } -1 < q < 1. \end{cases}$$

Primjer 3.

Izračunajmo limese:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n}$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}$, **c)** $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^4}\right)$.

a) Budući da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, korištenjem formule $\lim\limits_{n\to\infty} (ca_n) = cA$ dobivamo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n} = 4 \cdot 0 = 0$.

b) Znamo da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, pa korištenjem pravila $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^k = A^k$ dobivamo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0^3 = 0$.

c) Budući da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 2 \cdot 0 = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} = 0^4 = 0$, prema pravilu $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = A + B$ imamo da je $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^4}\right) = 0 + 0 = 0$.

Primjer 4.

Izračunajmo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^3 - 5n + 1}{3n^3 + 7n^2 + 10}.$$

Kad bi stavili da je $a_n = 8n^3 - 5n + 1$, $b_n = 3n^3 + 7n^2 + 10$, nizovi (a_n) i (b_n) nisu konvergentni, pa ne možemo primijeniti prethodna svojstva. Zato postupamo na sljedeći način.

Podijelimo brojnik i nazivnik s najvećom potencijom. To je n^3.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{8n^3 - 5n + 1}{3n^3 + 7n^2 + 10} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{8n^3 - 5n + 1}{n^3}}{\dfrac{3n^3 + 7n^2 + 10}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8 - \dfrac{5}{n^2} + \dfrac{1}{n^3}}{3 + \dfrac{7}{n} + \dfrac{10}{n^3}} = \frac{8 - 0 + 0}{3 + 0 + 0} = \frac{8}{3},$$

jer je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^2} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n} = 0$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10}{n^3}$, pa je limes brojnika 8, a limes nazivnika 3.

Primjer 5.

Izračunajmo:

a) $\lim_{n\to\infty}(4\cdot 0.3^n)$, **b)** $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{2^n}$.

a) Budući da je $0.3<1$, slijedi da je $\lim_{n\to\infty}0.3^n=0$, te je $\lim_{n\to\infty}(4\cdot 0.3^n)=4\cdot 0=0$.

b) Razlomak $\frac{3^n}{2^n}$ možemo pisati kao $\left(\frac{3}{2}\right)^n$. Dakle, baza potencije je $\frac{3}{2}$, a to je broj veći od 1, pa je ovaj niz divergentan, ali teži k $\to\infty$, tj. $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{2^n}=\infty$.

Zadaci 1.4.

1. Proučavajući prvih nekoliko članova niza procijeni je li dani niz konvergentan ili divergentan.

a) $a_n=\frac{1}{n+2}$; **b)** $a_n=\frac{2}{n}$; **c)** $a_n=\frac{1}{n^2}$; **d)** $a_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}$;
e) $a_n=n+2$; **f)** $a_n=3n$; **g)** $a_n=4$; **h)** $a_n=5\cdot(-1)^n$.

2. Izračunaj sljedeće limese:

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n}$; **b)** $\lim_{n\to\infty}\frac{6}{n+1}$; **c)** $\lim_{n\to\infty}(7n+4)$; **d)** $\lim_{n\to\infty}(n^8+6n^5)$;
e) $\lim_{n\to\infty}3^n$; **f)** $\lim_{n\to\infty}\left(2\cdot\frac{4^n}{5^n}\right)$; **g)** $\lim_{n\to\infty}0.25^n$; **h)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{n}$;
i) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-2n+1}{3n^2+4n+5}$; **j)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^8}{7n^8+1}$; **k)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^3+1}$; **l)** $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{n+2}$.

1.5. Geometrijski red

Nakon što smo proučili općenito pojam limesa bilo kojeg niza, posvetimo opet pažnju geometrijskom nizu a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, a_1q^4, ...
Upoznali smo formulu za računanje zbroja prvih n članova tog niza. Tako je

$$S_1=a_1,$$

$$S_2=a_1+a_2=a_1\frac{1-q^2}{1-q},$$

$$S_3=a_1+a_2+a_3=a_1\frac{1-q^3}{1-q},$$

$$S_4=a_1+a_2+a_3+a_4=a_1\frac{1-q^4}{1-q},\ldots.$$

I ovi zbrojevi tvore jedan niz (S_n). Ti zbrojevi su početni dijelovi ovakvog izraza:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \ldots .$$

Taj beskonačni zbroj nazivamo **red** i označavamo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, a zbrojeve S_n zovemo **parcijalnim zbrojevima** tog reda. U slučaju kad je a_n geometrijski niz, takav beskonačni zbroj zovemo geometrijski red.

Reći ćemo da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **konvergira** i ima zbroj S, ako niz njegovih parcijalnih zbrojeva (S_n) konvergira broju S i pisat ćemo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Poznavajući formulu za zbroj prvih n članova geometrijskog niza, tj. za parcijalne zbrojeve geometrijskog reda i poznavajući osnovne limese, lako je odrediti zbroj geometrijskog reda.

Promotrimo limes parcijalnih zbrojeva geometrijskog reda

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Ako je $-1 < q < 1$, tada $q^n \to 0$ kad $n \to \infty$, pa je

$$\lim_{n\to\infty} S_n = a_1 \frac{1}{1-q},$$

tj. geometrijski red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ konvergira i zbroj mu je $S = a_1 \dfrac{1}{1-q}$.

Ako je $q > 1$ ili $q < -1$, tada niz (q^n) divergira, pa i niz S_n divergira, tj. geometrijski red ne konvergira, tj. divergira.

Geometrijski red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$, $a_1 \neq 0$ konvergira samo ako je $-1 < q < 1$ i tada mu je zbroj jednak

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

U ostalim slučajevima geometrijski red divergira.

Primjer 1.

Izračunajmo zbroj reda $3 + \dfrac{3}{4} + \dfrac{3}{16} + \dfrac{3}{64} + \ldots$.

Taj je red geometrijski s prvim članom $a_1 = 3$ i kvocijentom $q = \dfrac{1}{4}$. Budući da je $-1 < q < 1$, red je konvergentan i njegov zbroj je $S = a_1 \dfrac{1}{1-q} = 3 \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{4}} = 4$.