1.

Analiza linearnih mreža istosmjerne struje

1.1. Električna mreža

Složeni strujni krugovi s više izvora zovu se električne mreže (sl. 1.1). Analizirat ćemo linearne mreže istosmjerne struje, a analiza svih električnih mreža zasniva se na Kirchhoffovim zakonima. Na temelju Kirchhoffovih zakona razradit ćemo metode analize i neke teoreme koji skraćuju postupak rješavanja određenih problema. Svaka mreža ima grane, čvorove i konture.

Grana je dio mreže kroz koju teče ista struja a svi elementi su spojeni u seriju. Strujni izvor nije grana.

Čvor je mjesto gdje se spajaju tri i više grana.

Kontura je zatvoreni put sastavljen od grana mreže. U konturi ne može biti strujni izvor.

Cilj analize mreže je da se odrede struje u svim granama neke mreže u kojoj su poznati svi izvori i svi elementi mreže. Broj nepoznatih struja u mreži jednak je broju grana. Zbog toga treba napisati isti broj neovisnih jednadžbi mreže. Te jednadžbe se pišu na osnovi Kirchhoffovih zakona.

Osnovni kriterij da se dobije nezavisna jednadžba je da se pri pisanju svake jednadžbe uvijek uzme bar jedna nova grana. Na osnovi te zakonitosti može se pokazati koliko se nezavisnih jednadžbi može napisati pomoću I. Kirchhoffovog zakona, a koliko pomoću II. Kirchhoffovog zakona.

Ako u nekoj mreži ima g-grana i $\check{c}$-čvorova, onda se **po I. Kirchhoffovom zakonu** može napisati $(\check{c}-1)$ **nezavisna jednadžba**, a **po II. Kirchhoffovom zakonu** $(g-\check{c}+1)$ **nezavina jednadžba**.

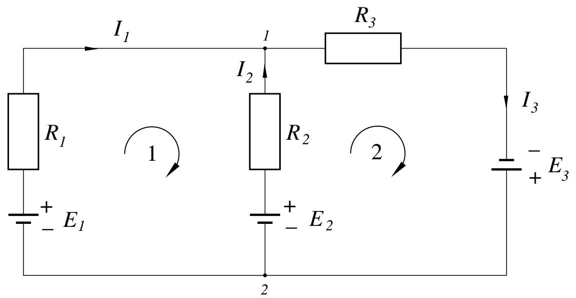
Na tome se temelji metoda izravne primjene Kirchhoffovih zakona.

Ponovit ćemo Kirchhoffove zakone i prikazati kako se oni primijenjuju na mreži prikazanoj na slici 1.1.

I. Kirchhoffov zakon ili zakon čvora
Suma struja koje ulaze u čvor jednaka je sumi struja koje izlaze iz tog čvora.

Taj zakon ćemo ilustrirati na čvoru (1) složenog strujnog kruga na slici 1.1. Struje I_1 i I_2 ulaze u čvor (1), a struja I_3 izlazi iz toga čvora pa je

$$(\check{c}.\ 1) \qquad I_1 + I_2 = I_3. \tag{1.1}$$



Sl. 1.1. Shema razgranatog strujnog kruga.

II. Kirchhoffov zakon ili zakon konture
Suma svih elektromotornih sila (EMS) u nekoj zatvorenoj konturi jednaka je sumi svih padova napona u toj konturi.

Električna mreža podsjeća na prozorska okna. Svako okno predstavlja jednu nezavisnu konturu. Prije pisanja konturnih jednadžbi treba se držati sljedećih točaka.

1. Prvo treba odabrati konture i proizvoljno ucrtati smjerove obilaska svake konture (sl. 1.1).
2. Zatim treba proizvoljno ucrtati referentne smjerove struja grana. Kod računanja sume EMS-a kao i sume padova napona treba voditi računa o predznaku EMS, odnosno pada napona.
3. Ako se smjer djelovanja EMS poklapa sa smjerom obilaska konture onda je predznak plus $(+)$, a ako su ta dva smjera različita tada se uzima predznak minus $(-)$.
4. Isto tako ako se smjer obilaska i smjer struje grane poklapaju onda je predznak pada napona plus $(+)$, a ako su ta dva smjera suprotna onda

je predznak pada napona te grane minus $(-)$. Kao primjer napisat ćemo konturne jednadžbe kontura (1) i (2) u shemi na slici 1.1.

$$\text{(kontura 1)} \qquad E_1 - E_2 = I_1R_1 - I_2R_2$$

$$\text{(kontura 2)} \qquad E_2 + E_3 = I_2R_2 + I_3R_3$$

Prije metoda za rješavanje složenih strujnih krugova odredit ćemo mosni spoj, a zatim pretvorbu spoja u trokut u spoj zvijezda.

1.2. Mosni spoj

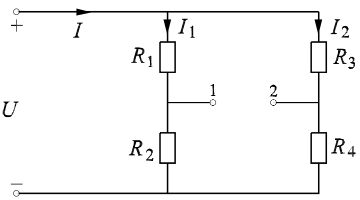
Kao prvo ćemo analizirati dva paralelna naponska djelila (sl. 1.2).

Kroz prvo djelilo teče struja I_1, a kroz drugo struja I_2. Napon između priključnica (1) i (2) možemo odrediti na dva načina:

$$U_{12} = -U_1 + U_3 = -I_1R_1 + I_2R_3,$$

odnosno

$$U_{12} = U_2 - U_4 = I_1R_2 - I_2R_4.$$



Sl. 1.2. Dva paralelna naponska djelila.

Ako je taj napon jednak nuli (U_{12}), tada se iz prve jednadžbe dobije da je

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_3}{R_1}$$

a iz druge

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_4}{R_2}.$$

Ako se te dvije jednadžbe izjednače dobije se da je

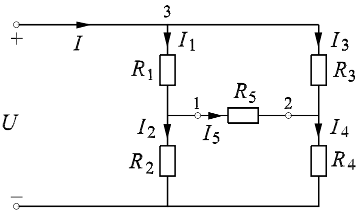
$$\frac{R_4}{R_2} = \frac{R_3}{R_1},$$

odnosno

$$\boxed{R_1R_4 = R_2R_3}. \qquad (1.2)$$

Te relacije predstavljaju uvjete pod kojima je napon $U_{12} = 0$. Ako se u slučaju takvog odnosa otpora između priključnica (1) i (2) stavi otpor R_5 (sl. 1.3) kroz njega neće teći struja ($I_5 = 0$).

Takav spoj otpora zove se **mosni spoj** koji se koristi za mjerenje nepoznatog otpora. Nepoznati otpor može biti jedan od prva četiri, dva se mogu podešavati sve dotle dok struja I_5 ne bude jednaka nuli. Tada je most u ravnoteži pa vrijedi relacija (1.2).



Sl. 1.3. Mosni spoj otpora.

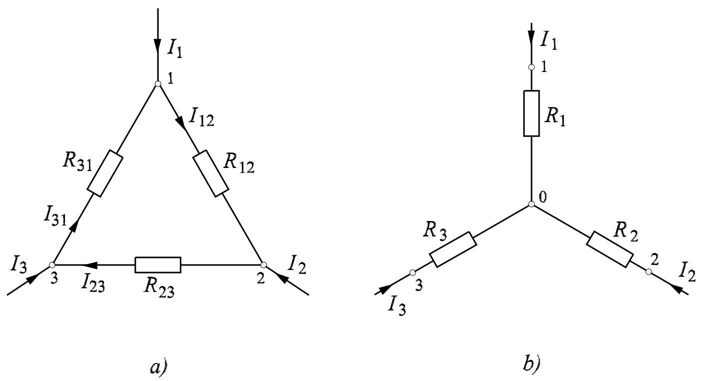
U tom slučaju taj je spoj ekvivalentan spoju na slici 1.3 i može se naći ukupni otpor spoja.

Ako most nije u ravnoteži tada se za spoj na slici 1.3 ne može odrediti ukupni otpor na dosada poznati način, jer to nije paralelni serijski spoj. Taj spoj ima dva spoja u zvijezdu i dva spoja u trokut što ćemo detaljnije razmatrati u idućoj točki.

1.3. Spoj otpora u trokut i zvijezdu

1.3.1. Pretvorba trokuta u zvijezdu

Kako smo vidjeli u prethodnoj točki otpori mogu biti spojeni u trokut (sl. 1.4a) i zvijezdu (sl. 1.4b).



Sl. 1.4. Spojevi otpora: a) u trokut; b) u zvijezdu.

Spojevi otpora u trokut i zvijezdu (sl. 1.4) razapeti su između triju čvorišta (1, 2, 3) i sastavni su dio nekog strujnog kruga iz kojeg dolaze struje I_1, I_2 i I_3.

Naponi između čvorišta 1, 2, 3 u spoju trokut bit će jednaki istim naponima u spoju zvijezda ako vrijedi da je

$$\boxed{R_1 = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_\triangle}; \quad R_2 = \frac{R_{12} \cdot R_{23}}{R_\triangle}; \quad R_3 = \frac{R_{23} \cdot R_{31}}{R_\triangle},} \tag{1.3}$$

gdje je $R_\triangle = R_{12} + R_{23} + R_{31}$. To znači ako se spoj otpora u trokut želi zamjeniti ekvivalentnim spojem otpora u zvijezdu, tada se otpori ekvivalentne zvijezde računaju po formuli (1.3). Pri tome treba definirati novi čvor (0) koji se zove zvjezdište (sl. 1.4b).

1.3.2. Pretvorba zvijezde u trokut

Ako se želi spoj **otpora u zvijezdu** (sl. 1.4b) **zamjeniti ekvivalentnim spojem otpora u trokut** (sl. 1.4a), tada za otpore trokuta vrijede sljedeće relacije

$$\boxed{\begin{aligned} R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3} \\ R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1} \\ R_{31} &= R_3 + R_1 + \frac{R_3 \cdot R_1}{R_2} \end{aligned}}\ . \tag{1.4}$$

Sada se uz pomoć gornjih pretvorbi može odrediti ukupni otpor na slici 1.3.

Primjer 1.1. *Odredite ukupni otpor spoja na slici 1.5a pretvorbom: a) jednog trokuta u zvijezdu; b) jedne zvijezde u trokut. Zadano:* $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $R_4 = 4\Omega$ *i* $R_5 = 2\Omega$.

Rješenje. **a)** Trokut sa čvorovima (1), (2), (3) (sl. 1.5a) pretvorit ćemo u ekvivalentnu zvijezdu (sl. 1.5b). Otpor toga trokuta je $R_\triangle = R_1 + R_3 + R_5 = 10\Omega$, pa su otpori ekvivalentne zvijezde

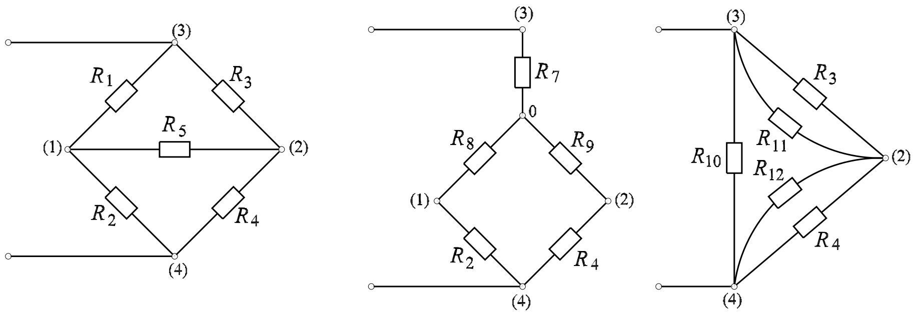
$$R_7 = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_\triangle} = \frac{3 \cdot 5}{10} = 1.5\Omega$$

$$R_8 = \frac{R_1 \cdot R_5}{R_\triangle} = \frac{3 \cdot 2}{10} = 0.6\Omega$$

$$R_9 = \frac{R_3 \cdot R_5}{R_\triangle} = \frac{5 \cdot 2}{10} = 1\Omega$$

Sada se može izračunati ukupni otpor

$$R = R_7 + \frac{(R_2 + R_8)(R_4 + R_9)}{R_2 + R_8 + R_4 + R_9} = 1.5 + \frac{(2 + 0.6)(4 + 1)}{2 + 0.6 + 4 + 1} = 3.21\Omega.$$



a) *b)* *c)*

Sl. 1.5.

b) Sada ćemo zvijezdu otpora R_1, R_2 i R_5 sa zvjezdištem u točki (1) (sl. 1.5a) pretvoriti u ekvivalentni trokut otpora R_{10}, R_{11} i R_{12} (sl. 1.5c).

Otpori ekvivalentnog trokuta

$$R_{10} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_5} = 3 + 2 + \frac{3 \cdot 2}{2} = 8\Omega$$

$$R_{11} = R_1 + R_5 + \frac{R_1 \cdot R_5}{R_2} = 3 + 2 + \frac{3 \cdot 2}{2} = 8\Omega$$

$$R_{12} = R_2 + R_5 + \frac{R_2 \cdot R_5}{R_1} = 2 + 2 + \frac{2 \cdot 2}{3} = \frac{16}{3}\Omega$$

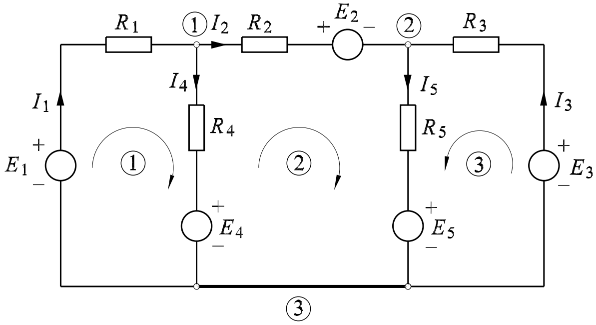
Ukupni otpor

$$R = \frac{R_{10}\left(\dfrac{R_3 \cdot R_{11}}{R_3 + R_{11}} + \dfrac{R_{12} \cdot R_4}{R_{12} + R_4}\right)}{R_{10} + \dfrac{R_3 \cdot R_{11}}{R_3 + R_{11}} + \dfrac{R_{12} \cdot R_4}{R_{12} + R_4}} + R_4 = 3.21\Omega.$$

1.4. Metoda izravne primjene Kirchhoffovih zakona

1. Prvo treba vidjeti da li su ucrtani polariteti svih EMS.
2. Zatim treba proizvoljno odrediti i ucrtati referentne smjerove svih struja grana, koje se obilježe slovom I s indeksom (sl. 1.6).
3. Nakon toga se obilježe i numeriraju svi čvorovi.
4. Na osnovi relacije $(g - \check{c} + 1)$ računa se broj nezavisnih kontura. Taj se postupak može pojednostaviti tako da se svako okno mreže odabere kao jedna kontura.
5. Svakoj konturi treba ucrtati smjer obilaska te konture.

Zatim treba voditi računa o predznaku padova napona i EMS. Kada se smjer struje grana poklapa sa smjerom obilaska, onda se uzima da je predznak padova napona plus, a u suprotnom slučaju minus. Ako se smjer djelovanja EMS poklapa sa smjerom obilaska konture, tada se uzima predznak plus, a u suprotnom minus. Smjer djelovanja EMS je od njenog negativnog prema pozitivnom polaritetu.



Sl. 1.6. Električna mreža.

Sada možemo za mrežu na slici 1.6 napisati pet jednadžbi — dvije jednadžbe po I. Kirchhoffovom zakonu i tri jednadžbe po II. Kirchhoffovom zakonu ovako:

$$
\begin{array}{lll}
(\text{č. } 1) & I_1 = I_2 + I_4 & (1) \\
(\text{č. } 2) & I_2 + I_3 = I_5 & (2) \\
(\text{k. } 1) & I_1R_1 + I_4R_4 = E_1 - E_4 & (3) \\
(\text{k. } 2) & I_2R_2 + I_5R_5 - I_4R_4 = E_4 - E_2 - E_5 & (4) \\
(\text{k. } 3) & I_3R_3 + I_5R_5 = E_3 - E_5 & (5)
\end{array}
\tag{1.5}
$$

Mana ove metode je da ima veliki broj jednadžbi. One se mogu rješavati nekom vama poznatom metodom. Jedna od metoda je metoda eliminacije. Ako iz prve jednadžbe izlučimo

$$I_4 = I_1 - I_2,$$

a iz druge

$$I_5 = I_2 + I_3$$

i uvrstimo u ostale tri jednadžbe dobiju se tri jednadžbe s tri nepoznanice (I_1, I_2, I_3)

$$
\begin{array}{lll}
(\text{k. } 1) & I_1(R_1 + R_4) - I_2R_4 = E_1 - E_4 & (3) \\
(\text{k. } 2) & I_2(R_2 + R_4 + R_5) - I_1R_4 + I_3R_5 = E_4 - E_2 - E_5 & (4) \\
(\text{k. } 3) & I_3(R_3 + R_5) + I_2R_5 = E_3 - E_5 & (5)
\end{array}
\tag{1.6}
$$

Na taj način smo eliminirali struje unutarnjih grana (I_4 i I_5), a ostale su samo struje perifernih grana (I_1, I_2, I_3).

Istim postupkom iz jednadžbe (5) izluči se struja I_3 i uvrsti u jednadžbe (3) i (4). Na taj način bismo dobili dvije jednadžbe s dvije nepoznanice (I_1 i I_2), koje više nije teško riješiti. To nećemo sada do kraja sprovesti jer nam je taj postupak poznat iz matematike.

Uočite da u jednadžbama (1.6) postoji neka pravilnost koja ukazuje da struje perifernih grana I_1, I_2 i I_3 teku po cijeloj konturi. Ta pravilnost nam omogućuje uvođenje nove metode koju ćemo razraditi u idućoj točki.

1.5. Metoda konturnih struja

Metoda konturnih struja se temelji na II. Kirchhoffovom zakonu.

Ako u prethodnom primjeru (sl. 1.5) umjesto perifernih struja uvedemo tzv. **konturne struje** (sl. 1.6)

$$I_1 = I_{11}, \quad I_2 = I_{22}, \quad I_3 = I_{33},$$

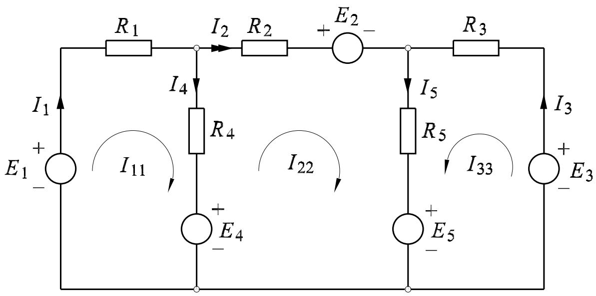
tada se i preostale dvije struje grana također mogu izraziti pomoću zbroja konturnih struja koje prolaze kroz tu granu. Pritom treba voditi računa o smjerovima konturnih struja u odnosu na smjer struje grane, pa se za te dvije struje grana može pisati da je

$$I_4 = I_{11} - I_{22}; \quad I_5 = I_{33} + I_{22}.$$

Uvrštenjem tih vrijednosti u jednadžbe (1.6) dobije se sustav konturnih jednadžbi izraženih samo pomoću tzv. konturnih struja.

$$\begin{aligned}
&(\text{k. }1) \qquad I_{11}(R_1 + R_4) - I_{22}R_4 = E_1 - E_4 \\
&(\text{k. }2) \qquad I_{22}(R_2 + R_4 + R_5) - I_{11}R_4 + I_{33}R_5 = E_4 - E_2 - E_5 \\
&(\text{k. }3) \qquad I_{33}(R_3 + R_5) + I_{22}R_5 = E_3 - E_5\,.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Na taj način smo već u startu smanjili broj jednadžbi.

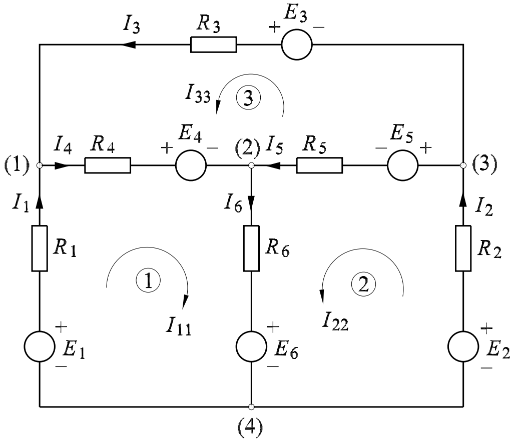


Sl. 1.7. Konturne struje.

Kod pisanja tih jednadžbi treba voditi računa da struja čiju jednadžbu pišemo množi sve otpore u toj konturi (suma otpora konture), ostale konturne struje množe otpor one grane koja je zajednička dvjema konturama, a predznak toga produkta ovisi o smjeru konturnih struja kroz tu zajedničku granu. Ako se smjerovi kontura podudaraju tada je predznak plus, a u suprotnom slučaju minus.

Tako npr. jednadžba konture 2 sadrži produkt struje I_{22} sa sumom otpora konture 2 $(R_2 + R_4 + R_5)$. Kontura 2 graniči s konturom 1 preko grane 4, a smjerovi konturnih struja I_{22} i I_{11} su suprotni pa je produkt susjedne konturne struje I_{11} i otpora R_4 negativan $(-I_{22} \cdot R_4)$. Kontura 2 graniči s konturom 3 preko otpora R_5, a smjerovi struja kroz taj otpor se poklapaju pa je predznak plus, tj. $I_{33} \cdot R_5$ (jed. 1.7 – k2). Ako neke konture ne graniče, tada nema tih konturnih struja u tim jednadžbama. Npr. konture ① i ③ ne graniče pa se u jednadžbi k① ne pojavljuje konturna struja I_{33}.

Rješavanjem sustava jednadžbi (1.7) dobiju se iznosi konturnih struja, pomoću kojih se mogu odrediti sve struje grana na način opisan na početku ove točke.



Sl. 1.8.

Primjer 1.2. *Za mrežu na slici 1.8 napišite dovoljan broj jednadžbi: a) metodom izravne primjene Kirchhoffovih zakona; b) metodom konturne struje.*

Rješenje. Mreža ima $g = 6$ grana i $\check{c} = 4$ čvora. Referentni smjerovi struje grana su ucrtani proizvoljno. Po I. Kirchhoffovom zakonu može se napisati $(4-1) = 3$ nezavisne jednadžbe, a po drugom $(6-4+1) = 3$ nezavisne konturne jednadžbe. Na slici 1.8 su odabrane te tri konture i ucrtani su smjerovi obilaska tih kontura pri čemu su označene konturne struje.

a) Po metodi izravne primjene Kirchhoffovih zakona može se napisati šest sljedećih jednadžbi:

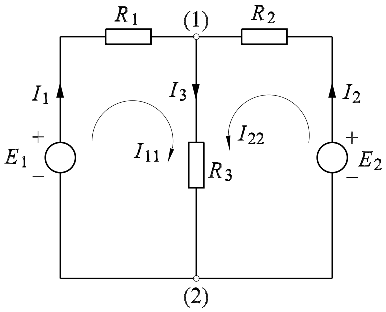
$$
\begin{array}{ll}
(\check{c}.\ 1) & I_1 + I_3 = I_4 \\
(\check{c}.\ 2) & I_4 + I_5 = I_6 \\
(\check{c}.\ 3) & I_2 = I_3 + I_5 \\
(k.\ ①) & I_1R_1 + I_4R_4 + I_6R_6 = E_1 - E_4 - E_6 \\
(k.\ ②) & I_2R_2 + I_5R_5 + I_6R_6 = E_2 - E_5 - E_6 \\
(k.\ ③) & I_3R_3 + I_4R_4 - I_5R_5 = E_3 - E_4 + E_5\,.
\end{array}
$$

b) Po metodi konturnih struja mogu se napisati tri nezavisne konturne jednadžbe:

$$
\begin{array}{ll}
(k.\ ①) & I_{11}(R_1 + R_4 + R_6) + I_{22}R_6 + I_{33}R_4 = E_1 - E_4 - E_6 \\
(k.\ ②) & I_{22}(R_2 + R_5 + R_6) + I_{11}R_6 - I_{33}R_5 = E_2 - E_5 - E_6 \\
(k.\ ③) & I_{33}(R_3 + R_4 + R_5) + I_{11}R_4 - I_{22}R_5 = E_3 - E_4 + E_5\,.
\end{array}
$$

Primjer 1.3. *Odredite struje grana u mreži na slici 1.8a. Zadano:* $E_1 = 20\,V$, $E_2 = 10\,V$, $R_1 = 3\Omega$, $R_2 = 4\Omega$ *i* $R_3 = 5\Omega$.

Rješenje. Mreža ima tri grane i dva čvora. Zadatak ćemo riješiti metodom konturnih struja. Na slici 1.8a ucrtani su referentni smjerovi struja grana i konturnih struja.



Sl. 1.8a.

Konturne jednadžbe su:

$$I_{11}(R_1 + R_3) + I_{22}R_3 = E_1 \qquad (1)$$
$$I_{22}(R_2 + R_3) + I_{11}R_3 = E_2 \qquad (2).$$

Uvrštenjem numeričkih vrijenosti dobije se

$$8I_{11} + 5I_{22} = 20 \qquad (1)$$
$$9I_{22} + 5I_{11} = 10 \qquad (2).$$

Iz jednadžbe (1) izlučit ćemo struju I_{22}

$$I_{22} = \frac{20}{5} - \frac{8}{5}I_{11} = 4 - 1.6I_{11}.$$

Uvrštenjem u jednadžbu (2) dobije se da je konturna struja

$$I_{11} = 2.766\,\mathrm{A},$$

a zatim uvrštenjem u prethodnu jednadžbu dobije se da je

$$I_{22} = -0.4255\ \mathrm{A}.$$

Sada se mogu izračunti tražene struje grana

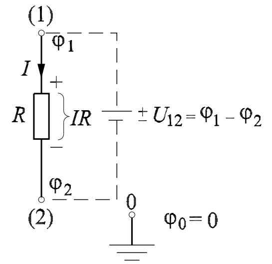
$$I_1 = I_{11} = 2.766\,\mathrm{A}$$
$$I_2 = I_{22} = -0.4255\,\mathrm{A}$$
$$I_3 = I_{11} + I_{22} = 2.3405\,\mathrm{A}$$

1.6. Metoda potencijala čvorova

Svaki čvor mreže ima određeni potencijal prema nekoj referentnoj točki. **Ako se jedan čvor izabere za referentni s potencijalom nula, tada u mreži ima (č − 1) nepoznatih potencijala**. Struja svake grane mreže može se izraziti pomoću potencijala čvorova između kojih je razapeta grana. Uvrštenjem tako napisanih struja grana u nezavisne jednadžbe čvorova mreže dobije se (č − 1) jednadžba u kojoj su nepoznanice potencijali čvorova.

Prvo ćemo pokazati kako se struja grane mreže može izraziti pomoću napona grane, odnosno razlike potencijala čvorova $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ gdje je φ_1 potencijal čvora (1), a φ_2 potencijal čvora (2) prema referentnom čvoru (0). Analizirat ćemo tri karakteristična slučaja

1) Grana mreže nema EMS



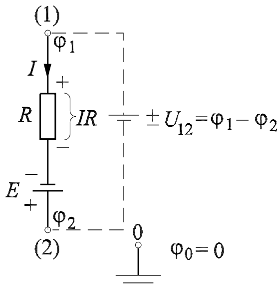
U ovom slučaju vrijedi Ohmov zakon

$$U_{12} = I \cdot R$$

pa je struja

$$\boxed{I = \frac{U_{12}}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}}. \tag{1.8}$$

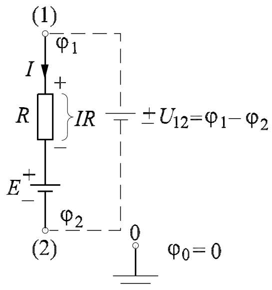
2) Grana mreže s EMS koja djeluje u smjeru struje



Napon $U_{12} = IR - E_2$ pa je

$$\boxed{I = \frac{U_{12} + E}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + E}{R}}. \tag{1.9}$$

3) Grana mreže s EMS koja djeluje suprotno struji



Napon $U_{12} = IR + E$ pa je

$$\boxed{I = \frac{U_{12} - E}{R} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - E}{R}}. \tag{1.10}$$

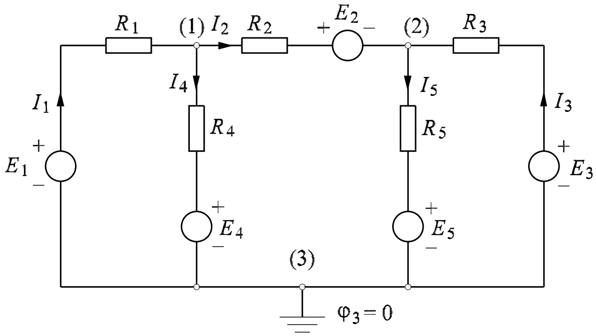
Struju grane I lako ćemo izravno izračunati ako zamislimo da smo između čvorova (1) i (2) spojili EMS iznosa $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ (crtkano na slici). Tada se struja jednostavno računa vodeći računa o njenom smjeru i smjeru elektromotornih sila.

Iz provedene analize vidi se da predznak ispred EMS ovisi o podudarnosti smjerova EMS i struje. Ako se ima u vidu da je $U_{12} = -U_{21}$, tada se gornji izrazi mogu primijeniti na svim mogućim slučajevima.

Sada možemo razmotriti mrežu na slici 1.9. Smatrat ćemo da je čvor (3) na potencijalu nula i shematski ćemo prikazati da je uzemljen.

Ako se sada struje svih grana izraze pomoću potencijala φ_1 i φ_2 i uvrste u jednadžbe čvora (1) i (2) (jed. 1.5), dobije se sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} &(\check{c}.\ 1) \quad \varphi_1 \cdot \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}\right) - \varphi_2 \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{E_1}{R_1}+\frac{E_2}{R_2}+\frac{E_4}{R_4} \\ &(\check{c}.\ 2) \quad \varphi_2 \cdot \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right) - \varphi_1 \cdot \frac{1}{R_2} = -\frac{E_2}{R_2}+\frac{E_3}{R_3}+\frac{E_5}{R_5} \end{aligned} \tag{1.11}$$



Sl. 1.9. Mreža s tri čvora i pet grana.

Uočite sljedeća pravila kod pisanja jednadžbe nekog izvora.

1. *Potencijal osnovnog čvora množi se sa sumom* **recipročnih vrijednosti otpora** *grana koje ulaze u taj čvor.*
2. *Potencijali ostalih čvorova u toj jednadžbi imaju predznak minus (–) i množe se s recipročnim otporom grane koja spaja osnovni čvor i drugi čvor.*
3. *Na desnoj strani su vrijednosti struja ekvivalentnih strujnih izvora svih grana koje su vezane na osnovni čvor. Predznak u jednadžbi je plus, ako je pozitivni polaritet do osnovnog čvora, a u suprotnom slučaju je predznak minus.*

Sada je potrebno iz jednadžbi (1.8) odrediti potencijale, a zatim se mogu izračunati struje grana pomoću jedne od jednadžbi (1.5), (1.6) i (1.7).

Uočite da su po ovoj metodi za isti zadatak potrebne samo dvije jednadžbe, pa dajte u ovom primjeru prednost ovoj metodi.

Primjer 1.4. *U shemi na slici 1.9 je zadano:* $E_1 = 10\,V$, $E_2 = 20\,V$, $E_3 = 30\,V$, $E_4 = 15\,V$, $E_5 = 5\,V$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 40\Omega$ *i* $R_4 = R_5 = 25\Omega$. *Odredite sve struje grana.*

Rješenje. Uvrštenjem gornjih vrijednosti u jednadžbu (1.11) dobije se

$$\varphi_1 \cdot 0.19 - \varphi_2 \cdot 0.05 = 2.6$$
$$\varphi_2 \cdot 0.115 - \varphi_1 \cdot 0.05 = -0.05$$

Rješenjem tih jednadžbi dobiju se potencijali čvorova $\varphi_1 = 15.323\,\mathrm{V}$, $\varphi_2 = 6.2274\,\mathrm{V}$ a $\varphi_3 = 0$. Prema formulama (1.8), (1.9) i (1.10) tražene struje su:

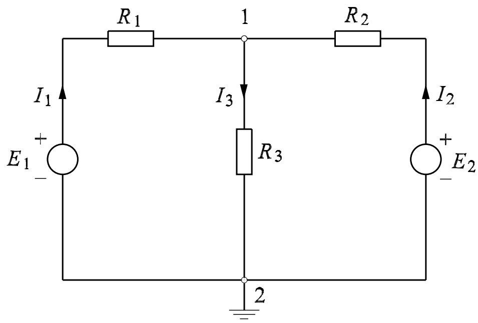
$$I_1 = \frac{\varphi_3 - \varphi_1 + E_1}{R_1} = -0.5323\,\mathrm{A}$$
$$I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 - E_2}{R_2} = -0.54755\,\mathrm{A}$$
$$I_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2 + E_3}{R_3} = 0.5943\,\mathrm{A}$$
$$I_4 = \frac{\varphi_1 - \varphi_3 - E_4}{R_4} = 0.01292\,\mathrm{A}$$
$$I_5 = \frac{\varphi_2 - \varphi_3 + E_5}{R_5} = 0.499\,\mathrm{A}.$$

Struje I_1 i I_2 su negativne što znači da je njihov stvarni smjer suprotan.

Primjer 1.5. *Odredite sve struje grana iz primjera 1.3, u točki 1.5, slika 1.10.*

Rješenje. To je mreža s dva čvora pa se po metodi potencijala čvorova može napisati samo jedna nezavisna jednadžba. Ako se uzme da je čvor (2) referentni i da je njegov potencijal jednak nuli ($\varphi_2 = 0$) tada vrijedi sljedeća jednadžba čvora (1)

$$(\check{c}.\ 1) \qquad \varphi_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}.$$



Sl. 1.10.

Traženi potencijal čvora (1) je

$$\varphi_1 = \frac{\dfrac{E_1}{R_1} + \dfrac{E_2}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}} = \frac{\dfrac{20}{3} + \dfrac{10}{4}}{\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5}} = 11.702\,\mathrm{V}.$$

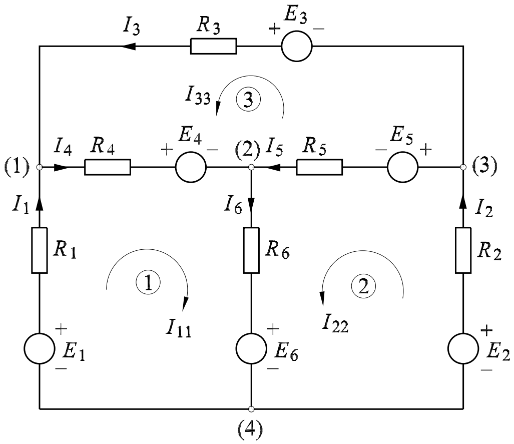
Tražena struje grana su

$$I_1 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_1}{R_1} = \frac{0 - 11.702 + 20}{3} = 2.766\,\mathrm{A}$$
$$I_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1 + E_2}{R_2} = \frac{0 - 11.702 + 10}{4} = -0.4255\,\mathrm{A}$$
$$I_3 = I_1 + I_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_1}{R_3} = \frac{11.702}{5} = 2.34\,\mathrm{A}.$$

I u ovom slučaju primjenom metode potencijala čvora bila je dovoljna samo jedna jednadžba, ali je računanje konačnih struja nešto složenije. Rezultat je isti kao u primjeru 1.3. u točki 1.5.

Primjer 1.6. *Napiši dovoljan broj jednadžbi metodom potencijala čvorova za mrežu na sl. 1.11.*

Rješenje. Mreža ima $\check{c} = 4$ čvora i $g = 6$ grana. Čvor (4) ćemo izolirati za referentni, pa je $\varphi_4 = 0$.



Sl. 1.11.

Po metodi potencijala čvorova mogu se napisati slijedeće tri nezavisne jednadžbe:

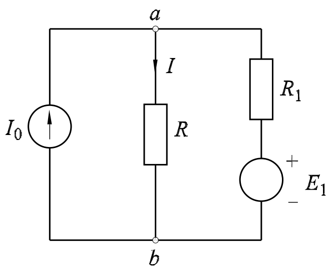
$$(\check{c}.\ 1) \qquad \varphi_1\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_3}\right)-\varphi_2\cdot\frac{1}{R_4}-\varphi_3\cdot\frac{1}{R_3}=\frac{E_1}{R_1}+\frac{E_3}{R_3}+\frac{E_4}{R_4}$$

$$(\check{c}.\ 2) \qquad \varphi_2\left(\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}+\frac{1}{R_6}\right)-\varphi_1\cdot\frac{1}{R_4}-\varphi_3\cdot\frac{1}{R_5}=-\frac{E_4}{R_4}-\frac{E_5}{R_5}+\frac{E_6}{R_6}$$

$$(\check{c}.\ 3) \qquad \varphi_3\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right)-\varphi_1\cdot\frac{1}{R_3}-\varphi_2\cdot\frac{1}{R_5}=\frac{E_2}{R_2}-\frac{E_3}{R_3}+\frac{E_5}{R_5}$$

Obratite pažnju na smjerove EMS i veze između pojedinih čvorova.

Primjer 1.7. *Izračunajte struju u grani I u mreži na slici 1.12. Zadano:* $E_1 = 10\,V$, $I_0 = 1\,A$, $R_1 = 4\Omega$ *i* $R = 6\Omega$.



Sl. 1.12.

Rješenje. Mreža ima dva čvora (a) i (b), pa se može napisati jedna nezavisna jednadžba metodom potencijala izvora. Mreža ima strujni izvor pa kod pisanja jednadžbe treba voditi računa o njemu i njegovom smjeru. U ovom slučaju vrijedi da je

$$\varphi_{ab}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)=\frac{E_1}{R_1}+I_0$$

pa je

$$\varphi_{ab}=\frac{\dfrac{E_1}{R_1}+I_0}{\dfrac{1}{R}+\dfrac{1}{R_1}}=\frac{\dfrac{10}{4}+1}{\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{4}}=8.4\,\mathrm{V}.$$

Tražena struja

$$I=\frac{\varphi_{ab}}{R}=\frac{8.4}{6}=1.4\,\mathrm{A}.$$

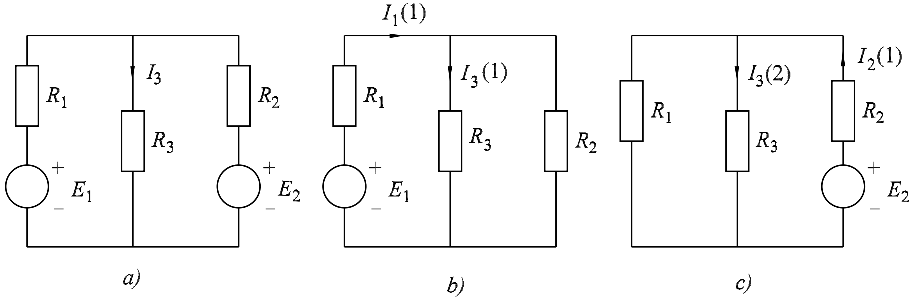
1.7. Metoda superpozicije

Svi linearni sustavi imaju svojstvo aditivnosti, koje dopušta parcijalno zbrajanje nekih veličina. To svojstvo se zove **princip superpozicije** (pridodavanja), a primjenjivo je u električnim linearnim mrežama. Struja u nekoj grani linearne mreže može se izračunati tako da se računa doprinos struje svakog izvora posebno, a rezultirajuća struja te grane dobije se zbrajanjem doprinosa svih izvora te mreže.

1. Kod toga postupka ostavi se u mreži samo jedan izvor, sve ostale EMS se kratko spoje, a strujni izvori se prekinu.

2. Zatim se izabere drugi izvor i provede isti postupak sve dok se ne dođe do zadnjeg izvora.

3. Sve parcijalne vrijednosti struje se zbrajaju, pri čemu treba voditi računa o smjeru pojedinih parcijalnih struja.



Sl. 1.13. Princip superpozicije: a) zadana mreža sa svim EMS; b) parcijalne struje EMS E_1; c) parcijalne struje EMS E_2.

Taj postupak ćemo pokazati na primjeru, tako da ćemo izračunati struju I_3 u mreži na slici 1.13a. Mreža ima dvije EMS pa ćemo izračunati dvije parcijalne struje kroz granu (3) (sl. 1.13b i c).

1. EMS E_1 stvara parcijalnu struju $I_3(1)$ u grani 3 (sl. 1.13b). Tu struju izračunat ćemo tako da prvo izračunamo parcijalnu struju toga izvora. Ukupni otpor koji osjeća EMS E_1 je

$$R_{1u} = R_1 + \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3}$$

pa je struja tog izvora

$$I_1(1) = \frac{E_1}{R_1 + \dfrac{R_2R_3}{R_2 + R_3}}.$$

Sada se primjenom formule za djelitelj struje dobije tražena struja

$$I_3(1) = I_1(1)\frac{R_2}{R_1 + R_3} = \frac{E_1R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}.$$

2. Na isti način ćemo prvo izračunati struju izvora EMS E_2 (sl. 1.13c)

$$I_2(2) = \frac{E_2}{R_2 + \dfrac{R_1R_3}{R_1 + R_3}}.$$

Parcijalna struja u grani (3)

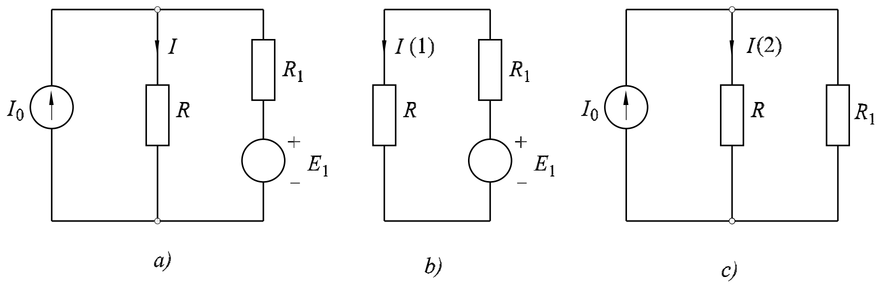
$$I_3(2) = I_2(2)\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{E_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}.$$

Konačno se dobije tražena struja kao zbroj struja

$$I_3 = I_3(1) + I_3(2) = \frac{E_1R_2 + E_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}.$$

U dobiveni izraz uvrstite numeričke vrijednosti iz primjera 1.3., točka 1.5 i provjerite rezultat.

Primjer 1.8. *Izračunajte struju I u otporu R u mreži na slici 1.14a. Zadano: $E_1 = 10\,V$, $I_0 = 1\,A$, $R_1 = 4\Omega$ i $R = 6\Omega$.*



Sl. 1.14.

Rješenje. Prvo ćemo izračunati struju EMS E_1, pri čemu se mora strujni krug prekinuti (sl. 1.14b), pa je

$$I(1) = \frac{E_1}{R_1 + R} = 1\text{ A}.$$