TRIGONOMETRIJSKE OSNOVE SINUSOIDNIH VELIČINA

Razumijevanje pojava u krugovima izmjenične struje, koja se vremenski mijenja po (trigonometrijskoj) sinusnoj funkciji, u velikoj mjeri je otežano ako nisu sasvim jasni neki osnovni pojmovi iz trigonometrije.

Trigonometrija (grčki *trigonon* = trokut + *metron* = mjera) jest dio matematike koji, najjednostavnije rečeno, proučava omjere i odnose među dijelovima trokuta. Ovi odnosi opisuju se posebnim (trigonometrijskim) funkcijama, a jedna od njih je sinusna funkcija, posebno važna za elektrotehniku. Električne veličine često se vremenski mijenjaju po sinusnoj funkciji čija je vremenska promjena osobitog valovitog oblika i naziva se **sinusoida**. One veličine čija vremenska promjena ima oblik sinusoide nazivamo sinusoidne veličine.

Da bismo olakšali razumijevanje i računanje sa sinusoidno promjenjivim električnim veličinama, koje su tema većeg dijela ove knjige, u ovom uvodnom dijelu dajemo sažeti opis nekih osnovnih pojmova iz trigonometrije koji se rabe u nastavku knjige.

Prvo se definira **pojam kuta** i opisuju se njegova osnovna obilježja te se prikazuju svojstveni oblici **pravog**, **ispruženog** i **punog kuta**. Potom se opisuju jedinice **radijan** i **stupanj** kojima se izražava veličina kuta te se pokazuje međusobni odnos tih jedinica.

Prikazuju se također glavna obilježja **pravokutnog trokuta** pomoću kojih se opisuju osnovne kutne funkcije **sinus**, **kosinus** i **tangens**, kao i odnosi među njima.

Uvodi se i opisuje pojam **jedinične kružnice** te se prikazuju veličine kutnih funkcija **sinus** i **kosinus** kao koordinate točke u **pravokutnom koordinatnom sustavu** s ishodištem u središtu jedinične kružnice.

Na jediničnoj kružnici pokazuje se **periodičnost** i promjena **predznaka** te **granice vrijednosti** kutnih funkcija. Na kraju se daju vrijednosti osnovnih kutnih funkcija za neke tipične veličine kutova.

Ovisno o tome kako netko vlada osnovnim trigonometrijskim pojmovima, ova uvodna glava može se i preskočiti, a može se radi pojašnjenja na nju vraćati i kasnije.

Pojam kuta

Kut je dio ravnine omeđen dvjema zrakama (*krakovi*) koje izlaze iz iste točke (*vrh*), a obilježava se lukom koji ih spaja (slika 1). Kut se označava malim grčkim slovom (α , β , φ i sl).

Važno je uočiti da **kut određuje položaj**.

Na slici 1, kut α nastaje zakretom zrake 2 iz početnog položaja (položaj zrake 1) u smjeru suprotnom kretanju kazaljki sata. (*Ovaj smjer uzimamo za pozitivan*, pa kut nastao zakretom u tom smjeru ima pozitivan predznak, dok zakretom u suprotnom smjeru nastaje kut negativnog predznaka). Kut α ovdje određuje položaj zrake 2 u ravnini.

Slike 2 i 3 prikazuju kutove koji određuju neke tipične međusobne položaje dviju zraka. Na slici 2a zrake su međusobno *okomite*, a kut među njima naziva se **pravi kut**. Na slici 2b su zrake međusobno *nasuprotne*, a kut među njima naziva se **ispruženi kut**.

Na slici 3a zraka 2 opisala je puni krug i došla u *usporedni* položaj (sa zrakom 1), pa se taj kut naziva **puni kut**. Treba uočiti da taj isti (početni) položaj zraka 2 ima i za kut $\alpha=0$ (slika 3b).

Kutna jedinica — radijan

Kut α s vrhom u središtu kružnice (slika 4a) isijeca na njoj luk čija duljina l ovisi o veličini kuta i polumjeru kružnice r, tako da je

$$l = \alpha r.$$

Veličina kuta α jednaka je stoga omjeru duljine luka l koji kut isijeca na kružnici (opisanoj oko vrha kuta) i polumjera te kružnice r, tj.

$$\alpha = \frac{l}{r}.$$

Kut koji na kružnici isijeca luk duljine jednake polumjeru kružnice (tj. za $l=r$), ima veličinu jednaku jedinici. Ovakav *jedinični kut* naziva se *radijan*, označava s **rad** (slika 4b)) i uzima za jedinicu veličine kuta. Uočimo da je

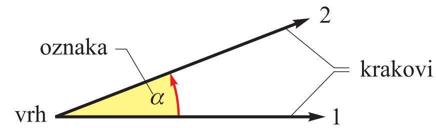
$$1\ \text{rad} = 1\ \frac{\text{m}}{\text{m}} = 1$$

tj. *radijan je jedinica bez dimenzija*.

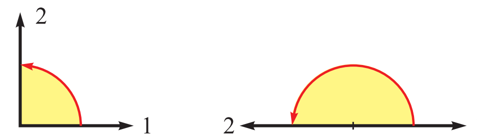
Za puni je kut duljina luka jednaka opsegu kružnice, tj. $l=2\pi r$. Na temelju toga može se odrediti veličina punoga kuta u radijanima:

$$\textit{puni kut} = 2\pi\frac{r}{r} = 2\pi \approx 6{,}28\,\text{rad}.$$

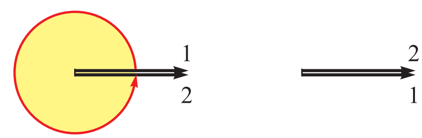
Sl. 1. Obilježja kuta



Sl. 2. a) Pravi kut b) Ispruženi kut



Sl. 3. a) Puni kut b) Kut jednak nuli



Sl. 4. a) Veličina kuta b) Kut od 1 radijana

Odnos radijana i stupnjeva

Iz praktičnih razloga (npr. određivanje položaja na zemaljskoj kugli) uvriježilo se i iskazivanje veličine kuta u *stupnjevima* (oznaka: $^\circ$). Pritom je puni kut podijeljen na 360 stupnjeva, pa je jedan stupanj (1°) jednak $\frac{1}{360}$ dijelu punog kuta, ili

$$\textit{puni kut} = 360^\circ.$$

Iz ovoga proizlazi da je $2\pi\,\text{rad} = 360^\circ$, tj.

$$1\,\text{rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57{,}3^\circ.$$

Kut izražen u radijanima pretvara se u veličinu izraženu u stupnjevima na sljedeći način:

$$\textit{kut}\ (^\circ) = \left(\frac{180}{\pi}\right)\cdot \textit{kut}\ (\text{rad}),$$

a iz stupnjeva dobivaju se radijani ovako

$$\textit{kut}\ (\text{rad}) = \left(\frac{\pi}{180}\right)\cdot \textit{kut}\ (^\circ).$$

Ispruženi kut jednak je polovini punog kuta, tj.

$$\textit{ispruženi kut} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ \ \text{rad} = 180^\circ.$$

Pravi kut jednak je polovini ispruženog, tj.

$$\textit{pravi kut} = \frac{\pi}{2}\ \ \text{rad} = 90^\circ.$$

Kutne funkcije pravokutnog trokuta

Trokut čije su dvije stranice međusobno okomite (čine *pravi kut*) naziva se *pravokutni* trokut.

Te dvije stranice nazivaju se *katete* (na slici 1 označene kao a i b), a treća stranica (na slici 1 označena kao c), naziva se *hipotenuza*.

Kutovi nasuprot katetama a i b označeni su na slici 1 kao α i β, dok je nasuprot hipotenuzi pravi kut.

Uz svojstvo da je *kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama*, među stranicama pravokutnog trokuta vladaju posebni odnosi koji se izražavaju kao funkcije kutova u trokutu.

Ovdje ćemo ukratko definirati neke osnovne kutne (*trigonometrijske*) funkcije pravokutnog trokuta.

Omjer katete i hipotenuze je funkcija *kuta među njima*, koja se naziva *kosinus* kuta (oznaka cos)

$$\frac{b}{c} = \cos\alpha \ , \ \frac{a}{c} = \cos\beta .$$

Omjer katete i hipotenuze je funkcija *kuta nasuprot kateti*, koja se naziva *sinus* kuta (oznaka sin)

$$\frac{a}{c} = \sin\alpha \ , \ \frac{b}{c} = \sin\beta .$$

Omjer *kutu nasuprotne i kutu priležeće katete* je funkcija koja se naziva *tangens* kuta (oznaka tg)

$$\frac{a}{b} = \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ , \ \frac{b}{a} = \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} .$$

Jedinična kružnica i veličine kutnih funkcija

Jedinična kružnica je kružnica, polumjera jednakog jedinici, opisana oko ishodišta (sjecišta osi) pravokutnog koordinatnog sustava (slika 2).

Pomakom neke točke po kružnici, iz početnog položaja 1 (na pozitivnom dijelu vodoravne osi) u neki položaj A, nastaje između spojnice točke s ishodištem i pozitivnog dijela vodoravne osi kut α.

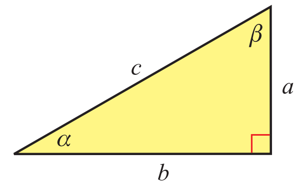
Pritom projekcije točke na vodoravnu i uspravnu koordinatnu os (*koordinatne točke*) čine katete, a spojnica točke s ishodištem čini hipotenuzu pravokutnog trokuta s kutom α u ishodištu. Duljina hipotenuze jednaka je jedinici, pa su katete ovog trokuta upravo jednake $\cos\alpha$ (vodoravna) i $\sin\alpha$ (uspravna).

Općenito, za točku na jediničnoj kružnici vrijedi:

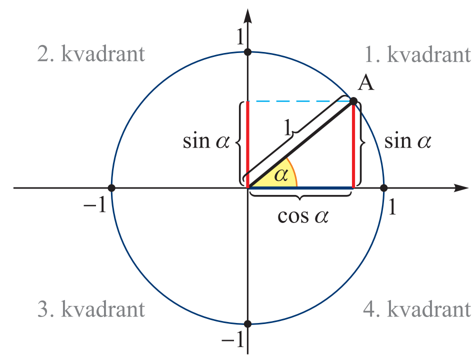
koordinate točke daju veličine funkcija kosinusa i sinusa kuta koji spojnica točke i ishodišta zatvara s pozitivnim dijelom vodoravne osi.

Ovisno o kutu, **iznosi ovih funkcija kreću se stoga u granicama od 0 do 1**, dok se iznos funkcije tangens (kao njihova omjera) kreće između 0 i ∞.

Sl. 1. Pravokutni trokut



Sl. 2. Jedinična kružnica



Predznak kutnih funkcija

Koordinatne osi dijele ravninu na četiri dijela (*kvadranta*). Predznak koordinata točke na jediničnoj kružnici ovisi o tome u kojem se kvadrantu nalazi, pa je time određen i predznak kosinusa i sinusa kuta α koji točka (svojom spojnicom do ishodišta) određuje prema pozitivnom dijelu vodoravne osi:

1. $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$: $\cos\alpha > 0$, $\sin\alpha > 0$, $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$,
2. $(90^\circ < \alpha < 180^\circ)$: $\cos\alpha < 0$, $\sin\alpha > 0$, $\mathrm{tg}\,\alpha < 0$,
3. $(180^\circ < \alpha < 270^\circ)$: $\cos\alpha < 0$, $\sin\alpha < 0$, $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$,
4. $(270^\circ < \alpha < 360^\circ)$: $\cos\alpha > 0$, $\sin\alpha < 0$, $\mathrm{tg}\,\alpha < 0$.

Jednim punim okretom točke po jediničnoj kružnici nastaju kutovi od 0° do 360°. Drugi okret točke dao bi kutove od 360° do 720°, treći kutove od 720° do 1080° itd. Pritom treba uočiti da se vrijednosti kutnih funkcija za svaki okret *ponavljaju*.

Sl. 3. Vrijednosti kutnih funkcija nekih kutova

[°] α	[rad]	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$
0	0	0	1	0
30	$\pi/6$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{3}$
45	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
60	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$
90	$\pi/2$	1	0	∞
180	π	0	-1	0
270	$3\pi/2$	-1	0	$-\infty$

I. SINUSOIDNE IZMJENIČNE ELEKTRIČNE VELIČINE

Ova glava predviđena je kao uvod i priprema za što lakše usvajanje gradiva onog dijela Osnova elektrotehnike koji obuhvaća vremenski promjenjive električne veličine te krugove izmjenične struje.

Vremenski promjenjive električne veličine imaju posebnu važnost u tehnici, primjerice u generiranju, prijenosu i uporabi električne energije, ali također i u prijenosu informacija kao i u njihovoj obradi.

U prvom poglavlju podsjeća se na **način nastanka izmjeničnog napona** vrtnjom zavoja u magnetskom polju te se opisuje svojstveni oblik sinusoidnog izmjeničnog napona.

U drugom poglavlju opisuju se opće **značajke sinusoidno promjenjivih veličina**. Uz opis pojma sinusoidne veličine definiraju se: trenutačna, vršna i efektivna vrijednost, perioda, frekvencija, kružna frekvencija i početni kut, te se uvodi pojam **faznog pomaka**.

Na sinusoidno promjenjivim električnim veličinama temelje se proizvodnja, prijenos i uporaba električne energije, kao i bežični prijenos podataka (radiokomunikacije). Da bi se olakšalo računanje sa sinusoidnim veličinama te analiza električnih krugova sa sinusoidnim strujama i naponima, razvijeni su posebni postupci njihova prikaza vektorima i kompleksnim brojevima.

U trećem poglavlju opisuje se pojam **vektora**, zatim postupak **vektorskog prikaza sinusoidno promjenjivih (izmjeničnih) struja i napona**, te se daju pravila za vektorsko zbrajanje i oduzimanje ovih veličina.

U četvrtom poglavlju objašnjava se pojam **kompleksnih brojeva**, kao i njihov prikaz u **kompleksnoj ravnini**. Pokazuje se način **opisa električnih veličina kompleksnim brojevima** te pravila za izvođenje osnovnih računskih operacija s njima.

I.1. Nastanak sinusoidnog napona

Za dobivanje izmjeničnog električnog napona rabi se pojava elektromagnetske indukcije. Promotrimo to podrobnije na primjeru zavoja koji se vrti u homogenom magnetskom polju.

Vrtnja zavoja u magnetskom polju

Vrtnjom zavoja u magnetskom polju (slika 1a) mijenja se zavojem obuhvaćeni magnetski tok ϕ, pa se u svitku inducira napon u_1. Njegov iznos (prema *zakonu elektromagnetske indukcije*)

$$u_1 = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

jednak je brzini promjene zavojem obuhvaćenog magnetskog toka u vremenu $(\Delta\phi/\Delta t)$.

Ovisnost obuhvaćenog toka o kutu zavoja

Zavojem obuhvaćeni magnetski tok ϕ jednak je umnošku gustoće toka B i *aktivne površine* S'. Aktivnom površinom nazivamo projekciju površine zavoja S u ravninu okomitu na silnice magnetskog toka, kako je prikazano u presjeku na slici 1b, tj.

$$\phi = B \cdot S'.$$

Veličina aktivne površine S' ovisi o kutu α između nje i stvarne površine zavoja S. Za kut $\alpha{=}0$ ove se površine poklapaju ($S'{=}S$), pa zavoj obuhvaća najveći tok iznosa $\phi_m = B{\cdot}S$. Vrtnjom zavoja mijenja se kut α, a time i aktivna površina S' te zavojem obuhvaćeni tok ϕ. Tu promjenu opisat ćemo matematički.

Na slici 1b presjeci površina S i S' čine pravokutni trokut u kojem je površina S hipotenuza, površina S' je kateta, a α je kut među njima. Odnos katete i hipotenuze definiran je (pogledati stranicu 3) kao *kosinusna* funkcija (oznaka $\cos$) kuta α među njima, pa je

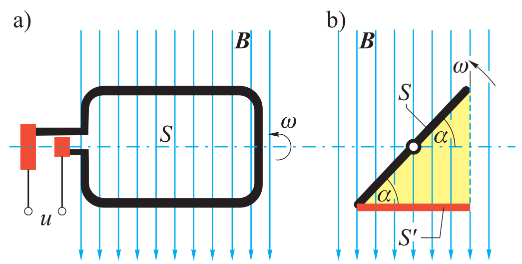
$$\frac{S'}{S} = \cos\alpha \text{ tj. } S' = S\cos\alpha.$$

Uvrštavanjem u gornji izraz za tok dobivamo

$$\phi = B{\cdot}S' = B{\cdot}S\cos\alpha = \phi_m\cos\alpha$$

tj. vrtnjom se mijenja zavojem obuhvaćeni magnetski tok kao *kosinusna funkcija* kuta α.

Sl. 1. Rotirajući zavoj u magnetskom polju



Zavoj se okreće oko osi okomite na silnice polja. Kad je kut α (između površine zavoja S i ravnine okomite na silnice polja) jednak nuli, površina S je okomita na silnice polja i zavoj obuhvaća najveći tok.

Kako okretanjem zavoja raste kut α između površine zavoja i ravnine okomite na silnice polja, tako se smanjuje zavojem obuhvaćeni magnetski tok, da bi u položaju kad je zavoj paralelan sa silnicama tok pao na nulu.

Daljim okretanjem zavoja obuhvaćeni tok ponovo raste, ali ulazi s druge strane zavoja, pa je suprotnog predznaka. Tako se vrtnjom svitka *naizmjenično mijenja smjer (predznak) te porast i pad zavojem obuhvaćenog magnetskog toka*.

Slična promjena obuhvaćenog toka može se dobiti i u zavoju koji miruje, ako u njemu rotira magnetsko polje. Kako bismo to mogli postići? (Pogledati sliku 1 na stranici 105!)

PRIMJER

Zavoj površine $S{=}50\,\mathrm{cm}^2$ vrti se u magnetskom polju indukcije $B{=}1{,}2\,\mathrm{T}$ (slika 1). Koliki magnetski tok ϕ zavoj obuhvaća u trenutku kad je kut između površine zavoja i ravnine okomite na silnice magnetskog polja jednak:

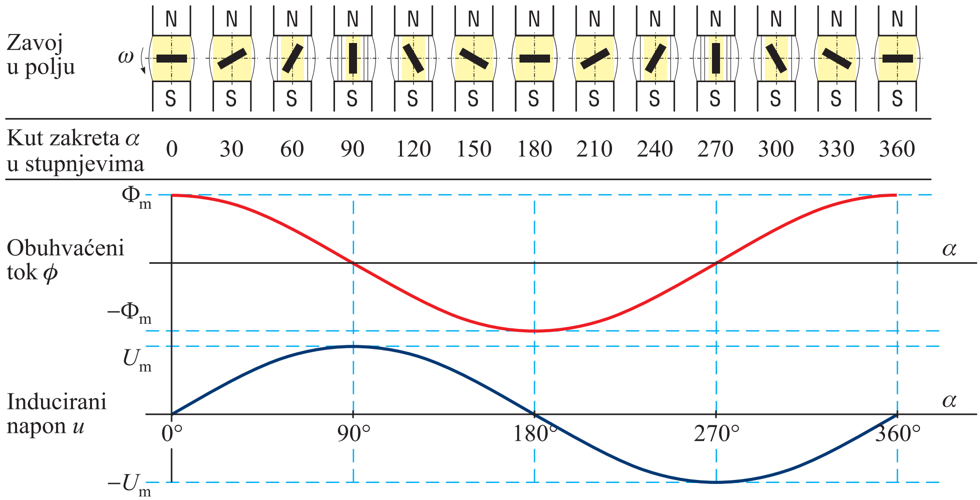
a) nuli; *b) 90° (pravom kutu)?*

a) Najveći tok

$$\phi = BS = (5{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{m}^2)(1{,}2\,\mathrm{T}) = 6\,\mathrm{mVs}.$$

b) Zavoj je paralelan sa silnicama pa je $\phi{=}0$.

Sl. 1. Promjena obuhvaćenog toka i induciranog napona pri vrtnji zavoja u magnetskom polju



Vremenska promjena magnetskog toka

Na slici 1 prikazana je promjena zavojem obuhvaćenog magnetskog toka ϕ u ovisnosti o kutu α koji površina zavoja S zatvara s ravninom okomitom na silnice toka.

Prikazan je jedan puni okret zavoja koji u magnetskom polju gustoće toka B kreće iz položaja $(\alpha=0)$ u kojem obuhvaća najveći tok $(\phi_m=BS)$ te se okreće stalnom kutnom brzinom ω[1] $=\dfrac{\alpha}{t}$. Kutna brzina pokazuje za koliki kut se zavoj zakrene u jedinici vremena. Pritom je

$$\alpha = \omega t$$

tj. *kut zakreta zavoja* α *razmjeran je vremenu* t proteklom od početka vrtnje. To znači da *prikazana ovisnost* obuhvaćenog toka o kutu *oblikom pokazuje promjenu toka u vremenu*.

Vremenska promjena obuhvaćenog magnetskog toka stoga ima oblik *kosinusne funkcije*

$$\phi = \phi_m \cos(\omega t).$$

Ono što je ovdje bitno uočiti jest ***nejednolika brzina promjene*** toka, tj. promjenjivi nagib kosinusne funkcije koja pokazuje promjenu zavojem obuhvaćenog magnetskog toka.

Vremenska promjena induciranog napona

Iznos induciranog napona razmjeran je brzini promjene obuhvaćenog toka u vremenu $\Delta\phi/\Delta t$. Vremenska promjena toka na slici 1 nije linearna (pravac), pa brzina promjene toka (a time i inducirani napon) nema stalnu veličinu.

Brzina promjene magnetskog toka u bilo kojoj točki njegove vremenske funkcije, određena je nagibom (strminom) funkcije u toj točki.

Funkcija toka na slici 1 je najstrmija kod prolazaka kroz nulu. Tu se tok mijenja najbrže, pa je tu inducirani napon najveći (U_m).

Idući prema maksimumima, funkcija toka je sve položenija, pa je tu inducirani napon sve manji, a u samoj točki maksimuma (ili minimuma) nema promjene toka, pa je tu inducirani napon jednak nuli. U tim točkama mijenja se predznak promjene toka (porast prelazi u pad i obratno), pa se tu mijenja i predznak (polaritet) napona.

Vremenska promjena induciranog napona u_1, prikazana na slici 1, ima oblik ***sinusne funkcije*** koja je opisana jednadžbom

$$u_1 = U_m \sin(\omega t).$$

[1] malo grčko slovo *omega*

Najveća vrijednost sinusoidnog napona

Kada bi umjesto jednog zavoja (u kojem se inducira napon u_1) u polju na prethodnoj slici rotirao svitak od N zavoja, u svitku bi se inducirao N puta veći napon $u = N \cdot u_1$. Sinusna funkcija induciranog napona mijenja se između najveće pozitivne vrijednosti (maksimum) i najveće negativne vrijednost (minimum), koje su jednakog iznosa U_m. Ovaj iznos razmjeran je broju zavoja svitka N, površini svitka S, gustoći magnetskog toka B i kutnoj brzini vrtnje svitka ω (koja određuje brzinu vremenske promjene obuhvaćenog toka) tako da je

$$U_\mathrm{m} = NSB\omega.$$

Periodičnost sinusoidnog napona

Slika na prethodnoj stranici prikazuje oblik induciranog napona za jedan okretaj svitka.

Nakon jednog okretaja svitka sve vrijednosti napona opet se ponavljaju. Svakim sljedećim povećanjem kuta za 360° (ili 2π radijana) to se nanovo (periodički) ponavlja, pa kažemo: ***sinusoidni napon je periodički promjenjiv***.

Jednim punim okretom svitka nastaje jedna perioda sinusoidnog napona. Vrijeme potrebno za jedan okret svitka naziva se *trajanje periode*, ili kraće *perioda napona*, i označava s T.

Tijekom vremena T svitak se okrene za kut od 2π, pa se kutna brzina ω može izraziti kao

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Kutna brzina ω određena je brzinom vrtnje svitka i još se naziva *kružna frekvencija* (primjer).

Inducirani napon mijenja se u vremenu slijedeći svojstveni oblik sinusne funkcije – *sinusoide*. Na prethodnoj slici može se vidjeti da je sličnog oblika i kosinusna funkcija magnetskog toka, samo je pomaknuta za kut od 90° u odnosu na funkciju napona (vidi opis gore desno).

Obje veličine, dakle, i obuhvaćeni tok i inducirani napon, imaju vremenske funkcije sličnog – *sinusoidnog* oblika.

Sveza vremenskih funkcija toka i napona

Kosinusna funkcija obuhvaćenog magnetskog toka (na prethodnoj slici) opisana jednadžbom

$$\phi = \phi_\mathrm{m} \cos(\omega t)$$

za kut $\alpha{=}\omega t{=}0$, ima maksimum. Zatim se tok smanjuje na nulu (za kut $\alpha{=}90^\circ$) gdje mijenja predznak te dalje pada do negativnog maksimuma, koji doseže za kut $\alpha{=}180^\circ$. Potom funkcija toka raste da bi za $\alpha{=}270^\circ$ dosegla nulu, nakon čega tok mijenja predznak i dalje raste do maksimuma koji doseže za $\alpha{=}360^\circ$.
Sinusna funkcija napona, dana jednadžbom

$$u = U_\mathrm{m} \sin(\omega t)$$

za $\alpha{=}0$ jednaka je nuli (nema promjene toka). Smanjivanjem toka inducira se pozitivni napon koji raste (s brzinom promjene toka), da bi za $\alpha{=}90^\circ$ (kad tok najbrže pada) imao maksimum. Zatim (kako se pad toka usporava), inducirani napon pada, da bi za $\alpha{=}180^\circ$ (kad prestaje pad toka) napon pao na nulu. Potom tok raste pa se mijenja predznak napona i ponavlja se prva polovica periode, ali sa suprotnim predznakom. Vidi se da obje funkcije slijede isti oblik izmjene maksimuma i minimuma, ali funkcija napona ima maksimum za kut koji je 90° veći od kuta maksimuma funkcije toka, tj. *funkcije su međusobno pomaknute za kut* od 90°.

PRIMJER

Svitak od $N{=}50$ zavoja, presjeka $S{=}54\,\mathrm{cm}^2$, nalazi se u homogenom magnetskom polju gustoće toka $B{=}1{,}2\,\mathrm{T}$. Ako se svitak u svakoj minuti 1000 puta okrene oko osi okomite na silnice polja, odredite: a) kružnu frekvenciju (kutnu brzinu) ω; b) najveću vrijednost U_m napona induciranog u svitku.

a) U sekundi svitak učini $1000/60{=}16\frac{2}{3}$ okretaja pa je trajanje jednog okretaja (tj. perioda)

$$T = (1\,\mathrm{s})/(16\tfrac{2}{3}) = 0{,}06\,\mathrm{s}$$

iz čega proizlazi kružna frekvencija napona

$$\omega = 2\pi/T = 6{,}28/(0{,}06\,\mathrm{s}) = 104{,}7\,\mathrm{s}^{-1}.$$

b) Najveća vrijednost induciranog napona je

$$\begin{aligned} U_m &= NSB\omega \\ &= (50)(54{\cdot}10^{-4}\,\mathrm{m}^2)(1{,}2\,\mathrm{T})(104{,}7\,\mathrm{s}^{-1}) \\ &= 34\,\mathrm{V}. \end{aligned}$$

Provjera znanja I.1.

1. Što je to *radijan*, a što *stupanj*?
2. U kojem su međusobnom položaju krakovi kuta od $360°$ $(2\pi\,\mathrm{rad})$ i za koji su još kut krakovi u tom istom položaju?
3. Zašto se javlja napon u svitku koji se vrti u homogenom magnetskom polju?
4. Što je to *kutna brzina* (*kružna frekvencija*) kod vrtnje svitka, kako se označava i kojim jedinicama se iskazuje?
5. Da li je uz stalnu kutnu brzinu vrtnje svitka također stalna i vremenska promjena svitkom obuhvaćenog magnetskog toka?
6. Opišite i skicirajte oblik vremenske funkcije napona induciranog u rotirajućem svitku?
7. Ovisi li najveća vrijednost induciranog napona o brzini vrtnje svitka? (Zašto?)
8. Je li polaritet sinusoidno promjenjivog napona stalan ili vremenski promjenjiv?
9. Opišite pojam *periodičnosti* sinusoidnog napona.
10. Kako ovisi trajanje periode induciranog napona o brzini vrtnje svitka?

Zadaci za vježbu I.1.

1. Koliko radijana ima kut od $86°$?
2. Kolika je kutna brzina vrtnje svitka koji se u svakoj milisekundi zakrene za kut od $3{,}6°$?
3. Kolika je najveća vrijednost napona induciranog u svitku od $N=100$ zavoja, površine $S=27\,\mathrm{cm}^2$, koji se vrti stalnom kutnom brzinom $\omega=104{,}7\,\mathrm{rad/s}$ oko osi okomite na silnice magnetskog polja jednolike gustoće $B=0{,}6\,\mathrm{T}$?
4. Ako bismo magnetsko polje iz prethodnog zadatka zakrenuli tako da mu silnice budu *paralelne* s osi vrtnje svitka, da li bi se vrtnjom mijenjao svitkom obuhvaćeni magnetski tok? Napišite jednadžbu vremenske funkcije napona induciranog u svitku u tom slučaju?
5. Koliko traje jedan okretaj svitka koji se vrti stalnom kutnom brzinom $\omega=314\,\mathrm{rad/s}$?
6. Kolika je kružna frekvencija ω napona induciranog u svitku koji svake sekunde učini 60 okretaja oko osi okomite na silnice magnetskog polja?
7. Napon induciran u svitku od $N=75$ zavoja, koji se vrti oko osi okomite na silnice magnetskog polja jednolike gustoće $B=1{,}2\,\mathrm{T}$, svakih $60\,\mathrm{ms}$ doseže najveću vrijednost od $34\,\mathrm{V}$. Kolika je površina svitka?
8. Odredite jednadžbu sinusoide napona induciranog u svitku od $N=100$ zavoja, površine $S=16\,\mathrm{cm}^2$, koji u svakoj minuti učini 3000 okretaja oko osi okomite na silnice homogenog magnetskog polja gustoće magnetskog toka $B=1{,}2\,\mathrm{T}$. Svitak počinje vrtnju u trenutku $t=0$ iz položaja u kojem obuhvaća najveći tok.

I.2. Osnovne značajke sinusoidnih veličina

Pojam sinusoidnih veličina

U prethodnom poglavlju mogli smo uočiti sličnost oblika sinusne i kosinusne funkcije.

Ovdje, slika 1 prikazuje dva napona jednakih maksimuma U_m, od kojih se napon u_1 vremenski mijenja po sinusnoj funkciji

$$u_1 = U_m \sin(\omega)$$

a napon u_2 po kosinusnoj funkciji

$$u_2 = U_m \cos(\omega t).$$

Vidi se da su ove funkcije međusobno pomaknute za kut od $90°$, tj. svaku pojedinu vrijednost kosinusne funkcije sinusna funkcija postiže za $90°$ veći kut, pa općenito vrijedi

$$\cos(\omega t) = \sin(\omega t + 90°).$$

Na temelju ovoga može se i napon u_2 izraziti pomoću sinusne funkcije kao

$$u_2 = U_m \sin(\omega t + 90°).$$

Oba napona dakle imaju oblik sinusne funkcije, samo što sinusoida napona u_1 ima nulu u ishodištu (tzv. *čista* sinusna funkcija), dok je sinusoida napona u_2 vremenski pomaknuta (prethodi) prema ishodištu za kut od $90°$.

Opći oblik sinusoidnog napona

Vrtnjom svitka, opisanog u prethodnom poglavlju, koji kreće iz položaja u kojemu je početni kut (između površine svitka i ravnine okomite na silnice polja) jednak nuli, nastaje sinusni napon oblika kao napon u_1 (na slici 1).

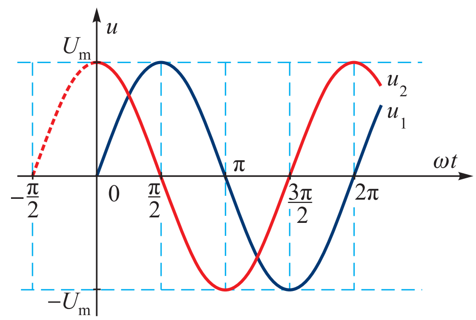
Da je svitak krenuo iz početnog položaja u kojem je početni kut jednak $90°$, inducirani napon imao bi oblik napona u_2 (na slici 1).

Općenito, za bilo koji početni kut svitka α_0, inducirani bi napon imao opći oblik (slika 2), opisan općim izrazom za sinusnu funkciju

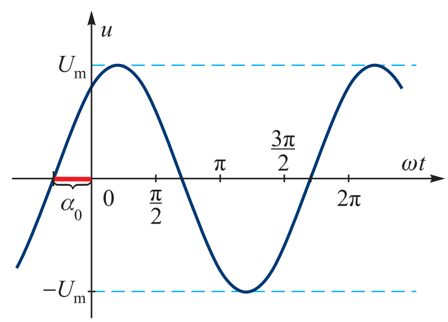
$$u = U_m \sin(\omega t + \alpha_0).$$

One veličine koje se mogu opisati ovakvim općim izrazom nazivamo *sinusoidne* veličine.

Sl. 1. Oblik sinusne i kosinusne funkcije



Sl. 2. Opći oblik sinusne funkcije — sinusoide



PRIMJER

Za napon koji je zadan kosinusnom funkcijom kao $u = 85\cos(\omega t + 90°)$ V *treba odrediti:*
a) jednadžbu sinusne funkcije napona;
b) veličinu napona u trenutku $t = 0$.

a) Kosinusna funkcija pretvara se u sinusnu tako da joj se kut poveća za $90°$, *pa je napon*

$$u = 85\sin(\omega t + 90° + 90°)\ \text{V} \quad \textit{tj.}$$

$$u = 85\sin(\omega t + 180°)\ \text{V}.$$

b) Za $t = 0$ *je i* $\omega t = 0$, *pa je napon u tom trenutku jednak* $u = 85\sin(180°)$. *Vrijednost čiste sinusne funkcije za kut* $180°$ (π rad) *jednaka je nuli* $\sin 180° = \sin\pi = 0$ *(provjerite kod napona* u_1 *na slici 1), pa je veličina napona u trenutku* $t = 0$

$$u(t=0) = 85\sin 180°\ \text{V} = 85 \cdot 0\ \text{V} = 0\ \text{V}.$$

Izmjenični napon može biti i drugih oblika, kao npr. pravokutni, pilasti i sl. (glava VI). Međutim, jedino sinusoidni napon na reaktivnim elementima (kapacitet i induktivitet) daje struju istog (sinusoidnog) oblika, što olakšava upotrebu i analizu krugova s takvim veličinama.

Sinusoidni naponi i struje stvaraju električna i magnetska polja, koja se šire prostorom kao sinusoidno promjenjivi *elektromagnetski valovi*.

Općenito, sinusoidne veličine od posebne su važnosti u elektrotehnici, pa se često pod nazivom *izmjenični* podrazumijevaju upravo sinusoidno promjenjivi naponi i struje.

Ne bude li drukčije napomenuto, i mi ćemo tako postupati u nastavku. U ovom poglavlju, na primjeru izmjeničnog napona, opisat ćemo osnovne značajke sinusoidnih veličina.

Trenutačna, vršna i efektivna vrijednost

Trenutačna vrijednost u je veličina napona u određenom vremenskom trenutku. Kod izmjeničnog napona (slika 1) ona se mijenja u vremenu po sinusnoj funkciji općeg oblika

$$u = U_\mathrm{m} \sin(\omega t + \alpha_0).$$

Vršna vrijednost U_m

Vršna (ili tjemena) vrijednost U_m je najveća vrijednost napona. Još se naziva i *amplituda* (od lat. *amplitudo* = veličina), a ***predstavlja iznos najvećeg odstupanja sinusoide od nule***.

Efektivna vrijednost U

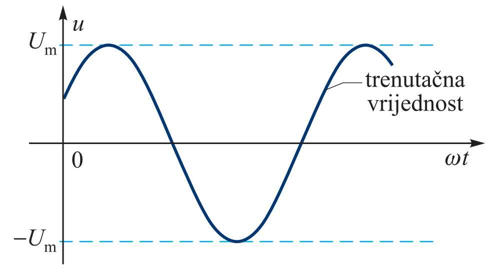
Efektivna vrijednost izmjeničnog napona U ***jednaka je iznosu istosmjernog (stalnog) napona koji bi na istom otporu stvarao jednaku snagu*** P.

Efektivna vrijednost sinusoidnog napona je $\sqrt{2}$ ***puta manja od tjemene vrijednosti.***

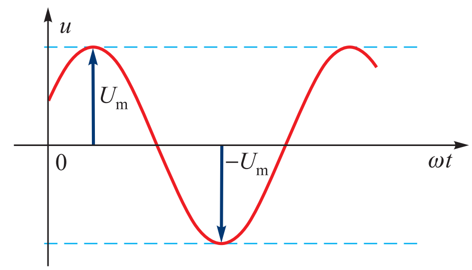
$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} U_\mathrm{m} = 0{,}707 U_\mathrm{m}.$$

Efektivna vrijednost od posebne je važnosti, jer određuje većinu učinaka izmjenične struje.

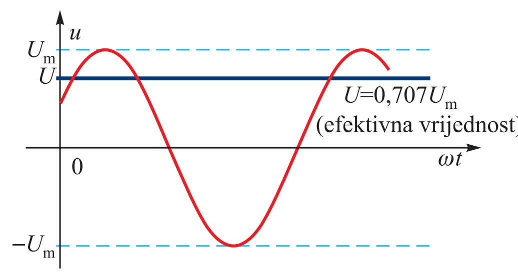
Sl. 1. Promjena trenutačne vrijednosti izmjeničnog sinusoidnog napona s vremenom



Sl. 2. Vršna vrijednost izmjeničnog napona



Sl. 3. Efektivna vrijednost izmjeničnog napona



PRIMJER

Odredite efektivnu i tjemenu vrijednost izmjeničnog napona koji na grijaču otpora $R = 24{,}2\,\Omega$ stvara snagu $P = 2\,000\,\mathrm{W}$.

Snagu P na otporu R određuje efektivna vrijednost izmjeničnog napona U, tako da je

$$P = U^2/R.$$

Iz toga proizlazi efektivna vrijednost napona

$$U = \sqrt{P \cdot R} = \sqrt{48\,400}\,\mathrm{V} = 220\,\mathrm{V}.$$

Tjemena vrijednost ovog sinusoidnog napona je

$$U_m = \sqrt{2} U = \sqrt{2} \cdot 220\,\mathrm{V} = 311\,\mathrm{V}.$$

Perioda T

Trenutačne vrijednosti izmjeničnog sinusoidnog napona u vremenu slijede oblik sinusne funkcije i *u pravilnim vremenskim razmacima periodički se ponavljaju*.

Perioda je vremenski razmak između dvaju uzastopnih maksimuma sinusoidne veličine.

Oznaka za periodu je T, a jedinica je sekunda.

$$[T] = \mathrm{s}$$

Frekvencija f

Trenutačna vrijednost sinusoidne veličine periodički titra (oscilira) između maksimuma i minimuma, pri čemu tijekom jedne periode učini jedan puni titraj.

Frekvencija je broj perioda (titraja) sinusoidne veličine u jednoj sekundi.

Frekvencija se označava s f i jednaka je recipročnoj vrijednosti periode T.

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

Iz ovoga proizlazi da je jedinica za frekvenciju $\frac{1}{\mathrm{s}}$. Ova jedinica naziva se *herc*[1] (Hz).

$$[f] = 1/\mathrm{s} = \mathrm{s}^{-1} = \mathrm{Hz}$$

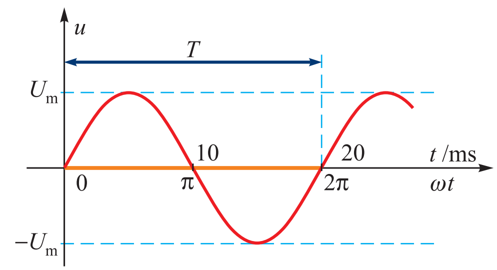
Kružna frekvencija ω

Trenutačna vrijednost izmjeničnog napona (ili bilo koje sinusoidne veličine) može se opisati općom sinusnom funkcijom, čiji se kut mijenja u vremenu stalnom (kutnom) brzinom ω.

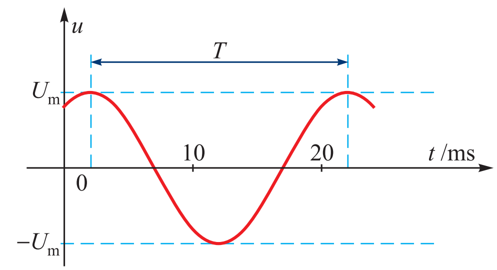
Brzina vremenske promjene kuta sinusne funkcije naziva se kružna frekvencija.

Kružna frekvencija povezana je s periodom, iz čega proizlaze i jedinice u kojima se iskazuje.

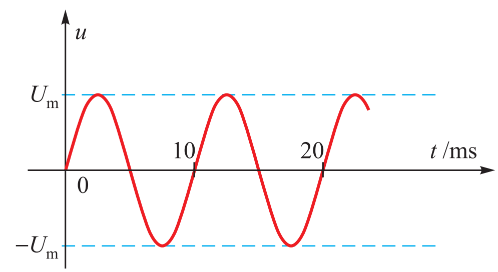
Sl. 1. Perioda izmjeničnog napona



Sl. 2. Napon periode T (kao na prethodnoj slici)



Sl. 3. Napon dvostruke frekvencije



PRIMJER 1.

Odredite periodu T izmjeničnog napona koji postiže vrijednost $0\,\mathrm{V}$ svakih $10\,\mathrm{ms}$.

◆ *Izmjenični napon prolazi kroz nulu svakih pola periode, što znači da je perioda napona*

$$T = 2 \cdot 10\,\mathrm{ms} = 20\,\mathrm{ms}.$$

PRIMJER 2.

Odredite frekvenciju napona sa slike 1.

◆ *Iz slike 1 vidi se da je perioda napona $T = 20\,\mathrm{s}$. Iz toga se dobiva frekvencija*

$$f = 1/T = 1/0{,}02\,\mathrm{s} = 50\,\mathrm{s}^{-1} = 50\,\mathrm{Hz}.$$

[1] **Hertz**, Rudolf Heinrich (1857.–1894.), njemački fizičar, prvi proizveo i detektirao elektromagnetske valove.

Jedinice za kružnu frekvenciju

Tijekom jedne periode T kut sinusne funkcije promijeni se za 2π $(360°)$. Brzina promjene kuta jednaka je omjeru promjene kuta i za to potrebnog vremena, što daje vezu kružne frekvencije ω i periode sinusoide T

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Ovdje 2π predstavlja puni kut izražen u radijanima, pa iz toga proizlazi jedinica za kružnu frekvenciju kao *radijan u sekundi*.

Kako jedinica kuta radijan (kao omjer m/m) nema dimenzija, kružna se frekvencija može izraziti u jedinicama $1/\mathrm{s}$ ili s^{-1}, tj.

$$[\omega] = \mathrm{rad}/\mathrm{s} = 1/\mathrm{s} = \mathrm{s}^{-1}.$$

Ovo potvrđuje i sljedeća važna jednadžba

$$\boxed{\omega = 2\pi f}$$

koja povezuje kružnu frekvenciju ω s frekvencijom f sinusoidne veličine (primjer 1).

Početni kut α_0

Kut α sinusne funkcije, koja opisuje neku vremenski promjenjivu veličinu, raste s vremenom t (stalnom kutnom brzinom ω) prema izrazu

$$\alpha = (\omega t + \alpha_0)$$

Za $t{=}0$ veličina kuta $\alpha{=}\alpha_0$, iz čega proizlazi:

Početni kut α_0 je kut koji sinusna funkcija ima u trenutku $t{=}0$.

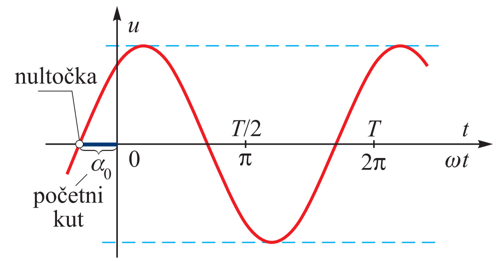
Nazovemo li točku u kojoj sinusna funkcija rastući prolazi kroz nulu *nultočka*, tad početni kut određuje pomak nultočke sinusoide od ishodišta, tj. od trenutka $t{=}0$ (slika 1).

Fazni pomak

Pomak nultočke sinusoide od ishodišta, ili pak međusobni pomak nultočaka dviju sinusoida, naziva se *fazni pomak*.

Međusobni fazni pomak dviju sinusoida jednak je razlici njihovih početnih kutova.

Sl. 1. Početni kut sinusoide



PRIMJER 1.

Odredite kružnu frekvenciju izmjenične struje frekvencije $f{=}60\,\mathrm{Hz}$.

◆ *Kružnu frekvenciju s frekvencijom f povezuje jednadžba $\omega = 2\pi f$, pa je kružna frekvencija*

$$\omega = 2\pi f = 6{,}28(60\,\mathrm{s}^{-1}) = 377\,\mathrm{s}^{-1}.$$

PRIMJER 2.

Koliki je početni kut struje frekvencije $50\,\mathrm{Hz}$ koja ima nultočku $5\,\mathrm{ms}$ prije trenutka $t{=}0$?

◆ *Perioda struje je $T{=}1/f{=}1/50\,\mathrm{s}^{-1}{=}20\,\mathrm{ms}$. Tijekom jedne periode kut sinusoide promijeni se za 2π $(360°)$. Sinusoida struje vremenski je pomaknuta prema ishodištu za $5\,\mathrm{ms}$ $(=T/4)$, čemu odgovara fazni pomak (početni kut)*

$$\alpha_0 = 2\pi/4 = \pi/2 = 1{,}57\,\mathrm{rad} = 90°.$$

PRIMJER 3.

Treba odrediti jednadžbu napona (sa slike 1) koji svoj maksimum od 34 V doseže prvi put $10\,\mathrm{ms}$ nakon trenutka $t{=}0$, a potom svakih $60\,\mathrm{ms}$.

◆ *Opća jednadžba sinusoidnog napona je*

$$u = U_m \sin(\omega t + \alpha_0).$$

Tjemena vrijednost napona je $U_m{=}34\,\mathrm{V}$. Perioda (ponavljanja) napona je $T{=}60\,\mathrm{ms}$, pa se kružna frekvencija ω računa kao

$$\omega{=}2\pi/T{=}6{,}28/(60{\cdot}10^{-3}\,\mathrm{s}){=}104{,}7\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Čista sinusna funkcija, koja ima početni kut $\alpha_0{=}0$, svoj maksimum postigla bi nakon $1/4$ periode, tj. nakon $T/4{=}15\,\mathrm{ms}$, dok ovaj napon to postiže već nakon $10\,\mathrm{ms}$. To znači da on prethodi ishodištu za $(15{-}10{=})$ $5\,\mathrm{ms}$, a to je $1/12$ periode, što odgovara početnom kutu

$$\alpha_0 = 2\pi/12 = 360°/12 = 30°$$

pa napon opisuje sljedeća jednadžba

$$u = 34\sin(104{,}7t + 30°)\,\mathrm{V}.$$

Provjera znanja I.2.

1. Napišite opći oblik jednadžbe sinusoidnog napona.
2. Što su to *sinusoidne* veličine?
3. Što označava izraz *trenutačna vrijedost* izmjeničnog napona?
4. Što je *tjemena vrijedost* (amplituda) sinusoide?
5. Što je *efektivna* vrijednost struje i u kakvom je odnosu s tjemenom vrijednošću izmjenične (sinusoidne) struje?
6. Što je *perioda* sinusoide, kako se označava i u kojim jedinicama se iskazuje?
7. Što je *frekvencija* sinusoide, kako se označava i u kojim jedinicama se iskazuje?
8. Što je *kružna frekvencija* sinusoide, kako se označava i u kojim jedinicama se iskazuje?
9. Što je *početni kut* sinusoide?
10. Što označava pojam *fazni pomak*?

Zadaci za vježbu I.2.

1. Odredite jednadžbu sinusne funkcije napona koji je opisan kosinusnom funkcijom kao $u = 34\cos(\omega t + 30^\circ)\ \mathrm{V}$.
2. Odredite jednadžbu po kojoj se mijenja trenutačna vrijednost napona čija sinusoida u trenutku $t=0$ rastući prolazi kroz nulu te svakih $20\ \mathrm{ms}$ doseže tjemenu vrijednost od $220\ \mathrm{V}$.
3. Kolika je efektivna vrijednost napona tjemene vrijednosti $155\ \mathrm{V}$?
4. Kolika je perioda napona frekvencije $400\ \mathrm{Hz}$?
5. Kolika je frekvencija izmjenične struje koja svakih $30\ \mathrm{ms}$ ima vrijednost $0\ \mathrm{A}$?
6. Kolika je kružna frekvencija izmjeničnog napona koji svakih $60\ \mathrm{ms}$ postiže svoju najveću vrijednost?
7. Koliki je početni kut sinusne funkcije napona koji u trenutku $t=0$ postiže svoju najveću vrijednost?
8. Koliki je fazni pomak između struje i napona čije su trenutačne vrijednosti opisane jednadžbama $i = I_\mathrm{m}\sin(\omega t)\ \mathrm{A}$ i $u = U_\mathrm{m}\cos(\omega t + 90^\circ)\ \mathrm{V}$? Skicirajte sinusoide ovih veličina.
9. Odredite jednadžbu sinusoide struje, frekvencije $50\ \mathrm{Hz}$, koja tjemenu vrijednost od $5\ \mathrm{A}$ doseže $2{,}5\ \mathrm{ms}$ nakon trenutka $t=0$.