I. Sinusoidne izmjenične električne veličine

Zadaci za vježbu I.1

Zadatak 1. Koliko radijana ima kut od $86°$?

Rješenje. Poznato je iz geometrije da se veličina kuta može izraziti dvama načinima: u stupnjevima ($°$) ili radijanima (rad). Puni kut (okretaj) ima 360 stupnjeva ili 2π radijana. Prema tome, jednom radijanu odgovara kut od $\frac{360}{2 \times 3{,}14} = 57{,}3$ stupnjeva. Broj radijana u ovom zadatku je dakle $\frac{86}{57{,}3} = 1{,}5$. Kod rješavanja zadataka sa sinusnim naponima i strujama možemo koristiti pretvorbu radijana u stupnjeve i obratno. Važno je prije rješavanja provjeriti u kojim je jedinicama kut zadan, pa ga se po potrebi može pretvoriti u one jedinice s kojima nam je lakše računati (obično stupnjevi).

Zadatak 2. Kolika je kutna brzina vrtnje svitka koji se u svakoj milisekundi zakrene za kut od $3{,}6°$?

Rješenje. Pojam kutne brzine koristimo pri razmatranju kružnog gibanja. Npr. ako se ravni štap, počevši od nekog početnog položaja, okreće oko jednog svog kraja (čvrste točke koju nazivamo središte ili os vrtnje), tada u svakom trenutku štap sa svojim početnim položajem čini neki kut. Taj kut vrtnjom štapa raste, a brzina njegove promjene naziva se kutna brzina (ω). Sve točke štapa imaju jednaku kutnu brzinu, jer svaka od njih u jedinici vremena opisuje jednak kut u odnosu na početni položaj. Kutnu brzinu možemo izraziti kao broj stupnjeva ili kao broj radijana u 1 sekundi. Dakle kutna je brzina u ovom primjeru $3{,}6°/0{,}001\,\mathrm{s} \times 1000 = 3600\ °/\mathrm{s}$. Ako taj kut izrazimo u radijanima tj. 3600 podijelimo s $57{,}3$ dobivamo da je kutna brzina $62{,}8\,\mathrm{rad/s}$.

Zadatak 3. Kolika je najveća vrijednost napona induciranog u svitku koji se vrti stalnom kutnom brzinom oko osi okomite na silnice homogenog magnetskog polja.

Zadano je: $N = 100$, $S = 27\,\text{cm}^2$, $\omega = 104{,}7\,\text{rad/s}$, $B = 0{,}6\,\text{T}$

Rješenje. $U_m = N \cdot S \cdot B \cdot \omega \;\rightarrow\; U_m = 17\,\text{V}$

Valni oblik (vremenska funkcija) napona je sinusoidan. U_m je amplituda.

Frekvencija je $f = \dfrac{\omega}{2 \cdot \pi} \;\rightarrow\; f = 16{,}664\,\text{Hz}$

Zadatak 4. Ako bismo magnetsko polje iz prethodnog zadatka zaokrenuli tako da mu silnice budu paralelne s osi vrtnje svitka, da li bi se vrtnjom mijenjao svitkom obuhvaćeni magnetski tok? Napišite jednadžbu vremenske funkcije napona induciranog u svitku u tom slučaju.

Rješenje. U opisanom slučaju magnetski tok **ne prolazi** kroz površinu svitka. Zato, pri vrtnji svitka nema promjene toka niti induciranog napona.

Zadatak 5. Koliko traje jedan okretaj svitka koji se vrti stalnom kutnom brzinom ω?

Zadano je: $\omega = 314\,\text{rad/s}$.

Rješenje. U jednom okretaju opiše se kut od 2π radijana. U ovom slučaju se u jednoj sekundi izvrši 50 okretaja. Trajanje jednog okretaja je: $T_{\text{okretaja}} = \dfrac{2\pi}{\omega} \;\rightarrow\; T_{\text{okretaja}} = 0{,}02\,\text{s}$.

Zadatak 6. Kolika je kružna frekvencija napona induciranog u svitku koji svake sekunde učini 60 okretaja oko osi okomite na silnice magnetskog polja?

Zadano je: $n = 60$.

Rješenje. U svakoj sekundi se opisuje kut od $2\pi n$ radijana. Kutna brzina je:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot n \rightarrow \omega = 377\ \text{rad/s}.$$

Zadatak 7. Napon induciran u svitku, koji se vrti oko osi okomite na silnice magnetskog polja jednolike gustoće, svakih 60 ms doseže najveću vrijednost U_m. Kolika je površina svitka?

Zadano je: $N = 75$, $T = 0{,}06$ s, $B = 1{,}2$ T, $U_m = 34$ V.

Rješenje.

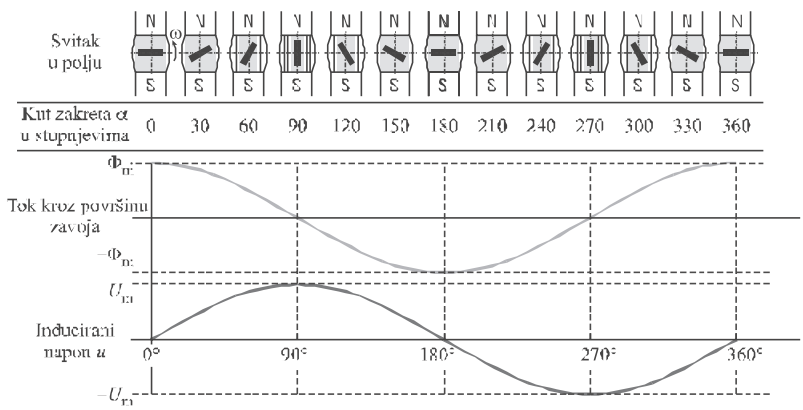
$$f = \frac{1}{T}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \;\rightarrow\; \omega = 104 \text{ rad/s}, \qquad S = \frac{U_m}{N \cdot B \cdot \omega} \;\rightarrow\; S = 3{,}63 \times 10^{-3} \text{ m}^2.$$

Zadatak 8. Odredite jednadžbu sinusoide napona induciranog u svitku od N zavoja površine S koji se okreće oko osi okomite na silnice magnetskog polja. Svitak počinje vrtnju iz položaja u kojem je obuhvaćen najveći magnetski tok.

Zadano je: $B = 1{,}2\,\text{T}$, $N = 100$, $S = 16 \times 10^{-4}$ m^2,
$n = 3\,000$ okretaja/minuti.

Rješenje. Najprije valja ustanoviti kutnu brzinu tj. za koliki se kut svitak zakrene u jednoj sekundi. U jednoj sekundi svitak učini $\frac{3000}{60} = 50$ okretaja. To odgovara kutu od $50 \cdot 2\pi$ rad, pa je kutna brzina $\omega = \left(\frac{50 \cdot 2\pi}{1} =\right)$ 314 rad/s.

U opisanom slučaju napon ima oblik sinusne funkcije što je objašnjeno slikom na kojoj su nacrtani položaji svitka u 13 trenutaka. Promjenom položaja svitka mijenja se broj silnica (obuhvaćeni tok) magnetskog polja koje prolaze kroz površinu svitka. Matematička funkcija promjene toka je kosinusoida. Inducirani je napon prema Faradayevu zakonu ovisan o brzini vremenske promjene toka. Tamo gdje se tok najbrže mijenja, inducirani napon je najveći. Dobiva se matematička funkcija $u(t) = 60{,}3\sin(314)$. Na istoj slici pažljivi će čitatelj zaključiti da će matematički opis vremenske funkcije promjene toka, pa tako i napona, ovisiti o početnom položaju svitka. Npr. za početni položaj od 90 stupnjeva funkcija napona je kosinusoida.



Nadalje će se (pažljivi čitatelj) zapitati zašto je tok u pojedinim intervalima negativan. Površina svitka ima dvije strane (obraza). Predznak toka ovisi o tome s koje strane ("u koji obraz") ulaze silnice polja. Lako je primijetiti da je npr. nakon 90 stupnjeva svitak u magnetskom polju "okrenuo drugi obraz".

Početni položaj svitka u kojem se inducira napon na neki način odgovara početku promatranja induciranog napona. Znamo da na priključnicama izmjeničnog napona (npr. na utičnici) stalno postoji sinusoidni napon. Zamislimo da je netko u jednom (proizvoljno odabranom) trenutku dao znak za početak promatranja tog napona. Taj trenutak je za nas $t = 0$ i od njega se "mjeri" proteklo vrijeme. Matematička funkcija se odnosi na taj početni trenutak. Početnim trenutkom određen je početni položaj svitka (tj. početni kut koji os svitka čini sa silnicama magnetskog polja).

Na kraju treba kazati da nam je vrtnja svitka pomogla da matematički opišemo izmjenični napon. Takav se napon može "proizvesti" i na druge načine npr. u oscilatorima u kojima nema rotirajućeg svitka ali je matematički opis sinusoidne funkcije, odnosno kako se popularno kaže "izmjeničnog napona", i u tom slučaju jednak. U sljedećim zadacima pažnju usmjeravamo upravo na prikaze sinusoidnih napona, a ne na način njihova "nastanka".

Zadaci za vježbu I.2

Zadatak 1. Odredite jednadžbu sinusne funkcije napona koji je opisan kosinusnom funkcijom kao $u(t) = 34\cos(\omega \cdot t + 30°)\,\mathrm{V}$.

Rješenje. Sinusne i kosinusne funkcije zajedničkim imenom nazivamo: sinusoidne ili harmonijske funkcije. Važno je znati da se ista sinusoidna veličina može izraziti ili sinusnom ili kosinusnom funkcijom iste frekvencije, ali različitih početnih kutova. Prikaz sinusnom funkcijom možemo pretvoriti u prikaz kosinusnom funkcijom (i obratno) jednostavnom promjenom početnog kuta. Pritom je veličina sinusne funkcije nekog kuta jednaka veličini kosinusne funkcije istog kuta uvećanog za $90°$ $\left(\text{ili } \frac{\pi}{2}\,\text{rad}\right)$ a veličina kosinusne funkcije nekog kuta jednaka veličini sinusne funkcije istog kuta umanjenog za $90°$. Napon iz ovoga zadatka prikazan je kosinusnom funkcijom koja ima početni fazni kut $30°$. Sinusna funkciju koja ima početni fazni kut za $90°$ veći od početnog faznog kuta zadanog kosinusnog napona je $u(t) = 34\sin(\omega \cdot t + 30° + 90°)\,\mathrm{V} = 34\sin(\omega \cdot t + 120°)\,\mathrm{V}$, a identična je zadanoj kosinusnoj, jer ima iste funkcijske vrijednosti.

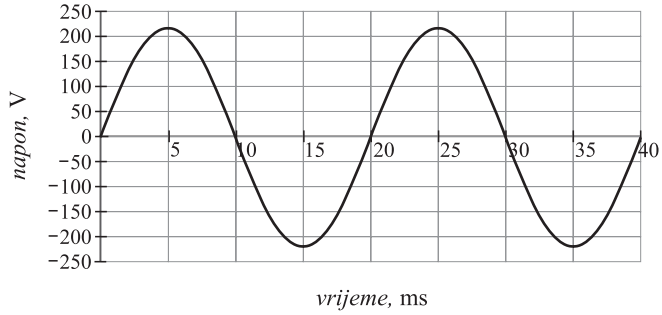
Važna napomena. Budući da je kružna frekvencija u ovoj jednadžbi izražena u jedinicama $\mathrm{rad/s}$, početni fazni kut bi trebalo izraziti u radijanima, tako da bi oba pribrojnika, koja čine kut sinusne funkcije (izraz u zagradi), bila izražena istim jedinicama (sjetimo se starog pravila iz matematike: "ne smiju se zbrajati kruške i jabuke"). Iako ovako napisana jednadžba nije matematički sasvim korektna, ona je preglednija jer smo navikli i lakše nam je predočavati kutove u stupnjevima. Pišemo li ovako, moramo, naravno, voditi računa o tome da kad želimo izračunavati trenutačne vrijednosti, početni kut moramo pretvoriti u radijane (u ovom slučaju to je $120° = 2\pi/3\,\mathrm{rad}$).

Zadatak 2. Odredite jednadžbu po kojoj se mijenja trenutačna vrijednost napona čija sinusoida u trenutku $t = 0$ rastući prolazi kroz nulu te svakih $20\,\mathrm{ms}$ doseže vrijednost od $220\,\mathrm{V}$.

Rješenje. Perioda ove sinusoide je $T = 20\,\mathrm{ms}$, a to znači da je njezina frekvencija $f = \frac{1}{T} = 50\,\mathrm{Hz}$. Kružna frekvencija je $\omega = 2\pi f = 314\,\mathrm{s}^{-1}$. Budući da sinusoida u početnom trenutku rastući prolazi kroz nulu, zaključujemo da se radi o sinusnoj funkciji koja ima početni fazni kut jednak nuli. Sinusnu funkciju koja ima početni (fazni) kut nula nazivamo još i "čista" sinusna funkcija, pa je $u(t) = 220\sin(314 \cdot t)\,\mathrm{V}$

Na slici je prikazan graf zadane sinusoide za prvih $40\,\mathrm{ms}$. U trenutku $t = 5\,\mathrm{ms}$ napon ima pozitivnu tjemenu vrijednost koja se ponavlja nakon $20\,\mathrm{ms}$ odnosno u trenutku $t = 25\,\mathrm{ms}$.

$$u(t) = 220\sin(314 \cdot t)\,\mathrm{V}.$$



Zadatak 3. Kolika je efektivna vrijednost sinusoidnog napona tjemene vrijednosti $155\,\mathrm{V}$? Ovisi li efektivna vrijednost o početnom faznom kutu?

Rješenje. Efektivna vrijednost sinusoidnog napona je $\sqrt{2}$ puta manja od tjemene. Za zadani napon je $U_{ef} = \dfrac{155}{\sqrt{2}} = 110\,\mathrm{V}$. Uvođenje efektivne vrijednosti omogućuje da se snaga kod izmjenične struje izračuna istom jednadžbom kao kod istosmjerne struje. Npr. , ako bismo na neki otpornik najprije priključili zadani sinusni napon tjemene vrijednosti $155\,\mathrm{V}$, a zatim istosmjerni napon od $110\,\mathrm{V}$, snage na otporu bile bi u oba slučaja jednake. Efektivna vrijednost ne ovisi o početnom faznom kutu, a važna je za izračun snage.

Zadatak 4. Kolika je perioda napona frekvencije $400\,\mathrm{Hz}$? Ovisi li efektivna vrijednost o frekvenciji, odnosno periodi?

Rješenje. Perioda je $T = \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{400} = 2{,}5\,\mathrm{ms}$. To znači da se npr. tjemena vrijednost napona pojavljuje svake $2{,}5$ milisekunde. Efektivna vrijednost ne ovisi o frekvenciji nego samo o tjemenoj vrijednosti sinusoidnog napona.

Zadatak 5. Kolika je frekvencija izmjenične struje koja svakih $30\,\mathrm{ms}$ ima vrijednost $0\,\mathrm{A}$?

Rješenje. Sinusna funkcija ima vrijednost 0 na početku, na polovini te na kraju periode, tj. vrijednost 0 ponavlja se nakon jedne polovine periode (vidite sliku uz rješenje zadatka 2). To znači da je ovdje polovina periode jednaka $30\,\mathrm{ms}$, pa je perioda $T = 2 \cdot 30\,\mathrm{ms} = 60\,\mathrm{ms}$, a frekvencija $f = \dfrac{1}{T} = 16\dfrac{2}{3}\,\mathrm{Hz}$. Ovo je frekvencija napona kojim su bile napajane njemačke željeznice, a koja je 3 puta manja od frekvencije napona $50\,\mathrm{Hz}$ (perioda $20\,\mathrm{ms}$) europskih elektroenergetskih mreža. Napon elektroenergetskih mreža nekih prekomorskih zemalja (npr. SAD) ima frekvenciju $60\,\mathrm{Hz}$.

Zadatak 6. Kolika je kružna frekvencija izmjeničnog napona koji svakih $60\,\text{ms}$ postiže svoju najveću vrijednost?

Rješenje. Kružna frekvencija (ili kutna brzina) ω povezana je s frekvencijom f. Stoga, najprije odredimo frekvenciju, a iz nje kružnu frekvenciju. Perioda napona je $T = 60\,\text{ms}$. Frekvencija je $f = \dfrac{1}{60}\,\text{ms} = 16\dfrac{2}{3}$ Hz pa je $\omega = 2\pi f = 104{,}7\,s^{-1}$.
Napomena. Ponekad se za kružnu frekvenciju ω kaže (kraće) samo *frekvencija*. Da bi bilo jasno o kojoj se frekvenciji radi, jedinica za frekvenciju f (s^{-1}) naziva se *herc* i označava s Hz. Npr. , kad kažemo "frekvencija je 400 Hz", radi se o frekvenciji f, a izraz "frekvencija je $400\,\dfrac{\text{rad}}{\text{s}}$" (ili "$400\ \text{s}^{-1}$") govori o kružnoj frekvenciji ω.

Zadatak 7. Koliki je početni kut sinusne funkcije napona koji u trenutku $t = 0$ postiže svoju najveću vrijednost?

Rješenje. To znači da je $U_m \sin(\omega \cdot 0 + \alpha_0) = U_m$, tj. $\sin(\alpha_0) = 1 \;\rightarrow\; \alpha_0 = 90^\circ$ $\left(\text{ili } \dfrac{\pi}{2} \text{ rad}\right)$. U ovom slučaju radi se o "čistoj" kosinusnoj funkciji, tj.

$$u(t) = U_m \sin(\omega \cdot t + 90^\circ) = U_m \cos(\omega \cdot t).$$

Pitanje: Koliki bi bio početni kut sinusoide koja bi u trenutku $t = 0$ imala najmanju vrijednost (minimum)?

Odgovor: 270° ili -90° (provjerite).

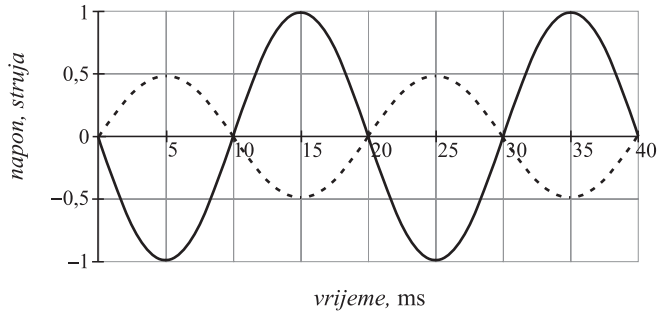
Zadatak 8. Koliki je fazni pomak između struje i napona čije su trenutačne vrijednosti opisane jednadžbama $i(t) = I_m \sin\omega \cdot t, \quad u(t) = U_m \cos(\omega \cdot t + 90^\circ)$?

Rješenje. Struja je opisana kao "čista" sinusna funkcija. Napon je kosinusna funkcija s početnim faznim kutem od 90°. Da bismo mogli ustanoviti međusobni fazni pomak, obje sinusoidne veličine treba prikazati istovrsnim funkcijama (sinus ili kosinus). Veličinu napona možemo opisati sinusnom funkcijom, s početnim kutem koji je jednak kutu kosinusne funkcije uvećanom za 90°. Dakle,

$$u(t) = U_m \sin(\omega \cdot t + 90^\circ + 90^\circ) = U_m \sin(\omega \cdot t + 180^\circ).$$

Prema tome zaključujemo da su sinusoide napona i struje međusobno fazno pomaknute za kut od 180° (ili π rad). U takvom slučaju pri opisu međusobnog faznog pomaka koristimo pojam: *protufaza* tj. opisani napon i struja su u *protufazi*. Na slici su prikazani grafovi zadanih sinusoida (uz pretpostavku da je frekvencija $f = 50\,\text{Hz}$ te da je amplituda struje $0{,}5\,\text{A}$, a napona $1\,\text{V}$. Crtkano je prikazana struja.

$$i(t) = 0{,}5\sin(314t)\,\mathrm{A}\,, \quad u(t) = 1\sin(314t + \pi)\,\mathrm{V}$$



Međusobni fazni pomak dviju sinusoidnih veličina jednak je razlici njihovih početnih kutova.

Zadatak 9. Odredite jednadžbu sinusoide struje frekvencije $50\,\mathrm{Hz}$ koja tjemenu vrijednost (I_m) od $5\,\mathrm{A}$ doseže (u trenutku $t_1 = 2{,}5\,\mathrm{ms}$) nakon trenutka $t = 0$?

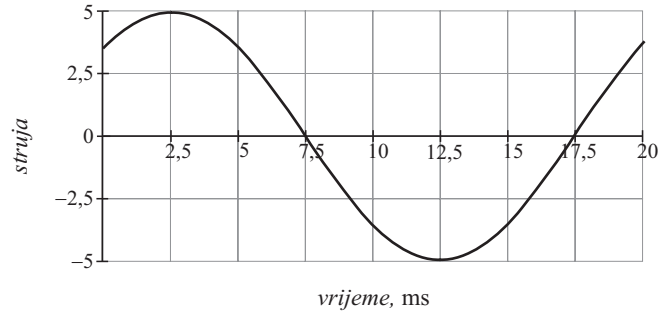
Zadano: $f = 50\,\mathrm{Hz}$, $I_m = 5\,\mathrm{A}$, $t_1 = 0{,}0025\,\mathrm{s}$.

Rješenje. Treba odrediti koliki je kut sinusoide u trenutku t_1, tj. treba odrediti za koliko se promijeni kut sinusoide struje u vremenu t_1. Uz zadanu frekvenciju, perioda T traje $20\,\mathrm{ms}$, za koje se vrijeme kut sinusoide promijeni za $360°$ $(2\pi\,\mathrm{rad})$, pa je kružna frekvencija (brzina promjene kuta u vremenu) $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f = 314\,\mathrm{rad/s}$. $2{,}5\,\mathrm{ms}$ je osmina periode $\left(t_1 = \dfrac{T}{8}\right)$, što odgovara osmini kuta od $360°$, a to je $45°$ ili $\dfrac{\pi}{4}\,\mathrm{rad}$.

"Čista" sinusna funkcija postigla bi tjemenu vrijednost $\dfrac{1}{4}$ periode ili $5\,\mathrm{ms}$ nakon trenutka $t = 0$. Budući da se to kod zadane struje događa ranije (već nakon $2{,}5\,\mathrm{ms}$) zaključujemo da je zadana struja pomaknuta ulijevo na vremenskoj osi, što znači da ima pozitivan početni fazni kut $\left(+\dfrac{\pi}{4}\right)$. Na temelju ovih podataka dobivamo jednadžbu sinusoide struje ($I_m \sin(\omega t + \alpha_0)$) kako slijedi: $i(t) = 5\sin\left(314t + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Matematika je inače važno inženjersko pomagalo, kojim smo, npr. mogli početni kut struje jednostavno izračunati uvrštavanjem zadanih podataka u opću jednadžbu struje $I_m \sin(2\pi f t + \alpha_0)$, što za zadani trenutak $t_1 = 0{,}0025\,\mathrm{s}$ daje: $i(t_1) = 5\sin(2\pi \cdot 50 \cdot 0{,}0025 + \alpha_0)\,\mathrm{A} = 5\,\mathrm{A}$, tj. $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha_0\right) = 1$. Kako je $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, znači da je $\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha_0\right) = \dfrac{\pi}{2}$, iz čega proizlazi da je $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4} = +\dfrac{\pi}{4}$.

$$i(t) = 5\left(\sin 314t + \frac{\pi}{4}\right)\ \mathrm{A}$$



Na slici je grafički prikazana vremenska promjena (koja se još naziva "valni oblik") zadane struje gdje se vidi da struja postiže maksimum $2{,}5\,\mathrm{ms}$ nakon trenutka $t = 0$, a vrijednosti struje ponavljaju se nakon vremena od $20\ \mathrm{ms}$ (perioda sinusoide).

Treba napomenuti da umjesto pojedinih vremena na apscisu (vodoravnu os) možemo staviti odgovarajuće kutove ($\alpha = \omega t$) koji pokazuju za koliko se promijeni kut zadane sinusne funkcije tijekom određenog vremena t. Tako će na mjestu gdje piše $2{,}5\,\mathrm{ms}$ pisati $\frac{\pi}{4}$, na $5\,\mathrm{ms}$ $\frac{\pi}{2}$ itd. Koliki kut bi trebao stajati na mjestu gdje je $t = 20\,\mathrm{ms}$? (Odredite i upišite odgovarajuće kutove za sva naznačena vremena). Na ovaj način (u ovisnosti o kutu) prikazani sinusni valni oblik postaje neovisan o frekvenciji tj. isti je bez obzira na veličinu periode.

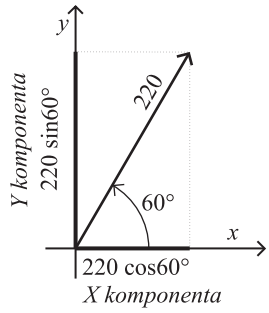
Zadaci za vježbu I.3

Zadatak 1. Odredite pravokutne (XY) koordinate sinusnog napona koji je prikazan vektorom $U = 220\,\underline{|60^\circ}$.

Rješenje. Ovaj zadatak se može riješiti računskim ili grafičkim postupkom.

a) Grafički postupak: u pravokutni koordinantni sustav ucrta se zadani vektor, s duljinom koja je određena (proizvoljno) odabranim mjerilom (npr. za mjerilo $100\,\mathrm{V} \approx 1$ cm, duljina na crtežu bi bila $2{,}2$ cm) i sa zadanim kutom (položajem) u odnosu na pozitivnu stranu osi x (za ucrtavanje kuta od 60 stupnjeva potreban je kutomjer ili standardni trokut $60/30$ stupnjeva) prema slici.

Nakon crtanja vektora, potrebno je izmjeriti X i Y komponente i pomoću odabranog mjerila "pretvoriti" ih u napon;



b) Računski postupak: poznavanjem odnosa stranica i kutova u pravokutnom trokutu zadatak možemo riješiti tako da napravimo samo skicu položaja vektora i zatim izračunamo komponente pomoću sinusa i kosinusa kuta od 60°. Dobivamo:

$$X\{U\} = 220 \cdot \cos 60^\circ = 220 \cdot 0{,}5 = 110\ \mathrm{V},$$

odnosno

$$Y\{U\} = 220 \cdot \sin 60^\circ = 220 \cdot 0{,}866 = 190\ \mathrm{V}.$$

Preporučuje se učeniku da zadatak riješi na oba načina, dakle crtanjem u mjerilu i računski. Podsjetimo da su pravokutne (X i Y) komponente vektora s njegovom duljinom povezane Pitagorinim poučkom, što nam omogućuje provjeru rezultata.

Rješavanje zadataka može se ubrzati ako se napamet znaju veličine sinusa i kosinusa karakterističnih kutova 30°, 45°, 60° i 90° (iz kojih se pomoću jedinične kružnice lako dobiju veličine tih funkcija i za kutove 120°, 135°, 150°, 180°, 210°, 225°, 240°, 270°, 300°, 315°, 330° i 360°).

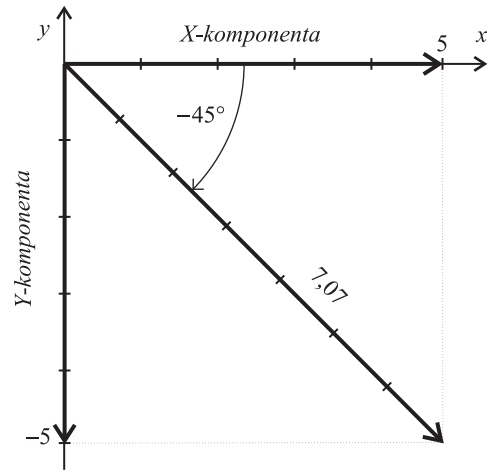
Napomenimo ovdje, da se ponegdje u inozemnoj literaturi (SAD) električne sinusoidne veličine ne predstavljaju sinusnom, nego kosinusnom funkcijom.
Tako bi se napon iz ovoga zadatka, prikazan sinusnom funkcijom kao $u(t) = 220\sin(\omega t + 60^\circ)$ V, mogao prikazati i kosinusnom funkcijom kao $u(t) = 220\cos(\omega t - 30^\circ)$ V.

Početni fazni kut lako se odredi iz vektorskog prikaza na slici. Pritom treba voditi računa o tome da vektor napona za "čisti" sinus leži u osi $+X$ te o tome da (dogovorno) **pozitivni**

predznak kutu daje zakret od osi ("čiste" funkcije) **u smjeru obrnutom od kretanja kazaljke sata** (dok kut vektora prema osi, gledan u smjeru kretanja kazaljke sata ima negativan predznak). Prema tome, zadani vektor ima početni fazni kut $+60°$.

Zadatak 2. Vektor struje zadan je svojim pravokutnim koordinatama $X(I) = 5\,\mathrm{A}$ i $Y(I) = -5\,\mathrm{A}$. Odredite iznos i kut vektora struje te jednadžbu sinusoide struje koja je predstavljena tim vektorom, ako je frekvencija struje 50 Hz.

Rješenje. Potrebno je zamisliti (nacrtati, ili skicirati) zadane komponente kao vektore i zatim ih jednostavno (vektorski) zbrojiti, kao na slici.



Iz Pitagorina poučka dobivamo $I = \sqrt{X\{\overrightarrow{I}\}^2 + Y\{\overrightarrow{I}\}^2} = 7{,}7\,\mathrm{A}$, što je efektivna vrijednost struje, pa je maksimalna vrijednost $I_m = \sqrt{2}I = 10\,\mathrm{A}$.

Kut vektora određujemo kao $\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{Y}{X}\right)$. *Arc tg*, ili *atan*, (*arkus tangens*) je (i u elektroničkom kalkulatoru) funkcija inverzna funkciji *tangens*. Prema tome, kut je ovdje jednak:

$$\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{5}{5}\right) = \operatorname{arc\,tg}(-1) = -45°.$$

Iz slike se vidi da rezultantni vektor zatvara kut od $-45°$ prema pozitivnoj x-osi. Tom vektoru odgovara sinusoidna struja koju možemo napisati kao sinusnu funkciju ovako:

$$i(t) = 10\sin\left(314t - \frac{\pi}{4}\right)\ \mathrm{A}.$$

Često, zbog lakšeg baratanja kutovima, umjesto kuta u radijanima upisujemo kut u stupnjevima, pa bismo u tom slučaju struju izrazili ovako:

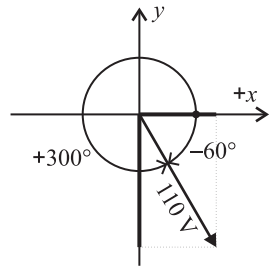
$$i(t) = 10\sin(314t - 45°)\ \mathrm{A}.$$

Iako matematički nije sasvim korektan, ovakav izraz je pregledniji jer smo navikli i lakše nam je predočavati kutove u stupnjevima. Pišemo li ovako, moramo naravno voditi računa o tome da kad želimo izračunavati trenutačne vrijednosti, moramo kut uvrstiti u radijanima, jer drugi pribrojnik u zagradi ($314t$) daje kut u radijanima. (Vrijedi li to i za izračun trenutačne vrijednosti u trenutku $t = 0$?)

Zadatak 3. Odredite iznos i kut vektora napona U zadanog jednadžbom

$$u(t) = 155\sin(377t + 300^\circ)\ \text{V}.$$

Rješenje. Oznaka U pokazuje da se radi o vektoru efektivne vrijednosti. Kod izmjeničnih napona i struja efektivne vrijednosti imaju posebnu važnost jer njima izračunavamo snagu i energiju. Efektivna vrijednost zadanog napona je $\frac{155}{\sqrt{2}} = 110$ V. Početni fazni kut je 300° . To znači da se vektor nalazi u 4. kvadrantu x-y ravnine.



Iz vektorskog prikaza vide se razne mogućnosti izraza vremenske funkcije koja opisuje zadani napon. Fazni kut je relativan jer ga možemo mjeriti idući u smjeru obrnutom od kretanja kazaljki sata (+ smjer) ili u smjeru kretanja kazaljki sata (- smjer). Stoga se sinusoidna funkcija može izraziti ili pozitivnim, ili negativnim početnim kutom, a ta dva (moguća) kuta zajedno čine puni kut od 360° (vidi sliku). Na taj način, zadani napon se može izraziti i kao: $u(t) = 155\sin(\omega t - 60^\circ)$ V.

Zadatak 4. Kolika je trenutačna vrijednost izmjeničnog napona zadanog vektorom $U = 24\,\underline{|30^\circ}$ V u trenutku $t = 0$?

Rješenje. U koordinantni sustav ucrtamo zadani vektor. Dobivamo vektor u prvom kvadrantu koji s (pozitivnom) x-osi zatvara kut od $+30^\circ$. Y-komponenta (projekcija na os Y) takvog vektora, određenog izrazom $U = U\,\underline{|\alpha}$, jednaka je $Y(U) = U\sin\alpha$.

Trenutačna vrijednost izmjeničnog napona u trenutku $t = 0$ jednaka je

$$u(t = 0) = U_m \sin\alpha = \sqrt{2}U\sin\alpha = \sqrt{2}Y(U).$$

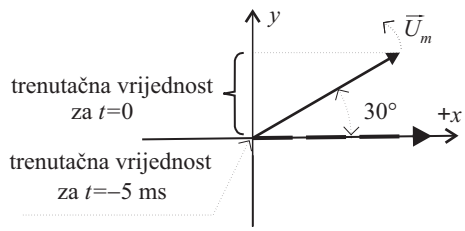
Odredimo li, dakle, Y-komponentu $Y(U)$ vektora efektivne vrijednosti U i pomnožimo je s $\sqrt{2}$, dobivamo trenutačnu vrijednost izmjeničnog napona u trenutku $t = 0$, tj. $u(t = 0) = \sqrt{2}\,24 \sin \underline{|30^\circ}$ V $= 16{,}9$ V.

Množenje s $\sqrt{2}$ potrebno je stoga što je ovdje zadan vektor efektivne vrijednosti koja je $\sqrt{2}$ puta manja od maksimalne vrijednosti napona. Ako bismo nacrtali vektor istoga kuta, a $\sqrt{2}$ puta veće duljine (vektor maksimalne vrijednosti U_m) tada bi njegova Y-komponenta (projekcija na os Y) bila jednaka trenutačnoj vrijednosti izmjeničnog napona u trenutku $t = 0$ (slika u rješenju zadatka 5).

Zadatak 5. Ako je kružna frekvencija napona zadanog vektorom $U = 24\,\underline{|30^\circ}$, $\omega = 104{,}7$ rad/s, odredite koliko ms prije trenutka $t = 0$ nastupa nultočka sinusoide napona?

Zadano: $\omega = 104{,}7$ rad/s, $U_m = 24\sqrt{2}$, $U_m = 33{,}9$, $\alpha_U = \dfrac{\pi}{6}$ rad.

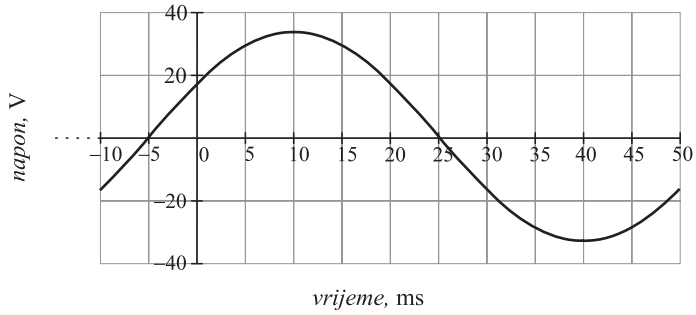
Rješenje. Zadatak ima smisla uz pretpostavku da je napon postojao i prije trenutka početka promatranja $t = 0$, a za rješavanje možemo koristiti prikaz napona vektorom maksimalne vrijednosti, koji rotira kutnom brzinom ω, prema slici. Treba uočiti da je u svakom trenutku *projekcija vektora maksimalne vrijednosti na y-os jednaka trenutačnoj vrijednosti napona*. U trenutku $t = 0$ položaj vektora zatvara kut od $+30^\circ$ s $+x$-osi, a neko vrijeme t_x prije toga položaj vektora je bio u smjeru $+x$-osi tako da je njegova projekcija na os y (trenutačna vrijednost napona) bila jednaka nuli (nultočka sinusoide napona).



Dakle, kut vektora, koji se pri rotaciji mijenja stalnom kutnom brzinom ω, promijenio se za 30° $\left(\text{ili } \dfrac{\pi}{6} \text{ rad}\right)$ tijekom vremena t_x. Prema tome, dobiva se da je traženo vrijeme:

$$t_x = \frac{\alpha_U}{\omega}, \qquad t_x = 5 \times 10^{-3} \text{ s}.$$

Sinusna funkcija napona, općeg oblika $u(t) = U_m \sin(\omega t + \alpha_U)$ prikazana je na slici.

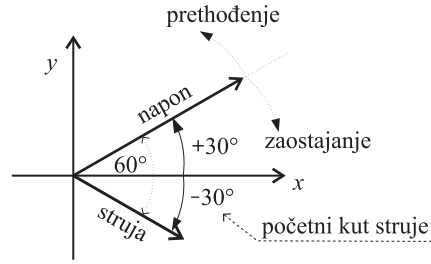


Iz grafičkog prikaza (grafa) vremenske promjene napona vidi se da napon ima nultočku 5 ms prije trenutka $t = 0$.

Ovaj smo zadatak mogli riješiti i čisto računski, jednostavnim uvrštavanjem zadanog uvjeta u opći oblik sinusne funkcije napona, što daje jednadžbu: $U_m \sin(\omega t_x + \alpha_u) = 0$, iz koje (uz $\alpha_u = 30°$ i $\omega = 104{,}7$ rad/s) dobivamo: $\omega t_x + \alpha_u = 0$, tj., $t_x = -\dfrac{\alpha_u}{\omega} = -5$ ms (gdje negativni predznak označava vrijeme prije trenutka $t = 0$).

Zadatak 6. Odredite kut vektora struje koja za naponom $U = 100\,\underline{|30°}$ V kasni u fazi za $60°$.

Rješenje. U x-y ravnini ucrtamo oba vektora u skladu s dogovorom o mjerenju kutova, odnosno s pojmovima faznog prethođenja i kašnjenja (zaostajanja), prema slici.



Za nacrtane vektore možemo zaključiti:

Napon ima početni fazni kut $+30°$, a struja $-30°$.

Struja fazno kasni za naponom za $60°$, a napon fazno prethodi struji za $60°$.

Nacrtani vektori predstavljaju (zamjenjuju) sinusoidne veličine.

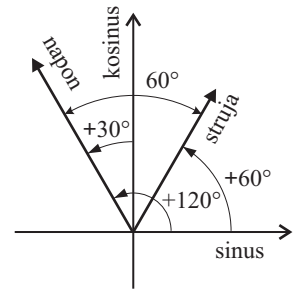
Zadatak 7. Koliki je fazni pomak između napona zadanog jednadžbom

$$u(t) = 310 \cdot \cos\left(314t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ V}$$

i struje zadane jednadžbom

$$i(t) = 3{,}5 \sin\left(314t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ A?}$$

Rješenje. a) Grafički postupak: crtamo vektorski dijagram. Vodimo pritom računa da je napon zadan kao kosinusna funkcija za koju se kutovi mjere od $+y$ osi (ili ga pretvaramo u sinusnu funkciju, povećavanjem početnog kuta za $90°$).



Iz skice vektora napona i struje možemo vidjeti da struja fazno zaostaje iza napona za $60°$, odnosno isto tako da napon prethodi struji za $60°$.

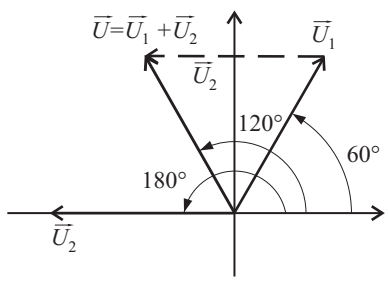
b) Računski postupak: *međusobni fazni pomak jednak je razlici početnih kutova dviju sinusoida izraženih istim (npr. sinusnim) funkcijama.* Tako, uz početni kut sinusne funkcije struje $\alpha_i = \frac{\pi}{3} = 60°$, napon moramo pretvoriti u sinusnu funkciju (povećavanjem kuta za $90°$) te dobivamo početni kut sinusne funkcije napona $\alpha_u = 30° + 90° = 120°$, pa je fazni pomak napona prema struji jednak:

$$\alpha_u - \alpha_i = 120° - 60° = +60°$$

(pozitivan predznak znači da napon prethodi struji). Na isti način dobili bismo da je fazni pomak struje prema naponu $\alpha_i - \alpha_u = 60° - 120° = -60°$, gdje negativni predznak znači da struja u fazi kasni (zaostaje) za naponom (za $60°$).

Zadatak 8. Odredite iznos i kut vektora koji je jednak zbroju vektora $U_1 = 220\,\underline{|60°}$ V i $U_2 = 220\,\underline{|180°}$ V.

Rješenje. Iz slike vektora vidimo da vektor zbroja s vektorima $\overrightarrow{U_1}$ i $\overrightarrow{U_2}$ čini istostranični trokut, tako da je početni fazni kut zbroja $120°$. Svi vektori imaju jednaku duljinu 220 V. (To je dakako poseban slučaj.)



Matematička funkcija koja opisuje rezultantni napon je:

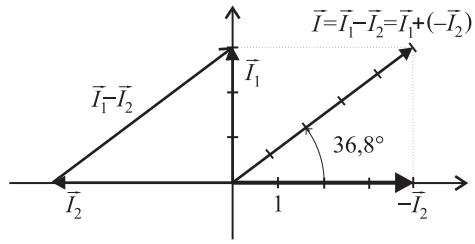
$$u(t) = 220\sqrt{2} \cdot \sin\left(\omega t + 2\frac{\pi}{3}\right).$$

Vodimo računa da zadani vektori zamjenjuju sinusoidne napone. Njihovim zbrajanjem na posredni način zbrajamo sinusne funkcije. Da bismo napisali matematičku funkciju zbrojenih sinusnih funkcija, morali bismo odrediti amplitudu i početni fazni kut.

Rezultantni napon fazno prethodi naponu u_1 za $60°$, a zaostaje iza napona u_2 za $60°$.

Zadatak 9. Odredite jednadžbu sinusoide struje koja je jednaka razlici struja

$$i_1(t) = 3\sin\left(314t + \frac{\pi}{2}\right)\ \text{A} \ \text{ i struje } \ i_2(t) = 4\sin(314t + \pi)\ \text{A}.$$



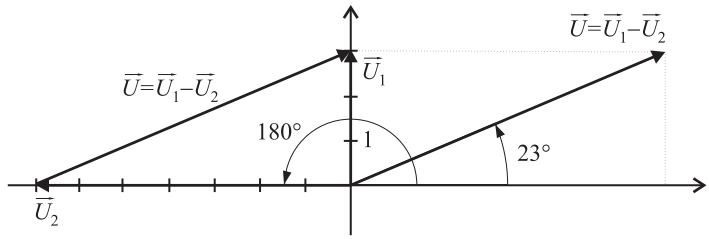
Rješenje. Koristimo "zaobilaznu" metodu u kojoj sinusne veličine najprije prikažemo vektorima, zatim oduzmemo vektore i dobiveni rezultantni vektor prikažemo sinusoidom. Postoji i "izravna" matematička metoda oduzimanja trigonometrijskih funkcija koju na gore opisani način izbjegavamo. Crtamo vektore maksimalnih vrijednosti. Oduzimanje "pretvaramo" u zbrajanje tako da nacrtamo vektor $-I_2$. Amplitudu rezultantne struje možemo odrediti grafički iz slike (mjerenjem duljine vektora) ili uz pomoć Pitagore.

Početni fazni kut rezultata odredimo mjerenjem (kutomjerom) ili preko $\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{3}{4}\right) = 36{,}8^\circ = 0{,}644$ rad, $i(t) = 5\sin(\omega t + 0{,}644)$ A.

Napomena. Na slici je prikazan i drugi način oduzimanja vektora u kojem jednostavno spojimo vrhove. Važna je usmjerenost rezultantnog vektora: od vrha onog koji se oduzima (umanjitelj) ka vrhu onog od kojeg se oduzima (umanjenik).

Zadatak 10. Odredite vektor napona U_2 koji treba oduzeti od vektora napona $U_1 = 30\,\underline{|90^\circ}$ V da bi se kao rezultat dobio napon $U = 76\,\underline{|23^\circ}$. Objasnite kako je moguće oduzimanjem dobiti veći iznos napona?

Rješenje. Nacrtamo vektore U_1 i rezultantni vektor razlike. Zatim koristeći postupak spajanja vrhova vektora pomaknemo rezultantni vektor i dobijemo da je $U_2 = 70\,\underline{|180^\circ}$.



Veći iznos je moguće dobiti jer se radi o zbrajanju veličina među kojima postoji fazni pomak.

Napomena. Zbrajanje i oduzimanje vektora je još jednostavnije ako vektore prikažemo kompleksnim brojevima.