1. ARITMETIKA

1.1. brojevi i znamenke

1. Dopiši uz $523{*}{*}{*}$ tri znamenke tako da dobiveni broj bude djeljiv sa 7, 8 i 9.

2. Na sve moguće načine rasporedi znamenke umjesto zvjezdica u jednakosti $*00{*}{*} = ({*}{*}{*})^2$.

3. Odredi prve tri znamenke broja

$$\frac{0{,}1234567\cdots5051}{0{,}515049\cdots54321}.$$

4.* Neka je

$$m = 2244\,85148\,51485\,14627,$$
$$n = 8118\,81188\,11881\,18000.$$

Skrati razlomak m/n.

5.* Izračunaj vrijednost korijena

$$\sqrt{0{,}111\cdots11} \quad (100 \text{ jedinica})$$

s točnošću od 300 znamenaka poslije decimalnog zareza.

6. Odredi prvih dvadeset decimala broja $\sqrt{1-0{,}1^{20}}$.

7.* Dokaži da $(6+\sqrt{37})^{999}$ počinje s 999 nula poslije decimalnog zareza.

8. Izračunaj

$$\sqrt{\underbrace{44\cdots4}_{2n}+\underbrace{11\cdots1}_{n+1}-\underbrace{66\cdots6}_{n}}.$$

⋆⋆⋆

9. Odredi sve prirodne brojeve koji su 33 puta veći od zbroja svojih znamenaka.

10. Dokaži da je broj $11\cdots122\cdots2$ (2×100 znamenaka) produkt dvaju uzastopnih prirodnih brojeva.

11.* Odredi kvocijent i ostatak pri dijeljenju broja $77\cdots77$ (1001 sedmica) s 1001.

12. Koje su prve četiri znamenke broja $1^1+2^2+3^3+\ldots+999^{999}+1000^{1000}$?

13. Ako je neki broj djeljiv s 99, tada zbroj njegovih znamenaka nije manji od 18. Dokaži!

14. Kojim cijelim brojem moramo pomnožiti broj $999\,999\,999$ da dobijemo broj koji se piše samo pomoću jedinica?

15. Odredi najmanji broj čije su sve znamenke jedinice i koji je djeljiv s $33\cdots33$ (100 trojki).

16. Dokaži da je broj

$$\underbrace{111\ \cdots\ 111}_{2n \text{ znamenki}}-\underbrace{222\ \cdots\ 222}_{n \text{ znamenki}}$$

kvadrat cijelog broja.

17. Znamenke $x \neq 0$ i y su takve da je broj

$$\underbrace{xx\cdots x}_{n}6\,\underbrace{yy\cdots y}_{n}4$$

kvadrat nekog cijelog broja, za svaki $n \geqslant 1$. Odredi sve takve x i y.

18. Dokaži da broj

$$1\,\underbrace{00\ldots00}_{49 \text{ nula}}5\,\underbrace{00\ldots00}_{99 \text{ nula}}1$$

nije kub nikakvog cijelog broja.

19. Kojim se znamenkama završava broj čiji se kvadrat završava s 44?

20. Dokaži da broj $1+2+\ldots+n$ ne može završavati znamenkama 2, 4, 7 ili 9.

21. Dokaži da sve potencije broja koji se završava na 12890625 imaju također na kraju znamenke 12890625.

22. Da li se za nekakav prirodan broj n broj n^2+2^n može završavati znamenkom 5?

23. Neka je n paran broj koji nije djeljiv s 5. Koja je znamenka desetica broja n^{20}? Koja je znamenka stotica broja n^{200}?

24.* Na koje dvije znamenke se završava zbroj osmih potencija bilo kojih stotinu uzastopnih prirodnih brojeva?

25. Neka je prirodan broj n relativno prost s 10. Dokaži da se n^{101} završava istim trima znamenkama kao i broj n.

26.* Za proizvoljan prirodan broj n odredi tri posljednje znamenke broja n^{100}.

27.* Odredi posljednjih 1000 znamenaka broja $1+50+\ldots+50^{999}$.

28. Može li kvadrat nekog prirodnog broja počinjati s 1983 devetke?

29. Može li se broj $n!$ završavati znamenkama $197600\ldots00$?

⋆ ⋆ ⋆

30. Kojom se znamenkom završava broj 777^{777}?

31. Odredi dvije posljednje znamenke broja $14^{14^{14}}$.

32. Odredi dvije posljednje znamenke brojeva 2^{999} i 3^{999}.

33. Odredi dvije posljednje znamenke broja $9^{8^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{1}}}}}}}$.

34. Odredi četiri posljednje znamenke broja 5^{5555}.

35. S koliko nula se završava broj $4^{5^6}+6^{5^4}$?

36.* Dokaži da su posljednje dvije znamenke brojeva $9^{9^{9^9}}$ i 9^{9^9} jednake.

37.* Dokaži da su posljednjih šest znamenaka brojeva $7^{7^{7^{7^{7^{7}}}}}$ i $7^{7^{7^7}}$ jednake.

⋆ ⋆ ⋆

38.* Odredi tri razlomka s nazivnikom manjim od 100 koji mogu biti svedeni na najjednostavniji oblik neispravnim postupkom skraćivanja (npr. $\dfrac{26}{65}=\dfrac{2}{5}$, skraćene šestice).

39.* Vrijedi $126=6\cdot 21$. Nađi sve troznamenkaste brojeve, koji su jednaki produktu jedne svoje znamenke s dvoznamenkastim brojem, koji čine preostale dvije znamenke.

40.* Vrijedi $81=(8+1)^2$. Nađi sve brojeve koji su jednaki kvadratu zbroja svojih znamenaka.

41. Slagar je rasuo znamenke 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9 nekog broja koji je šesta potencija prirodnog broja. Koji je to broj?

42.* Odredi broj čija se šesta potencija u dekadskom sustavu zapisuje znamenkama 2, 4, 5, 8, 8, 9, 9.

43. Nađi prirodan broj čiji je kub zapisan, u dekadskom sustavu, znamenkama 3, 5, 5, 7, 7, 8.

44. Odredi sve prirodne brojeve n sa svojstvom: 'U dekadskom prikazu brojeva n^3 i n^4 pojavljuju se sve znamenke $0, 1, \dots, 9$ i to svaka točno jedanput'.

45. Koliko znamenaka ima broj 2^{100} ?

46. Koliko znamenaka ima broj $2^{2^{16}} + 1$ napisan u dekadskom brojnom sustavu?

47. Odredi 2319–tu znamenku u decimalnom prikazu broja $1000!$.

48.* Dokaži da decimalni prikaz broja 3!!! ima više od tisuću znamenaka. Odredi broj nula na kraju tog prikaza.

⋆⋆⋆

49. Nađi najmanji broj koji je četiri puta manji od svog obrnutog (broja s istim znamenkama u suprotnom poretku).

50.* Nađi najmanji cijeli broj koji započinje znamenkom 1 i koji se prebacivanjem te znamenke na posljednje mjesto poveća tri puta. Nađi sve takve brojeve.

51. Kojim znamenkama mogu počinjati brojevi koji se tri puta povećavaju prebacivanjem te znamenke na posljednje mjesto? Nađi sve takve brojeve.

52. Odredi najmanji prirodan broj koji se povećava za 50% premještanjem prve znamenke na mjesto posljednje znamenke.

53. Nađi najmanji prirodan broj n, koji ima sljedeća svojstva:

a) njegov zapis u dekadskom sustavu završava znamenkom 6,

b) ako tu posljednju znamenku prebacimo na prvo mjesto, dobit ćemo broj 4 puta veći od početnog broja.

54. Koji se cijeli brojevi pri precrtavanju posljednje znamenke umanjuju cijeli broj puta?

55. Nađi sve brojeve koji se precrtavanjem treće znamenke umanje cijeli broj puta.

56. Nađi sve brojeve koji se precrtavanjem druge znamenke umanje cijeli broj puta.

57. Nađi sve cijele brojeve koji počinju znamenkom 6 i koji se precrtavanjem te znamenke umanjuju 25 puta.

58. Dokaži da ne postoje cijeli brojevi koji bi se precrtavanjem prve znamenke umanjili 35 puta.

59. Jedna od znamenki višeznamenkastog broja je nula. Ako se ona precrta, broj se umanji devet puta. Na kojem mjestu stoji ta nula? Odredi sve takve brojeve.

1.2. diofantski problemi

60. Odredi četveroznamenkasti broj kojem su prve i posljednje dvije znamenke jednake i koji je potpuni kvadrat.

61. Nađi najveći broj koji je potpuni kvadrat, takav da se ponovo dobiva potpuni kvadrat ako mu se odbace posljednje dvije znamenke (od kojih barem jedna nije jednaka nuli).

62.* Dokaži da za $n > 2$ postoje n–znamenkasti brojevi koji nisu kvadrati, niti imaju simetrično raspoređene znamenke, a čiji je produkt s brojem od istih znamenaka, napisanih u obratnom poretku, potpun kvadrat.

63.* Umnožak dvaju prirodnih brojeva je troznamenkasti broj zapisan jednakim znamenkama, a zbroj dvoznamenkasti broj s također jednakim znamenkama. Nađi sve takve parove brojeva.

64.* Odredi sve dvoznamenkaste brojeve koji su za točan kvadrat veći od broja napisanog istim znamenkama, ali obratnim redom.

65. Odredi dvoznamenkaste brojeve koji zbrojeni s obrnutim brojem daju potpuni kvadrat.

66. Odredi tri uzastopna prirodna broja kojima je zbroj kvadrata jednak četveroznamenkastom broju s jednakim znamenkama.

67. Dokaži da ne postoji višeznamenkasti broj koji je jednak zbroju kvadrata svojih znamenaka.

68. Odredi sve prirodne brojeve čiji je kvadrat jednak petoj potenciji zbroja njegovih znamenaka (u dekadskom zapisu).

69. Koji je troznamenkasti broj aritmetička sredina dvaju brojeva, dobivenih iz njega cikličkim permutacijama znamenaka?

70. Odredi troznamenkasti broj koji je potpun kvadrat prirodnog broja a i čiji je zbroj znamenaka $a-1$.

⋆⋆⋆

71.* Zbroj nekoliko uzastopnih prirodnih brojeva jednak je 1000. Nađi sve takve nizove.

72. Odredi prirodan broj n ako se zna da je $1+2+\ldots+n$ troznamenkasti broj s jednakim znamenkama.

73. Brojevi x, y, z, t čine izvjesnu permutaciju brojeva 12, 14, 37, 65. Odredi te brojeve ako vrijedi $xy-xz+yt=182$.

74. Odredi troznamenkaste brojeve $\overline{abc}$ za koje vrijedi $\overline{abc}=a!+b!+c!$.

75.* Nađi četveroznamenkasti broj $\overline{abcd}$ za kojeg vrijedi $\overline{abc}=\overline{ab}^{\,2}+\overline{cd}^{\,2}$.

76. Odredi četveroznamenkasti broj $\overline{broj}$ za kojeg vrijedi

$$(b+r+o+j)^4=\overline{b\,r\,o\,j}\ .$$

77.* Odredi znamenke a, b, c ako za svaki prirodan broj n vrijedi

$$\overline{\underbrace{aa\cdots a}_{n}\underbrace{bb\cdots b}_{n}}+1=\big(\underbrace{\overline{cc\cdots c}}_{n}+1\big)^2$$

78.* Odredi prirodne brojeve x, y, z ako se zna da jednakost

$$\sqrt{\underbrace{\overline{xx\cdots xx}}_{2n}-\underbrace{\overline{y\cdots y}}_{n}}=\underbrace{\overline{z\cdots z}}_{n}$$

vrijedi barem za dvije vrijednosti broja n. Odredi tada sve brojeve n za koje jednakost ostaje na snazi.

79. Dekadski zapis prirodnog broja a sastoji se od n jednakih znamenaka x, broja b od n jednakih znamenaka y, a broja c od $2n$ jednakih znamenaka z. Za sve $n\geqslant 2$ odredi sve takve znamenke x, y, z za koje vrijedi $a^2+b=c$.

⋆⋆⋆

80. Odredi četveroznamenkasti broj koji pri dijeljenju sa 131 daje ostatak 112, a pri dijeljenju sa 132 daje ostatak 98.

81. Nađi najmanji prirodan broj, koji ima svojstvo, da pri dijeljenju s 2 daje ostatak 1, pri dijeljenju sa 3 ostatak 2, pri dijeljenju sa 4 ostatak 3, pri dijeljenju s 5 ostatak 4, pri dijeljenju sa 6 ostatak 5, pri dijeljenju sa 7 ostatak 6, pri dijeljenju s 8 ostatak 7 i pri dijeljenju s 9 ostatak 8.

82. Troznamenkasti broj s različitim znamenkama djeljiv je dvoznamenkastim brojem koji se iz njega dobiva uklanjanjem jedne, proizvoljne, njegove znamenke, pri čemu se poredak znamenki ne mijenja. Nađi sve takve troznamenkaste brojeve.

83. Odredi sve troznamenkaste brojeve koji pri dijeljenju s 11 daju kvocijent koji je jednak zbroju kvadrata znamenaka traženog broja.

84. Šesteroznamenkasti broj djeljiv je s 37. Sve njegove znamenke su različite. Dokaži da se one mogu permutirati tako da novi broj bude ponovo djeljiv s 37.

85. Šesteroznamenkasti broj, čiji se dekadski zapis sastoji od šest međusobno i od nule različitih znamenaka, djeljiv je s 37. Dokaži da se permutacijom znamenki tog broja mogu dobiti još barem 23 različita broja koja su djeljiva s 37.

86. Postoje li dva uzastopna prirodna broja takva da je zbroj znamenaka svakog od njih djeljiv sa 125? Nađi najmanji par takvih brojeva, ili pokaži da oni ne postoje.

87. Nađi šesteroznamenkasti broj čiji produkti s brojevima 2, 3, 4, 5, 6 u izvjesnom poretku, jesu šesteroznamenkasti brojevi dobiveni iz danog broja cikličkom zamjenom znamenki.

88. Odredi sve petorke susjednih prirodnih brojeva, zbroj čijih kvadrata je broj s jednakim znamenkama, manji od 10^6.

89. Postoji li prirodan broj n koji ima sljedeće svojstvo: zbroj znamenaka broja n (u dekadskom zapisu) jednak je 1000, a zbroj znamenaka broja n^2 jednak je 1000^2?

1.3. prirodni brojevi

90. Dokaži da je $\dfrac{x}{3}+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ cijeli broj za svaki cijeli broj x.

91. Ako je n cijeli broj, dokaži da je i $\dfrac{n^2}{120}-\dfrac{n^3}{24}+\dfrac{n}{30}$ također cijeli broj.

92.* Ako su $n < m$ prirodni brojevi, dokaži da racionalan broj $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}+\ldots+\dfrac{1}{m}$ nije cijeli broj.

93. Dokaži da je zbroj nekih prirodnih brojeva djeljiv s 9 ako i samo ako je zbroj svih znamenaka tih brojeva djeljiv s 9.

94. Ako je zbroj tri prirodna broja djeljiv s 3, dokaži da je zbroj kubova tih brojeva također djeljiv s 3.

95. Kada je zbroj kubova tri uzastopna prirodna broja djeljiv s 18?

96. U dekadskom zapisu nekog broja pojavljuju se znamenke 1, 3, 7, 9. Dokaži da se permutacijom znamenaka tog broja može dobiti broj djeljiv sa 7.

97. Ako je broj od $3n$ znamenaka djeljiv sa 7, dokaži da je svaki broj s istim znamenkama, ciklički permutiranim, također djeljiv sa 7.

98. Tri zadana broja su potpuni kvadrati. Ako je zbroj ova tri broja djeljiv s 9, onda se među njima mogu odabrati dva čija je razlika također djeljiva s 9. Dokaži!

99. Neka je $S(a)$ zbroj znamenaka prirodnog broja a, prikazanog u dekadskom sustavu, i m dani prirodan broj. Dokaži da je razlika $S(a^m)-S(a)^m$ djeljiva s 9, za bilo koji prirodan broj a.

100. Zbroj znamenaka broja a označimo sa $s(a)$. Ako je $s(a)=s(2a)$, dokaži da je a djeljiv s 9.

⋆ ⋆ ⋆

101. Postoji li prirodan broj A, takav da pripišemo li ga još jednom samome sebi s desna, dobijemo potpuni kvadrat?

102.* Kojem troznamenkastom broju je dovoljno dopisati tri znamenke s lijeva da bi se dobio njegov kvadrat?

103.* Nađi najveći prirodan broj koji je potpun kub i koji ostaje potpun kub ako mu se uklone posljednje tri znamenke (od kojih barem jedna nije jednaka nuli).

104. Nađi troznamenkasti broj čija svaka potencija završava s iste tri znamenke s kojima završava i prvobitni broj (u istom poretku).

105.* Napisano je redom 99 devetki. Dokaži da im se može dopisati s desna 100 znamenaka tako da dobiveni 199–znamenkasti broj bude potpuni kvadrat.

106.* Dokaži da je produkt jednog dvoznamenkastog broja i broja od istih znamenaka ispisanih u obrnutom redu kvadrat, ako i samo ako su znamenke jednake.

⋆ ⋆ ⋆

107. Dokaži da zbroj znamenaka nekog broja koji je potpun kvadrat ne može biti jednak 5.

108.* Da li broj sastavljen od nekoliko šestica i nekoliko nula može biti potpun kvadrat?

109.* U stoznamenkastom broju sve su znamenke osim jedne, petice. Dokaži da taj broj nije potpun kvadrat.

110.* Deveteroznamenkasti broj napisan je pomoću svih znamenaka osim nule, a završava se znamenkom 5. Dokaži da on ne može biti kvadrat cijelog broja.

111.* Odredi najmanji kvadrat koji započinje znamenkama 222 222.

112. Dokaži da su broj 49 i brojevi 4489, 444889, 44448889, ... od kojih se svaki dobiva upisivanjem broja 48 u sredinu prethodnog, potpuni kvadrati.

113. Postoji li broj čiji kvadrat započinje znamenkama 123456789, a završava znamenkama 987654321?

114. Dokaži da suma kvadrata pet uzastopnih cijelih brojeva ne može biti kvadrat cijelog broja.

115. Ako su a, b, m cijeli brojevi takvi da je $a^2 + 2mb^2$ kvadrat cijelog broja, dokaži da je $a^2 + mb^2$ zbroj kvadrata dva cijela broja.

116. Postoje li takvi prirodni brojevi x i y za koje su $x^2 + y$ i $y^2 + x$ kvadrati cijelih brojeva?

117. Neka su a i b pozitivni cijeli brojevi takvi da $ab + 1$ dijeli $a^2 + b^2$. Pokaži da je $\dfrac{a^2 + b^2}{ab + 1}$ kvadrat nekog cijelog broja.

Napomena. (D.Žubrinić) Ovaj zadatak je postavljen na MMO u Australiji. Prije toga su ga tijekom 4 mjeseca bezuspješno pokušavali riješiti i neki specijalisti iz teorije brojeva. Na natjecanju ga je riješilo 10 učenika (pored ostalih zadataka!)

⋆ ⋆ ⋆

118.* Neka je n prirodan broj. Ako je broj $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ cijeli, dokaži da je tada on potpun kvadrat.

119. Nađi najveći cijeli broj x takav da je broj $4^{27} + 4^{1000} + 4^x$ potpun kvadrat.

120. Odredi sve prirodne brojeve n za koje je $2^8 + 2^{11} + 2^n$ potpun kvadrat.

121.* Za koje cijele pozitivne brojeve n je broj $2^n - 1$ kvadrat cijelog broja? A broj $2^n + 1$?

⋆ ⋆ ⋆

122. Odredi četiri prirodna broja, takva, da je kvadrat svakog od njih zbrojen s preostala tri broja opet potpun kvadrat.

123. Dokaži da je produkt dvaju brojeva, od kojih je svaki zbroj kvadrata dva cijela broja, jednak zbroju kvadrata dvaju cijelih brojeva.

124.* Prirodan broj n zovemo 'Pitagorin', ako postoje prirodni brojevi a, b, takvi da je $n = a^2 + b^2$. Dokaži da ako su m i n Pitagorini, a $m \cdot n$ nije Pitagorin, onda je $m \cdot n$ kvadrat nekog parnog broja.

125. Može li se naći potencija broja 3 koja se završava znamenkama 0001?

126. Dokaži da produkt četiri uzastopna prirodna broja ne može biti potpuni kvadrat.

⋆ ⋆ ⋆

127. Odredi najveći broj djeljiv s 11, čije su sve znamenke različite.

128. Zadano je nekoliko različitih prirodnih brojeva koji se nalaze između dva kvadrata uzastopnih prirodnih brojeva. Dokaži da su svi njihovi međusobni produkti također različiti.

129. Zadan je 120-znamenkasti broj. Njegovih prvih 12 znamenaka se permutira na sve moguće načine. Među tako dobivenim brojevima izabere se na sreću 120 brojeva. Dokaži da je njihov zbroj djeljiv sa 120.

130. U svakom od brojeva k i $k+n$ zbroj znamenaka je djeljiv s 11, a među njima nema drugog broja s tim svojstvom. Koju najveću vrijednost može imati broj n?

131. Razlika dvaju neparnih brojeva djeljiva je s 5. Na koju se znamenku završava razlika kubova tih brojeva?

132.* Neka je n prirodan broj i n' sastavljen od istih znamenaka, ali u nekom drugom poretku. Ako je $n+n' = 10^{10}$, dokaži da je n djeljiv s 10.

133. Broj y dobiven je od broja x nekom permutacijom njegovih znamenki. Dokaži da za bilo kakav x vrijedi $x + y \neq 999\cdots99$ (1967 devetki).

134.* U nekom deseteroznamenkastom broju $\overline{a_1a_2\cdots a_{10}}$ znamenka a_1 jednaka je broju nula u zapisu tog broja, znamenka a_2 broju jedinica, itd, znamenka a_{10} broju devetki u tom broju. Nađi taj broj!

135. Četiri različita cijela troznamenkasta broja, koja počinju istom znamenkom, imaju svojstvo da je njihov zbroj djeljiv s trima od njih, bez ostatka. Nađi te brojeve.

136. a) Umnožak nekih cijelih n brojeva jednak je n, a njihov je zbroj nula. Dokaži da je broj n djeljiv s 4.

b) Neka je n prirodan broj djeljiv s 4. Dokaži da postoji n cijelih brojeva čiji je umnožak jednak n, a zbroj jednak nuli.

⋆ ⋆ ⋆

137. Dokaži da se prirodan broj m može prikazati u obliku $m = \left\lfloor n + \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$ ako i samo ako m nije potpun kvadrat.

138. Kakve prirodne brojeve m nije moguće prikazati u obliku $m = 3p + 7q$, pri čemu su p i q proizvoljni nenegativni cijeli brojevi?

139. Dokaži da se cijeli broj može prikazati kao zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva ako, i samo ako, i dvostruko veći broj ima to svojstvo.

140. Dokaži da je kvadrat zbroja n kvadrata različitih cijelih brojeva koji nisu jednaki nuli, zbroj kvadrata n cijelih brojeva od kojih je svaki različit od nule.

141.* Ako je razlika kubova dvaju uzastopnih prirodnih brojeva kvadrat prirodnog broja, dokaži da se taj prirodan broj može prikazati kao zbroj kvadrata dvaju uzastopnih prirodnih brojeva.

142. Dokaži da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva koji se ne mogu napisati kao zbroj kvadrata triju cijelih brojeva.

143. Dokaži da postoji beskonačno mnogo brojeva koji se ne mogu prikazati kao zbroj triju kubova prirodnih brojeva.

1.4. realni brojevi

144. Zna se da vrijedi $\lfloor na \rfloor + \lfloor nb \rfloor = \lfloor n(a+b) \rfloor$ za svaki prirodan broj n. Dokaži da je a ili b cijeli broj.

145. Dokaži da je $\sqrt{10}\big[(1+\sqrt{10})^{100} - (1-\sqrt{10})^{100}\big]$ cijeli broj.

146.* Dokaži da je za svaki prirodan broj n, broj $\lfloor (2+\sqrt{3})^n \rfloor$ neparan.

147.* Neka je $n = \big\lfloor (44+\sqrt{1975})^{100} \big\rfloor$. Dokaži da je n neparan.

148. Nađi sve takve prirodne brojeve n za koje su brojevi $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{n+1}$ izraženi konačnim decimalnim prikazom.

149. Neka je p prost broj. Racionalan broj $\frac{m}{n}$, $0 < \frac{m}{n} < 1$, ima svojstvo da se razlomak $\frac{m+p}{n+p}$ razlikuje od $\frac{m}{n}$ za $\frac{1}{p^2}$. Odredi sve brojeve $\frac{m}{n}$ s tim svojstvom.

150. Neka su x_1 i x_2 rješenja kvadratne jednadžbe $x^2+x+1=0$. Pokaži da skup

$$\{x_1^n + x_2^n \ : \ n \in \mathbf{N}\}$$

ima samo dva elementa. Koji su to elementi?

151. Kakve se znamenke pojavljuju na mjestu jedinica i mjestu desetica u dekadskom prikazu broja $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1980}$?

⋆ ⋆ ⋆

152. Označimo $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$. Dokaži da su svi brojevi $\{10^n\sqrt{2}\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ međusobno različiti.

153. Nizovi $\{\alpha_n\}$ i $\{\beta_n\}$ načinjeni su od posljednjih znamenaka brojeva $\lfloor (\sqrt{10})^n \rfloor$ i $\lfloor (\sqrt{2})^n \rfloor$. Da li su oni periodički?

154. Zadan je rastući niz $\{a_n\}$ prirodnih brojeva. Poznato je da je $a_{n+1} \leqslant 10a_n$ za sve prirodne n. Dokaži da decimalni prikaz broja $0{,}a_1a_2a_3\ldots$ nije periodičan.

155.* Ako je P polinom s cjelobrojnim koeficijentima, pozitivan za $x > 0$, dokaži da je tada broj $\overline{0{,}P(1)P(2)P(3)\cdots}$ racionalan.

156. U beskonačnom decimalnom prikazu realnog broja a pojavljuju se sve znamenke. Neka je v_n broj različitih odsječaka tog prikaza koji imaju duljinu n. Ako je za neki n ispunjen uvjet $v_n \leqslant n+8$, dokaži da je broj a racionalan.

157.* Označimo s h_n posljednju znamenku različitu od nule u dekadskom prikazu broja $n!$. Dokaži da je decimalni broj $0, h_1h_2h_3\cdots$ iracionalan.

158. Ako je razlomak nekog neskrativog razlomka manji od 100, dokaži da se u decimalnom prikazu tog razlomka ne može pojaviti grupa znamenaka 167.

⋆⋆⋆

159. Postoje li racionalni brojevi x, y, z, t takvi da za neki prirodan n vrijedi
$$(x+y\sqrt{2})^{2n}+(z+t\sqrt{2})^{2n}=5+4\sqrt{2}$$

160. Za koje cjelobrojne m i n vrijedi jednakost
$$(5+3\sqrt{2})^m=(3+5\sqrt{2})^n\,?$$

161.* Dokaži da je za svaki prirodan broj n izraz $(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n$ cijeli broj koji nije djeljiv s 5.

162. Da li je broj $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ racionalan ili iracionalan?

163. Dokaži da $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}$ nije racionalan broj.

164.* Neka su n, p proizvoljni prirodni brojevi, $p\geqslant 2$. Dokaži da $\sqrt{n^p+p}$ nije racionalan broj.

165. Dokaži da se $\sqrt[3]{2}$ ne može prikazati u obliku $p+q\sqrt{r}$, gdje su p, q, r racionalni brojevi.

166. Dokaži da $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ne mogu biti članovi istog aritmetičkog niza.

167. Da li postoje brojevi $a,\ b>0$ takvi da je

a) $a,\ b\notin \mathbf{Q}$ i $a^b\in\mathbf{Q}$,

b) $a,\ b,\ a^b\notin\mathbf{Q}$,

c) $a\in\mathbf{Q}$ i $b,\ a^b\notin\mathbf{Q}$?

168. Dokaži da postoje pozitivni iracionalni brojevi a i b, za koje je broj a^b prirodan.

169. Dokaži, ako pozitivni brojevi a, b, $c\in\mathbf{Q}$ zadovoljavaju relaciju $\sqrt{a}+\sqrt{b}=c$, tada vrijedi $\sqrt{a},\ \sqrt{b}\in\mathbf{Q}$.

170.* Dokaži da je $\sin 1^\circ$ iracionalan broj.

171. Neka je n neparni broj veći od 2. Dokaži da su sva rješenja jednadžbe $\cos x=1/n$ iracionalni brojevi.

172. Dokaži da su brojevi $\sqrt[3]{13}$, $\cos 10^\circ$, $\sqrt[3]{2}+\sqrt{5}$ iracionalni.

173. Odredi sve racionalne brojeve r za koje je $\log_2 r$ i sam racionalan broj.

⋆⋆⋆

174. Ako prirodni brojevi m, n zadovoljavaju nejednakost $\sqrt{7}-m/n>0$, dokaži da je tada $\sqrt{7}-m/n>1/mn$.

175.* Dokaži da se za svaki broj a $(0\leqslant a\leqslant 1)$ i svaki N mogu naći takvi cijeli brojevi m i n $(0<n,\ 0\leqslant m\leqslant n\leqslant N)$ da je $|an-m|<1/N$.

176.* Dokaži da za svaki realni broj x postoji racionalni broj oblika $2n/2m+1$, $n,\ m\in\mathbf{Z}$, tako da vrijedi
$$\left|\,x-\frac{2n}{2m+1}\,\right|<\varepsilon$$
gdje je ε proizvoljno maleni realni broj.

177. Dan je iracionalni broj a.

a) Dokaži da za svaki pozitivni broj ε postoji bar jedan cijeli broj q, takav da je $aq-\lfloor aq\rfloor<\varepsilon$.

b) Dokaži da za dani $\varepsilon>0$ postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva p/q, takvih da je
$$q>0 \qquad \text{i} \qquad \left|a-\frac{p}{q}\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{q}\,.$$

178.* Odredi razlomak čiji su brojnik i nazivnik prirodni brojevi manji od 100, koji najbolje aproksimira broj $\sqrt{2}$.

179. Dokaži da za proizvoljne prirodne brojeve p i q vrijedi nejednakost
$$\left|\sqrt{2}-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{3q^2}\,.$$

180. Ako je aritmetička sredina prvih n znamenaka broja $\sqrt{2}-1$ između $13/4$ i $14/3$, tada je to ispunjeno i za broj $2-\sqrt{2}$. Dokaži!

181. Dokaži da za svaki realni broj $x \geqslant \frac{1}{2}$ postoji cijeli broj n takav da vrijedi

$$|x-n^2| \leqslant \sqrt{x-{}^1\!/_4}\,.$$

182.* Neka je r nenegativan racionalni broj. Odredi fiksne cijele brojeve a, b, c, d, e, f takve da je za svaki r ispunjeno

$$\left|\frac{ar^2+br+c}{dr^2+er+f}-\sqrt[3]{2}\right| < |r-\sqrt[3]{2}|$$

1.5. skupovi brojeva

183. Zadano je pet različitih pozitivnih brojeva. Dokaži da među njima postoje dva čiji ni zbroj ni apsolutna vrijednost razlike nisu jednaki ni jednom od preostala tri broja.

184. Dokaži da se u skupu od proizvoljnih deset različitih dvoznamenkastih brojeva mogu izabrati dva disjunktna podskupa koji imaju jednak zbroj svojih elemenata.

185. Dokaži da se od dvanaest različitih dvoznamenkastih brojeva uvijek mogu izabrati dva čija je razlika dvoznamenkasti broj s jednakim znamenkama.

186.* Osam cijelih brojeva $a_1, \ldots, a_8$ zadovoljavaju uvjet $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_8 < 16$. Dokaži da uvijek postoji takav broj k da se od danih 8 brojeva mogu izabrati barem tri para povezana relacijom $a_i - a_j = k$.

187. Zadano je dvadeset prirodnih brojeva $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ takvih da je $a_1 < a_2 < \ldots < a_{20} < 70$. Dokaži da među razlikama $a_j - a_k$ $(j > k)$ postoje bar četiri međusobno jednake.

188. Dokaži da se između 25 različitih pozitivnih brojeva uvijek mogu izabrati dva čiji se zbroj i razlika razlikuju od svih preostalih 23 broja.

189. Odredi šest brojeva ne većih od 24 ali takvih da je zbroj brojeva u svim mogućim podskupovima različit. Pokaži da ne postoji sedam brojeva ne većih od 24, takvih, da svi zbrojevi njihovih podskupova budu različiti.

190. Dokaži da se među 52 cijela broja mogu pronaći 2 čiji je zbroj ili razlika djeljiva sa 100.

191. Dokaži da se među 39 uzastopnih prirodnih brojeva nalazi bar jedan broj čiji je zbroj znamenaka djeljiv s 11.

192. Dokaži da između proizvoljnih 99 uzastopnih cijelih brojeva postoji broj čiji je zbroj znamenaka djeljiv s 14.

193. Dokaži da se od proizvoljnih 200 cijelih brojeva može izabrati njih 100 čiji je zbroj djeljiv sa 100.

194. Skup brojeva $\{1, 2, \ldots, 100\}$ razbijen je na 7 podskupova. Dokaži da se u barem jednom od tih podskupova mogu pronaći ili 4 broja a, b, c, d za koje vrijedi $a+b=c+d$, ili 3 broja e, f, g za koje je $e+f=2g$.

195. Za prirodne brojeve $a_1, \ldots, a_{19}$; $b_1, \ldots, b_{21}$ vrijedi

$$1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_{19} \leqslant 200$$
$$1 \leqslant b_1 < b_2 < \ldots < b_{21} \leqslant 200\,.$$

Dokaži da postoje četiri od tih brojeva a_i, a_j, b_p, b_q, pri čemu je $a_i < a_j$, $b_p < b_q$, tako da vrijedi $a_j - a_i = b_q - b_p$.

⋆ ⋆ ⋆

196. Da li je istinita sljedeća tvrdnja: ‘od proizvoljnih šest prirodnih brojeva, uvijek je moguće pronaći tri od kojih nikoja dva nemaju zajednički djelitelj, ili pak tri sa zajedničkim djeliteljem većim od 1’?

197. Nađi sve prirodne brojeve n takve da se skup $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ može razbiti na dva podskupa takva da je produkt elemenata u jednom jednak produktu elemenata u drugom podskupu.

198. Zadan je skup od $n+1$ brojeva izabranih iz skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Da li je uvijek moguće izabrati dva elementa iz tog skupa, takva, da jedan dijeli drugog?

199.* Dokaži da se među $n+1$ prirodnih brojeva manjih od $2n$ mogu izabrati dva čija je razlika potencija broja 2.

200.* Zadano je $n+1$ različitih prirodnih brojeva manjih od $2n$ Dokaži da postoje tri broja od kojih je jedan jednak zbroju preostalih dvaju.

201. Zadan je skup od n cijelih brojeva $a_1, \ldots, a_n$. Da li je uvijek moguće izabrati podskup takav da je zbroj njegovih elemenata djeljiv s n?

202. Neka su $a_1, \ldots, a_n$ prirodni brojevi pri čemu je $1 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ i $a_1 + \ldots + a_n = 2n$.

a) Dokaži da za parni n i $a_n \neq n+1$ između brojeva $a_1, \ldots, a_n$ uvijek možemo izabrati nekoliko brojeva čiji zbroj iznosi n.

b) Dokaži da za neparni n i $a_n \neq 2$ između brojeva $a_1, \ldots, a_n$ uvijek možemo izabrati nekoliko čiji zbroj iznosi n.

203. Dokaži da se iz skupa od $2^{n+1} - 1$ cijelih brojeva uvijek može odabrati 2^n brojeva čiji je zbroj djeljiv s 2^n.

204. Između cijelih brojeva od 1 do $3n$ izaberimo bilo kojih $n+2$ brojeva. Dokaži da za $n > 1$ među tim brojevima sigurno postoje dva čija je razlika veća od n a manja od $2n$.

205. Dokaži da se među proizvoljnih $2m + 1$ različitih cijelih brojeva, koji po modulu nisu veći od $2m - 1$, mogu pronaći tri broja čiji je zbroj jednak 0.

206.* Zadano je $2n+1$ cijelih brojeva sa svojstvom: ako se izdvoji bilo koji od njih, preostalih $2n$ brojeva se mogu podijeliti na dvije grupe po n brojeva, tako da zbroj brojeva u jednoj bude jednak zbroju brojeva u drugoj grupi. Dokaži da su svi zadani brojevi jednaki među sobom.

207. Zadani su različiti pozitivni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Od njih se formiraju svi mogući zbrojevi s proizvoljnim brojem članova (od 1 do n). Dokaži da će se među njima naći najviše $\frac{1}{2}n(n+1)$ različitih.

208. Zadan je niz prirodnih brojeva a_1, a_2,..., a_n, $n \geqslant 2$. Dokaži da postoji takav podniz a_{k_1}, $a_{k_2}, \ldots, a_{k_m}$, $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m \leqslant n$ da je broj $a_{k_1}^2 + a_{k_2}^2 + \ldots + a_{k_m}^2$ djeljiv s m.

209. Zadano je k prirodnih brojeva

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_k < n\ , \quad k > \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor .$$

Dokaži da postoje i, r takvi da je $a_i + a_1 = a_r$.

210. Zadano je n cijelih brojeva: $a_1 = 1$, $a_2, \ldots, a_n$ pri čemu je $a_i \leqslant a_{i+1} \leqslant 2a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ i zbroj svih brojeva je paran. Mogu li se ti brojevi razbiti u dvije grupe s jednakim zbrojevima brojeva u njima?

211. Odredi najmanji skup pozitivnih cijelih brojeva takvih da za svaki prirodan k, $0 < k \leqslant c$, gdje je c fiksni broj, postoji podskup takav da je zbroj njegovih elemenata jednak k.

212. Nađi najmanji broj $n \in \mathbf{N}$ za koji postoji skup $M \subseteq \{1, 2, \ldots, 100\}$ od n elemenata, koji zadovoljava uvjete:

(a) 1 i 100 pripadaju skupu M

(b) za svaki $a \in M \setminus \{1\}$ postoje x, $y \in M$ takvi da je $a = x + y$.

1.6. razni zadaci

213. Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_n$ neka permutacija brojeva $1, 2, \ldots, n$. Dokaži da je $p = (a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ paran broj, ako je n neparan.

214. Rasporedi brojeve od 1 do 100 u niz tako da ne postoji podniz od 11 članova koji bi bio rastući ili padajući.

215. Dokaži da se u ma kojem nizu od 101 broja može naći podniz od 11 članova koji je bilo rastući, bilo padajući.

216. Dokaži ili opovrgni tvrdnju: 'U skupu brojeva $\{1, 2, 3, \ldots, 10^5\}$ može se naći podskup od 1983 elementa, koji ne sadrži nijednu trojku brojeva koji su uzastopni članovi nekog aritmetičkog niza'.

217. Da li svaka permutacija brojeva $0, \ 1, \ldots, n$ sadrži aritmetički niz od najmanje tri člana?

218. Može li se od brojeva 1, $1/2$, $1/4, \ldots, 1/2^n, \ldots$ izabrati beskonačan geometrijski niz čiji je zbroj jednak $1/5$?

⋆ ⋆ ⋆

219.* Među brojevima $36^m - 5^n$, gdje su m i n prirodni brojevi, nađi najmanji po apsolutnoj vrijednosti.

220. Izbaci 100 znamenaka u broju $123456789101112 \cdots 979899100$ da dobiveni broj bude najveći, odnosno najmanji.

221. Odredi četveroznamenkasti broj $\overline{abcd}$ takav da je $\overline{abcd} + \overline{cdab} = 9999$, a razlika $\overline{bc} - \overline{ad}$ najveća.

222.* Od svih znamenaka $1, \ 2, \ldots, 9$ sastavi tri troznamenkasta broja tako da njihov produkt bude najveći.

223. Od znamenaka $1, 2, \ldots, 9$ izabrane su 4 znamenke i od njih sastavljena dva, po mogućnosti što bliža dvoznamenkasta broja. Kakvu najveću moguću vrijednost može imati modul njihove razlike?

⋆ ⋆ ⋆

224.* Kolika je najveća moguća vrijednost kvocijenta troznamenkastog broja sa zbrojem njegovih znamenaka?

225. Niz brojeva a, $a{+}1$, $a{+}2$, $\ldots$, $a + k$ nazivamo odreskom niza prirodnih brojeva. Dva odreska, svaki duljine 1961, napisana su jedan ispod drugog. Dokaži da možemo rasporediti brojeve u svakom od odrezaka, tako da — nakon što nadopišemo brojeve koji se nalaze jedan pod drugim — ponovo dobijemo odrezak niza prirodnih brojeva.

226.* Dokaži da među n–teroznamenkastim brojevima koji se zapisuju samo znamenkama 1 i 2, ne postoji više od $2^n/n{+}1$ brojeva takvih da se svaka dva među njima razlikuju barem na tri mjesta.

227.* Mogu li se svi deseteroznamenkasti brojevi zapisani pomoću znamenaka 1 i 2 razbiti na dvije grupe, tako da zbroj ma koja dva broja iz pojedine grupe sadrži u svom dekadskom zapisu barem dvije trojke?

228.* Postoje li dva beskonačna skupa A i B nenegativnih brojeva takva da se svaki nenegativni broj može na jedinstven način prikazati kao zbroj jednog broja iz skupa A i jednog broja iz skupa B?

229. Može li se razbiti skup prirodnih brojeva na beskonačno mnogo beskonačnih skupova od kojih se svaki može dobiti tako da se proizvoljnom drugom skupu doda neki cijeli broj?

230.* Može li se izabrati 1 000 000 različitih prirodnih brojeva tako da zbroj bilo koliko tih brojeva nije potpun kvadrat prirodnog broja?

⋆ ⋆ ⋆

231. Zadana su dva broja, $a = \sqrt{7} + \sqrt{10}$, $b = \sqrt{3} + \sqrt{19}$. Ne računajući korijene odredi koji je od njih veći.

232. Dokaži da se među jedanaest proizvoljnih beskonačnih dekadskih razlomaka mogu izabrati dva čija razlika ima u decimalnom prikazu bilo beskonačan broj nula, bilo beskonačan broj devetki.

233. Prirodni brojevi x_1 i x_2 manji su od 10000. Definirajmo niz $\{x_n\}$ tako da x_3 bude jednak $|x_1 - x_2|$, broj x_4 najmanji od brojeva $|x_1 - x_2|$, $|x_2 - x_3|$, $|x_1 - x_3|$, i općenito, svaki sljedeći broj je jednak najmanjoj od apsolutnih vrijednosti razlika svih prethodnih brojeva. Dokaži da je uvijek $x_{21} = 0$.

234. Napisano je n brojeva, među kojima ima i pozitivnih i negativnih. Potcrtan je zatim svaki pozitivni broj, ali i takav koji u zbroju s nekoliko brojeva koji slijede neposredno za njim daje pozitivan broj. Dokaži da je zbroj svih potcrtanih brojeva pozitivan.

235. Prirodni brojevi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zadovoljavaju uvjet $a_k \leqslant k$, $1 \leqslant k \leqslant n$ i zbroj svih brojeva je paran broj. Dokaži da je jedna od suma $a_1 \pm a_2 \pm \ldots \pm a_n$ jednaka nuli.

236. U broju 2^{1970} precrtali smo prvu znamenku i dodali je preostalom broju. S rezultatom smo ponovili postupak itd. dok se ne dobije deseteroznamenkasti broj. Dokaži da taj broj ima barem dvije jednake znamenke.

237. Neka je d strogo pozitivan cijeli broj različit od 2, 5, 13. Pokaži da se u skupu $\{2, 5, 13, d\}$ mogu odabrati dva različita broja a i b tako da $ab - 1$ nije kvadrat cijelog broja.

238. Dokaži da postoji točno jedna četvorka x, y, z, t prirodnih brojeva sa sljedećim svojstvima:

a) $1 < x < y < z < t$;

b) produkt bilo koja tri od tih brojeva uvećan za 1 djeljiv je četvrtim brojem.

239. Pokaži da je skup svih realnih brojeva x za koje je

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$$

unija disjunktnih poluotvorenih intervala, zbroj duljina kojih iznosi 1988.

240. Kojih šesteroznamenkastih brojeva ima više: onih koji se mogu predstaviti u obliku umnoška dva troznamenkasta broja, ili onih koji se ne mogu predstaviti u tom obliku?

241. Zadan je skup M koji se sastoji od 1985 različitih prirodnih brojeva. Nijedan od njih nema prostog djelitelja većeg od 26. Dokaži da se iz skupa M mogu izabrati četiri međusobno različita broja čiji produkt je četvrta potencija cijelog broja.

242. Odredi sve vrijednosti $n \in \mathbf{N}$ za koje je istinita sljedeća tvrdnja: ‘Postoji niz od $2n$ brojeva takvih da za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$ u njemu postoje dva broja k, među kojima se nalazi točno k preostalih brojeva.

243. Broj A djeljiv je s 1, 2, 3,..., 9. Dokaži da, ako je broj $2A$ prikazan kao suma prirodnih brojeva manjih od 10, tj. $2A = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, tada je među brojevima $a_1, a_2, \ldots, a_k$ moguće odabrati nekoliko čija je suma jednaka A.

244. Koliko najmanje brojeva iz niza $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 1982$ trebamo prekrižiti da niti jedan od preostalih brojeva ne bude jednak umnošku neka dva preostala broja? Na koji se način to može učiniti?

245. Za proizvoljna dva broja m, n iz nekog skupa $M \subset \mathbf{N}$ vrijedi nejednakost $|m-n| \geqslant mn/25$. Dokaži da skup M sadrži ne više od 9 elemenata. Odredi može li takav skup M sadržavati točno 9 elemenata.

246. Neka je dan bilo koji troznamenkasti broj čije sve znamenke nisu jednake. Od njegovih znamenaka načinimo najveći i najmanji mogući troznamenkasti broj (ako je broj znamenaka manji, dodajemo potreban broj nula). Njihova je razlika novi troznamenkasti broj, s kojim ponavljamo isti postupak. Nakon najviše pet koraka dolazi se do broja 495, koji se dalje obnavlja, i to bez obzira na izbor početnog broja. Dokaži!

247. Ispod svakog od brojeva od 1 do 1 000 000 000 potpisan je zbroj njegovih znamenaka, pod svaki od dobivenih milijardu brojeva ponovo je potpisan zbroj njegovih znamenki itd. Kojih je brojeva na koncu više: 1 ili 2?

248. Na karticama su napisani svi peteroznamenkasti brojevi od 11 111 do uključivo 99 999. Zatim su ti brojevi poredani u jedan niz, proizvoljnim poretkom. Dokaži da dobiveni 444 445-znamenkasti broj nije potencija broja 2.

249. Dani su prirodni brojevi $x_1, \ldots, x_n$ i $y_1, \ldots, y_m$. Zbrojevi $x_1+x_2+\ldots+x_n$ i $y_1+y_2+\ldots+y_m$ su jednaki među sobom i manji od mn. Dokaži da se u jednakosti $x_1+x_2+\ldots+x_n = y_1+y_2+\ldots+y_m$ mogu precrtati neki članovi s obje strane, tako da ponovo dobijemo jednakost.

250.* U donjoj tablici množenja pojavljuju se samo dvije znamenke: 1 i 2. Nađi sve parove brojeva čija tablica množenja (u dekadskom sustavu) sadrži samo dvije znamenke.

$$\begin{array}{l}
11 \times 11 \\
\hline
11 \\
\ \ 11 \\
\hline
121
\end{array}$$