1.

Uvod

Nacrtna geometrija je znanost o egzaktnim metodama koje omogućuju prikazivanje prostornih figura trodimenzionalnog prostora na nekoj dvodimenzionalnoj ravnini i rješavanje prostornih problema u ravnini konstruktivno-geometrijskim putem. Ovako je definirao Nacrtnu geometriju već *Gaspard Monge* (1746. – 1818.), osnivač Nacrtne geometrije kao znanosti.

Nacrtna je geometrija izrasla iz posve praktičnih potreba, prije svega tehničkih disciplina (građevinarstvo, arhitektura, strojarstvo, itd.), geografije (kartografija), astronomije i slikarstva (perspektiva). No vremenom se Nacrtna geometrija razvila u samostalnu granu geometrije (a time i matematike), tako da je baš Nacrtna geometrija ubrzala razvitak geometrije (Projektivne geometrije, fotogrametrije i dr.).

Nepobitna je i očita, dakle, važnost Nacrtne geometrije u izobrazbi svih tehničkih zanimanja. I ne samo to. Ona zasigurno potiče razvitak prostornog zora kod onih budućih stručnjaka, kojima je taj prostorni zor itekako potreban.

U našem trodimenzionalnom prostoru u kojem živimo, zapažamo predmete po njihovom obliku, boji, veličini i njihovim međusobnim položajima. Sliku takvih predmeta možemo kasnije dozvati u sjećanje. Ne samo to, nego možemo te predmete nekome opisati, tako da taj dotični dobije bolju ili lošiju predodžbu o tim predmetima pomoću tog opisa.

U daljnjem procesu možemo opažane predmete i njihove međusobne položaje zamisliti promijenjene prema potrebi i ukusu, pa zatim to putem crteža priopćiti nekom, koji će eventualno takve predmete izraditi.

Upravo smo ovim izlaganjem ukratko odgovorili na pitanje: što je to prostorni zor?

Prostorni zor je, dakle, sposobnost pamćenja oblika, veličine, itd. predmeta koje smo vidjeli, kao i njihove međusobne položaje. No i dalje je prostorni zor također sposobnost zamišljene predmete realizirati u obliku pravilnog opisivanja ili u obliku crteža ili modela.

Svaki čovjek posjeduje sposobnost prostornog zora u većoj ili manjoj mjeri. Jasno je također da se prostorni zor razvija zajedno s razvojem djeteta. No kao i većina drugih sposobnosti može se i prostorni zor u nekoj mjeri kod manje talentiranih učenika izoštriti vježbom.

Nacrtna geometrija s jedne strane pretpostavlja kod učenika izvjesni stupanj razvoja prostornog zora. S druge strane Nacrtna geometrija sama po sebi usavršava prostorni zor kod onoga koji se njome bavi.

U Nacrtnoj geometriji u vezi s prostornim zorom treba istaknuti dvije vrste zadaća:

1. treba neko postojeće ili zamišljeno tijelo predočiti projekcijama (crtežom);
2. na temelju danih projekcija nekog tijela, treba odrediti daljnje projekcije (poglede) i time kod promatrača pobuditi pravilnu predodžbu o tom tijelu.

Ovo kratko izlaganje o prostornom zoru bi trebalo također ukazati na to, da pri odmjeravanju potrebe prisustva Nacrtne geometrije u tijeku izobrazbe na srednjem nivou, ovaj aspekt svakako ne bi trebalo zanemariti. U ovoj smo knjizi nastojali dobar dio sadržaja usmjeriti baš na takve probleme.

Kako smo već na početku rekli, Nacrtna geometrija razmatra probleme trodimenzionalnog prostora (stereometrijske probleme) konstruktivno-geometrijskom metodom. No konstruktivna geometrija (ili geometrijske konstrukcije) po prirodi stvari rješava ravninske (planimetrijske) probleme. Veza koja nam to omogućuje je preslikavanje, odnosno projiciranje figura prostora na figure ravnine. Ova razmatranja su provedena u 2., 3. i 4. poglavlju ove knjige i smatram ih vrlo važnim za razumijevanje Nacrtne geometrije, pa prema tome ne bi trebalo olako prelaziti preko njih.

2. Stereometrija

U ovom ćemo se poglavlju pozabaviti nekim osnovnim teoremima geometrije (trodimenzionalnog) prostora, koje ćemo koristiti u tijeku kasnijeg izlaganja Nacrtne geometrije.

Prostor P možemo intuitivno shvatiti kao izvjesni skup kojeg su elementi točke, pravci i ravnine.

Točke ćemo označavati velikim latinskim slovima: A, B, C, ...

Pravce ćemo označavati malim latinskim slovima: a, b, c, ...

Ravnine ćemo označavati malim grčkim slovima: α, β, γ, ...

Znamo intuitivno što znači kada kažemo da točka A *leži* na pravcu a, odnosno kada pravac a *prolazi* točkom A. U oba slučaja kažemo da su točka A i pravac a *incidentni*.

Slično tome znamo intuitivno kada točka A *leži* na ravnini α, odnosno kada ravnina α *prolazi* točkom A. U oba slučaja kažemo da su točka A i ravnina α *incidentni*.

Ovako intuitivno shvaćena *relacija incidencije* točaka i pravaca, te točaka i ravnina, nam omogućuju da pravce, odnosno ravnine prostora shvatimo kao stanovite podskupove točaka prostora. Tako možemo sada shvatiti pravac a kao skup svih točaka koje su incidentne s tim pravcem. Tada govorimo o *nizu točaka* (a) kojemu je pravac a *nosilac*.

Isto tako možemo shvatiti i neku ravninu α kao skup svih točaka koje su incidentne s ravninom α. Tada govorimo o *polju točaka* (α) kojemu je ravnina α *nosilac*.

Uvedimo sada još neke nazive i svojstva koja su izravna posljedica pojma odnosno relacije incidencije.

Pravac $a = AB$ koji je incidentan s dvije točke A i B (pravac a prolazi točkama A i B) zovemo *spojnicom* točaka A i B.

Tri i više različitih točaka A, B, C, ... koje su incidentne s jednim te istim pravcem p zovemo *kolinearnim točkama*.

Četiri i više različitih točaka A, B, C, D, ... od kojih nikoje tri nisu kolinearne (ne leže na jednom te istom pravcu), a koje su sve incidentne s jednom te istom ravninom (leže u jednoj te istoj ravnini) zovemo *komplanarnim točkama*.

Ako dva različita pravca a i b imaju točno jednu točku S zajedničku (točno jednu točku S koja je incidentna i s a i s b), tada kažemo da se takva dva pravca a i b *sijeku u sjecištu* S (oznaka: $a \cap b = S$).

Za neki pravac a kažemo da *leži* u ravnini α (*incidentan* je s ravninom α) ako su *sve točke tog pravca incidentne s ravninom* α.

Različite pravce a, b, c, ... koji su incidentni s jednom te istom ravninom (leže u jednoj te istoj ravnini) zovemo *komplanarnim pravcima*.

Za dva pravca a *i* b *kažemo da su paralelni* (oznaka: $a \parallel b$), ako su oni *komplanarni* (leže u istoj ravnini) te

a) *ako se ne sijeku* ili

b) *ako se podudaraju* $(a \equiv b)$.

Za dvije ravnine α *i* β *kažemo da se sijeku onda kada postoji jedan pravac* a *koji leži i u jednoj i u drugoj ravnini.* Pravac a tada zovemo *presječnicom* tih dviju ravnina α i β.

Za dvije ravnine α *i* β *kažemo da su paralelne* (oznaka: $\alpha \parallel \beta$)

a) *ako nemaju ni jednu točku zajedničku* (ne postoji točka koja je incidentna i s jednom i s drugom ravninom) ili

b) *ako se one poklapaju* (sve su im točke zajedničke).

Za pravac a *i ravninu* α *kažemo da se sijeku, ako postoji točno jedna točka* P *koja je incidentna i s pravcem* a *i s ravninom* α (oznaka: $a \cap \alpha = P$).

Za pravac a *kažemo da je paralelan s ravninom* α

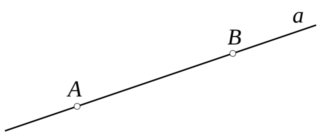
a) *ako leži u toj ravnini* (sve su mu točke incidentne s ravninom) ili

b) *ne postoji ni jedna točka koja je incidentna s tim pravcem* a *i s ravninom* α.

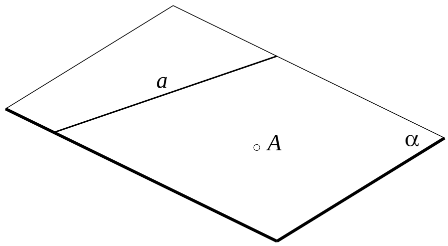
Navest ćemo sada neke jednostavne tvrdnje o točkama, pravcima i ravninama, koje su intuitivno očite, pa ćemo ih stoga smatrati istinitima (aksiomi).

A_1 Postoji točno jedan pravac a koji je incidentan s dvije različite točke A i B. (Postoji dakle točno jedna *spojnica* AB dvije različite točke A i B.) (Sl. 2.1).

A_2 Postoji točno jedna ravnina α koja prolazi danom točkom A i pravcem a, $A \notin a$ (sl. 2.2). Takvu ravninu zovemo *spojnom ravninom* točke A i pravca a (oznaka: $\alpha = Aa$).

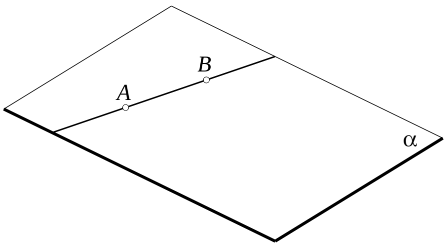


Sl. 2.1.

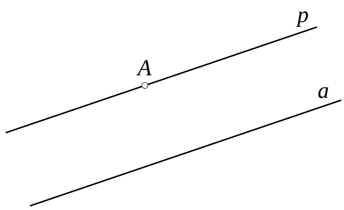


Sl. 2.2.

A$_3$ Ako dvije različite točke A i B danog pravca a leže u ravnini α, tada svaka točka tog pravca leži u ravnini α, tj. pravac a je *incidentan* s ravninom α (sl. 2.3).



Sl. 2.3.

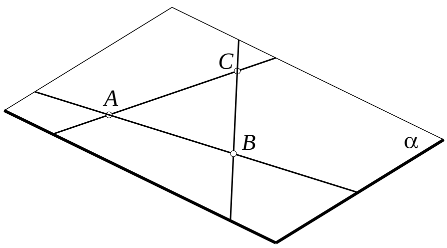


Sl. 2.4.

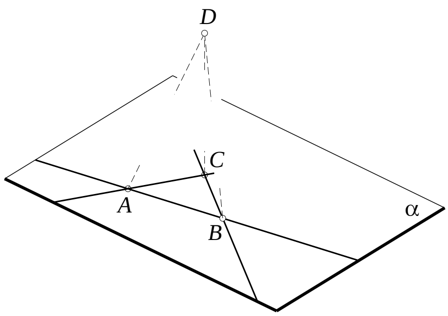
A$_4$ Postoji točno jedan pravac p koji prolazi danom točkom A i paralelan je s danim pravcem a (sl. 2.4).

Ovo je u stvari poznati *Euklidov 5. postulat o paralelama*.

A$_5$ Postoje najmanje tri nekolinearne točke koje su incidentne s nekom ravninom (sl. 2.5).



Sl. 2.5.



Sl. 2.6.

A$_6$ Postoje u prostoru najmanje četiri nekomplanarne točke A, B, C, D (četiri točke koje ne leže u jednoj te istoj ravnini) (sl. 2.6).

Na temelju ovih tvrdnji možemo sada izvoditi daljnja svojstva uvedenih figura u prostoru.

Teorem 2.1. *Postoji točno jedna ravnina α takva da dane tri nekolinarne točke A, B, C leže u toj ravnini. Za takvu ravninu kažemo da je definirana ili razapeta tim točkama A, B, C.*

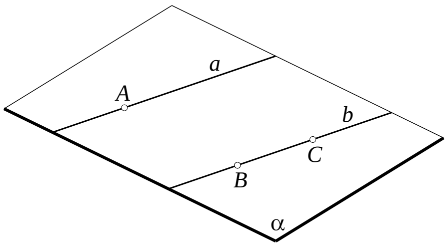
DOKAZ. Na temelju tvrdnje A_1 postoji točno jedna spojnica $a = AB$ točaka A i B. Sada prema A_2 postoji točno jedna ravnina α koja je određena s pravcem a i točkom C (sl. 2.5).

Teorem 2.2. *Postoji točno jedna ravnina α koja je određena s dva pravca a i b koji se sijeku u točki S. Možemo ovdje također reći da pravci a i b određuju ili razapinju ravninu α.*

DOKAZ. Na pravcu a uzmimo neku točku A različitu od sjecišta S, a na pravcu b uzmimo točku B različitu od S. Prema teoremu 2.1 točke A, B, S određuju točno jednu ravninu α, dok pravci $a = AS$ i $b = BS$ svakako prema A_3 leže u toj ravnini.

Teorem 2.3. *Dva paralelna pravca $a \parallel b$ određuju točno jednu ravninu. Postoji dakle točno jedna ravnina α u kojoj leže pravci a i b.*

DOKAZ. Ako odaberemo na pravcu a točku A, a na pravcu b točke B i C, tada je s te tri točke ravnina α prema teoremu 2.1 jednoznačno određena (sl. 2.7).



Sl. 2.7.

Teorem 2.4. *Ako postoje dvije različite točke A i B koje su incidentne s dvije ravnine α i β, tada se te dvije ravnine sijeku u pravcu $s = AB$.*

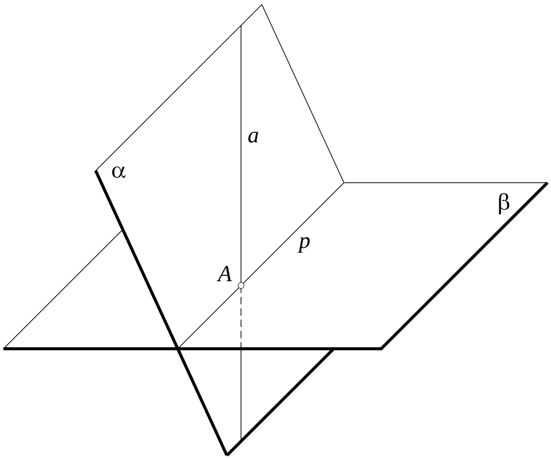
Dokaz ovog teorema slijedi odmah iz A_3.

Osim kada se dva pravca sijeku ili kad su paralelni, postoji još jedan mogući položaj dvaju pravaca:

Definicija 2.1. Dva su pravca a i b mimoilazna točno onda kada nisu komplanarni.

Takvi parovi mimoilaznih pravaca zaista postoje. Na temelju A_6 postoje naime četiri nekomplanarne točke A, B, C, D, pa time i prema A_1 pravci $a = AB$ i $b = CD$, koji očito nisu komplanarni, pa su time prema definiciji 2.1 onda mimoilazni.

Teorem 2.5. *Dane su dvije ravnine α i β koje se sijeku u presječnici p. Ako neki pravac a ravnine α probada ravninu β u točki A, tada ta točka leži na presječnici p (sl. 2.8).*



Sl. 2.8.

DOKAZ. Sve točke pravca a, pa tako i točka A, leže u ravnini α. S druge strane točka A mora, kao probodište pravca a i ravnine β, ležati u ravnini β. Prema tome točka A mora ležati u obje ravnine α i β i time na presječnici p tih ravnina.

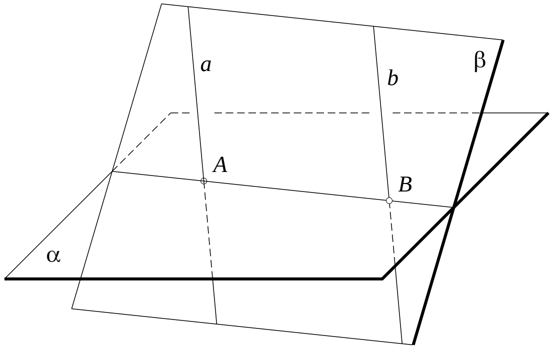
Svojstva paralelnosti pravaca i ravnina

U sljedećih nekoliko teorema razmotrit ćemo pobliže neke posljedice definicije paralelizma i Euklidovog aksioma A_4 o paralelnosti.

Teorem 2.6. *Ako su dana dva paralelna pravca $a \parallel b$ i ravnina α paralelna s pravcem a, tada je ravnina α također paralelna i s pravcem b,*

$$(a \parallel b, \quad \alpha \parallel a) \implies (\alpha \parallel b).$$

DOKAZ. Uzmimo nasuprot tvrdnji teorema da ravnina α nije paralelna s pravcem b (sl. 2.9).



Sl. 2.9.

Tada pravac b probada ravninu α u nekoj točki B. Presječnica p bi tada sjekla i pravac a u nekoj točki A, što se protivi pretpostavci. Slijedi $\alpha \parallel b$.

Ovaj teorem vrijedi i u slučaju kada α prolazi pravcem a (i sada je $a \parallel \alpha$ prema definiciji). Prema tome vrijedi:

Teorem 2.7. *Ako su pravci a i b paralelni, tada je ravnina koja prolazi jednim od tih pravaca paralelna s drugim*

$$(a \parallel b, \quad a \subset \alpha) \implies (b \parallel \alpha).$$

Teorem 2.8. *Ako je neki pravac b paralelan s nekim pravcem a u ravnini α, tada je taj pravac b paralelan s ravninom α.*

Ovo možemo i ovako izreći:

Teorem 2.9. *Neki pravac a je paralelan s ravninom α ako je paralelan s barem jednim pravcem te ravnine.*

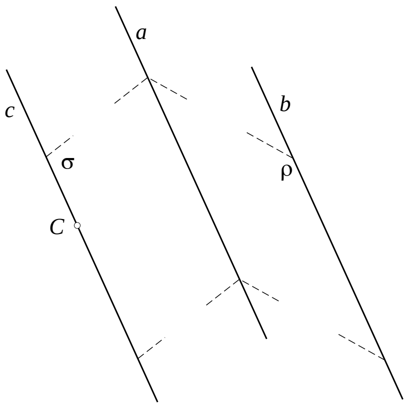
Evo još jednog važnog svojstva paralelnosti pravaca.

Teorem 2.10. *Paralelnost pravaca je relacija ekvivalencije, tj.*

1. $a \parallel a$ *(refleksivnost);*
2. $a \parallel b \implies b \parallel a$ *(simetričnost);*
3. $a \parallel b$, $b \parallel c \implies a \parallel c$ *(tranzitivnost).*

DOKAZ. Svojstva refleksivnosti i simetričnosti su očita i izlaze iz same definicije paralelnosti pravaca. Dokažimo još valjanost svojstva tranzitivnosti.

Ravnina ρ neka je razapeta paralelnim pravcima a i b. Odaberimo po volji točku C na pravcu c. Ravninu koja je razapeta točkom C i pravcem a označimo sa σ (sl. 2.10).



Sl. 2.10.

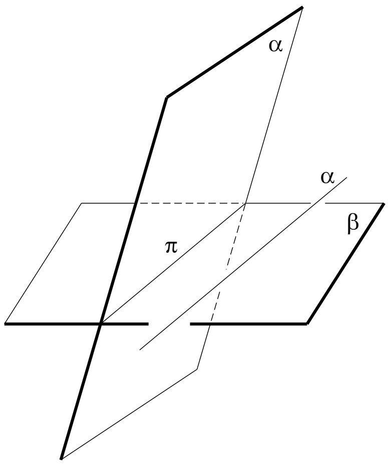
Prema teoremu 2.8 je sada $\sigma \parallel b$ i $\sigma \parallel c$. Pravac c leži dakle u ravnini σ. U ravnini σ leže oba pravca a i c koja su oba paralelna s pravcem b.

Kada bi pravac c sjekao pravac a u nekoj točki D, tada bi tom točkom D prolazile dvije različite paralele s pravcem b, što se protivi Euklidovom aksiomu A_4. Slijedi dakle $a \parallel c$.

Teorem 2.11. *Ako je pravac a paralelan s dvije ravnine α i β koje se sijeku u presječnici p, tada je taj pravac a paralelan i s presječnicom p,*

$$(a \parallel \alpha,\ a \parallel \beta; \quad \alpha \cap \beta = p) \implies (a \parallel p).$$

DOKAZ. Nekom točkom P presječnice p povucimo pravac $s \parallel a$ (sl. 2.11). Pravac s mora na temelju teorema 2.6 ležati i u α i u β, pa je prema tome $s \equiv p$.



Sl. 2.11.

Teorem 2.12. *Ako su dvije ravnine α i β paralelne s dva neparalelna pravca a i b, tada su i te dvije ravnine međusobno paralelne,*

$$(\alpha, \beta \parallel a, b; \quad a \nparallel b) \implies (\alpha \parallel \beta).$$

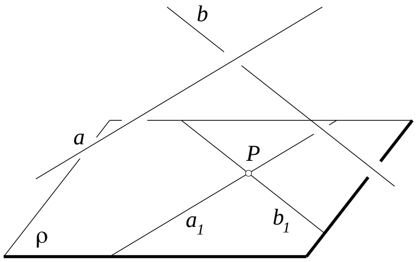
DOKAZ. Uzmimo da je $\alpha \nparallel \beta$ nasuprot tvrdnji teorema. Tada se te dvije ravnine sijeku u pravcu p. No tada bi presječnica p bila paralelna s dva neparalelna pravca a i b, što je prema teoremu 2.10 nemoguće.

Teorem 2.13. *Nekom danom točkom P prostora prolazi točno jedna ravnina ρ koja je paralelna s dva neparalelna pravca a i b.*

DOKAZ. Točkom P položimo pravce a_1 i b_1, tako da je

$$a \parallel a_1 \quad \text{i} \quad b \parallel b_1.$$

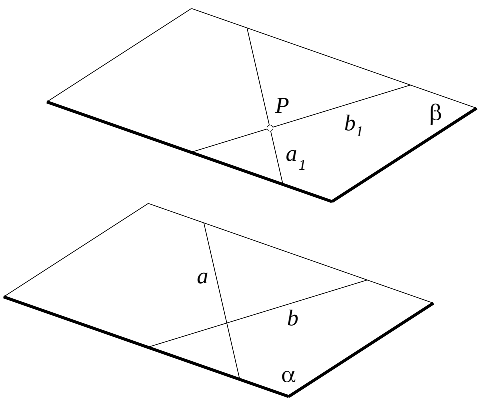
Pravci a_1 i b_1 su na temelju A_4 jednoznačno određeni (sl. 2.12). Ravnina ρ određena pravcima a_1 i b_1 je paralelna s pravcima a i b (prema teoremu 2.9).



Sl. 2.12.

Na osnovi ovih razmatranja je sada lako dokazati:

Teorem 2.14. *Nekom točkom P prostora prolazi točno jedna ravnina β koja je paralelna s danom ravninom α.*



Sl. 2.13.

DOKAZ. Odaberemo li naime dva neparalelna pravca a i b ravnine α, tada traženu ravninu β određuju pravci $a_1 \parallel a$ i $b_1 \parallel b$, koji prolaze točkom P (sl 2.13).

Odavde odmah slijedi:

Teorem 2.15. *Paralelnost ravnina je također relacija ekvivalencije, tj. vrijedi*

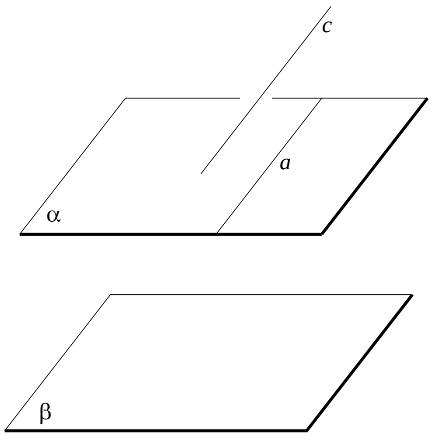
$$\alpha \parallel \alpha \qquad \textit{(refleksivnost);}$$
$$\alpha \parallel \beta \implies \beta \parallel \alpha \qquad \textit{(simetričnost);}$$
$$\alpha \parallel \beta,\ \beta \parallel \gamma \implies \alpha \parallel \gamma \qquad \textit{(tranzitivnost).}$$

Evo još nekih svojstava paralelnosti.

Teorem 2.16. *Ako su dane ravnine α i β paralelne i pravac c paralelan s ravninom α, tada je c također paralelan i s ravninom β,*

$$(\alpha \parallel \beta, \quad c \parallel \alpha) \implies (c \parallel \beta).$$

DOKAZ. Povucimo nekom točkom ravnine α pravac $a \parallel c$ (sl. 2.14).



Sl. 2.14.

Primijenimo ovdje teorem 2.6 čime dobijemo da je $a \parallel \alpha$. No kako a prolazi jednom točkom ravnine α, to je a pravac te ravnine α. Kako je i $\beta \parallel \alpha$ slijedi $\beta \parallel a$ i opet prema teoremu 2.6 dobijemo $\beta \parallel c$.

Na temelju teorema 2.6 i prethodnog teorema 2.16 dobijemo odmah:

Teorem 2.17. *Ako su dane dvije paralelne ravnine $\alpha \parallel \beta$ i dva paralelna pravca $a \parallel b$ i ako je jedan od tih pravaca paralelan s jednom od spomenutih ravnina, tada je svaki od danih pravaca a i b paralelan sa svakom od ravnina α i β.*

Na osnovi činjenice što je paralelnost pravaca, odnosno ravnina, relacija ekvivalencije, možemo izreći:

Definicija 2.2. Klasu pravaca prostora koji su svi međusobno paralelni, zovemo *snopom paralelnih pravaca*.

Svaka takva klasa, odnosno snop, određuje nam jedan *smjer* u prostoru.

Neki snop paralelnih pravaca je jednoznačno određen s jednim pravcem a iz te klase. Snop se tada sastoji iz svih pravaca paralelnih s tim pravcem a.

Dva neparalelna pravca a i b $(a \not\parallel b)$ pripadaju očito različitim snopovima paralelnih pravaca, tj. oni imaju *različite smjerove*.

Analogno možemo izreći:

Definicija 2.3. Klasu svih međusobno paralelnih ravnina zovemo *sveskom paralelnih ravina.*

Okomitost pravaca i ravnina

Ovdje pretpostavljamo da su nam dovoljno poznati neki pojmovi iz elementarne planimetrije. To su: okomitost, kut, izometrije i posebno osne simetrije ravnine.

Podsjetimo se najprije definicije i nekih svojstava osne simetrije.

Definicija 2.4. Osna simetrija σ je takvo preslikavanje skupa točaka i skupa pravaca ravnine na sebe, u kojem je točki P ravnine pridružena točka P' tako da vrijedi:

a) dužina PP' je okomita na os s $(PP' \perp s)$;

b) polovište M dužine PP' je točka na osi s.

Evo još nekih daljnjih svojstava osne simetrije σ.

1. Osna simetrija σ je bijekcija.
2. Bilo kojoj točki Q na osi s je pridružena ta ista točka. Točke osi s (i samo one) su dakle *fiksne* ili *invarijantne točke* osne simetrije σ.
3. Pravci okomiti na os s se tom osnom simetrijom σ preslikavaju sami na sebe. Prema tome su ti pravci *fiksni pravci* osne simetrije σ.
4. Osna simetrija σ je sa svojom osi s jednoznačno određena.

Pomoću osne simetrije σ ravnine možemo sada definirati osnu simetriju τ prostora.

Definicija 2.5. Osna simetrija τ prostora s obzirom na os s je bijektivno preslikavanje skupa točaka, skupa pravaca i skupa ravnina na sebe, s tim da vrijedi:

a) Svaka ravnina α koja prolazi kroz os s je fiksna ravnina, što znači da se osnom simetrijom τ neka točka te ravnine (odnosno pravac te ravnine) preslikava opet u točku (odnosno pravac) te iste ravnine. Skup svih točaka i pravaca takve ravnine osnom se simetrijom τ preslikava bijektivno na sebe.

b) Preslikavanje skupa točaka i pravaca neke ravnine α koja prolazi kroz os s, na sebe, je osna simetrija σ te ravnine s obzirom na os s.

Teorem 2.18. *Sa osi s je osna simetrija τ prostora jednoznačno određena.*

DOKAZ. Imamo li neku točku A prostora, tada je s tom točkom i sa osi s određena ravnina $\alpha = As$. No s pravcem s je također određena i osna simetrija σ ravnine α. Točka A' koja je pridružena u toj ravninskoj osnoj simetriji σ je ujedno i slika točke A pri simetriji τ prostora, tj.

$$\sigma(A) = \tau(A) = A'.$$

Kako je sa osi s određena osna simetrija σ ravnine α, to je onda očito s tom osi određena i osna simetrija τ prostora.

Na temelju definicije osne simetrije τ prostora, možemo ovdje odmah izreći neka njena svojstva:

1. os s je fiksni pravac osne simetrije τ prostora i svaka točka osi s je fiksna točka te osne simetrije τ;
2. svi pravci koji okomito sijeku os s su fiksni pravci osne simetrije τ prostora;
3. sve ravnine koje prolaze kroz os s su fiksne ravnine osne simetrije τ prostora.

Ako bilo kojoj točki A kao originalu, odgovara točka A' kao slika pri nekom preslikavanju, a točki A' kao originalu odgovara točka A kao slika, tada za takvo preslikavanje kažemo da je involutorno.

Ako dva puta uzastopce izvedemo takvo preslikavanje, tj.

$$\sigma(A) = A' \qquad \text{i} \qquad \sigma(A') = A,$$

to će vrijediti

$$\sigma^2(A) = A$$

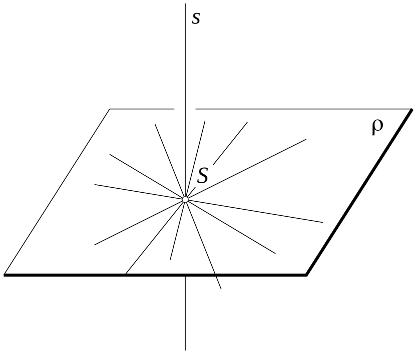
za svaku točku skupa. Kompozicija σ^2 takvog preslikavanja je tada dakle identitet. Imamo prema tome:

Teorem 2.19. *Osna simetrija τ prostora je involutorno preslikavanje.*

Navest ćemo sada još jedno svojstvo osne simetrije τ prostora bez dokaza:

Teorem 2.20. *Osna simetrija τ prostora je izometrija.*

Promotrimo os s osne simetrije τ prostora i uzmimo neku točku S na toj osi s. Ako sada uzmemo neku ravninu α koja prolazi kroz os s, tada za osnu simetriju σ ravnine α odredimo fiksni pravac p te osne simetrije σ koji prolazi točkom S i okomit je na os s. Za različite ravnine α kroz s postoje i različiti pravci koji prolaze točkom S i koji su okimiti na os s. No svi su ti pravci fiksni u odgovarajućim simetrijama tih ravnina α pa su oni fiksni i za osnu simetriju τ prostora. Svi ti pravci dakle prolaze točkom S, okomiti su na os s i moraju ležati u jednoj fiksnoj ravnini ρ osne simetrije τ. Svi ti pravci čine jedan pramen (S) pravaca u ravnini ρ (sl. 2.15).



Sl. 2.15.

Definicija 2.6. Za pravac s i ravninu ρ, koji su u gore opisanom međusobnom položaju kažemo da su okomiti

$$s \perp \rho \qquad \text{ili} \qquad \rho \perp s.$$

Odavde odmah slijede neka svojstva okomitosti pravaca i ravnina.

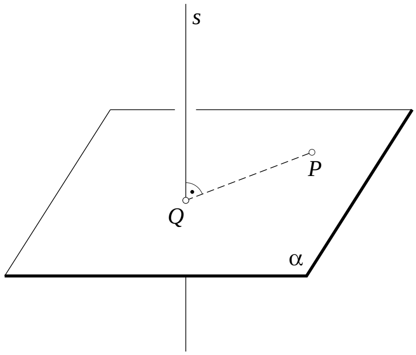
Teorem 2.21. *a) Nekom točkom A pravca a prolazi točno jedna ravnina okomita na pravac a.*

b) Neka pravci a i b sijeku pravac s u točki S okomito. Pravci a i b razapinju tada ravninu ρ okomitu na pravac s $(\rho \perp s)$.

c) Neki pravac a je okomit na ravninu α točno onda ako je okomit na dva različita pravca koji prolaze probodištem A pravca a i ravnine α i leže u toj ravnini α.

Teorem 2.22. *Svakom točkom P prostora prolazi točno jedna ravnina α okomita na dani pravac s.*

DOKAZ. Pravac s zamislimo kao os osne simetrije τ prostora.



Sl. 2.16.

Ako točka P leži na pravcu s, tada prema definiciji 2.6 tvrdnja teorema odmah slijedi.

Ako točka P ne leži na pravcu s, tada možemo povući okomicu p iz točke P na pravac s (sl. 2.16). Nožištem Q te okomice p prolazi sada točno jedna ravnina koja je okomita na os s i u kojoj očito leži točka P.

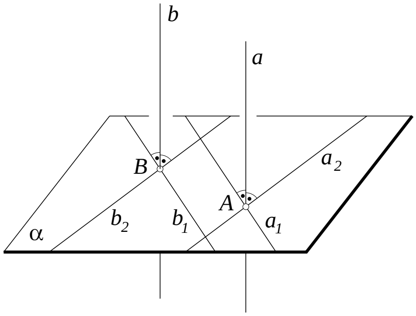
Teorem 2.23. *Svakom točkom P prostora prolazi točno jedna okomica n na danu ravninu α.*

DOKAZ. Uzmimo nasuprot tvrdnji da točkom P prolaze dvije okomice n_1 i n_2 na ravninu α. Probodišta tih okomica s ravninom α označimo s N_1 i N_2. Spojnica N_1N_2 bi tada bila presječnica ravnine α i ravnine β koja je razapeta pravcima n_1 i n_2. Postojale bi tada u ravnini β dvije okomice, koje prolaze točkom P, a okomite su na pravac N_1N_2. Ako se sada sjetimo teorema planimetrije po kojem postoji točno jedna okomica iz P na pravac N_1N_2, to prema tome ne postoje dvije okomice iz P na ravninu α.

Teorem 2.24. *Ako je $a \perp \alpha$ i $a \parallel b$, tada je i $b \perp \alpha$.*

DOKAZ. Imamo pravac a koji je okomit na ravninu α i pravac b koji je paralelan s a. Probodištima A i B tih pravaca s ravninom α povucimo pravce a_1, a_2, b_1, b_2 ravine α tako da je $a_1 \parallel b_1$ i $a_2 \parallel b_2$ (sl. 2.17). Kako je $a \perp \alpha$ to su $\sphericalangle(a, a_1)$ i $\sphericalangle(a, a_2)$ pravi kutovi. No kako su još kutovi $\sphericalangle(a, a_1)$ i $\sphericalangle(b, b_1)$ kao i $\sphericalangle(a, a_2)$ i $\sphericalangle(b, b_2)$ kutovi sa paralelnim kracima, to su i kutovi $\sphericalangle(b, b_1)$ i $\sphericalangle(b, b_2)$ pravi (v. kasnije teorem 2.34).

Pravac b je okomit na pravce b_1 i b_2 pa je prema tome (teorem 2.21c)) pravac b okomit na ravninu α.



Sl. 2.17.

Teorem 2.25. *Sve okomice na neku ravninu α čine snop paralelnih pravaca.*

DOKAZ. Pretpostavimo da vrijedi

$$a,\ b \perp \alpha \qquad \text{i} \qquad a \not\parallel b.$$

Ako a nije paralelan s pravcem b tada nekom točkom A na pravcu a možemo povući pravac a_1 takav da je $a_1 \parallel b$. Prema prethodnom teoremu vrijedi $a_1 \perp \alpha$. To bi značilo da jednom točkom A prolaze dvije okomice a i a_1 na ravninu α što je u proturječju s teoremom 2.23.

Slično se dokazuje:

Teorem 2.26. *Sve ravnine okomite na dani pravac čine svezak paralelnih ravnina.*

Teorem 2.27. *Ako je neki pravac a okomit na ravninu α, tada su svi pravci paralelni s pravcem a okomiti na sve ravnine paralelne s ravninom α.*

Dokažimo dalje:

Teorem 2.28. *Promotrimo pravce a, b i ravnine α, β, takve da vrijedi*

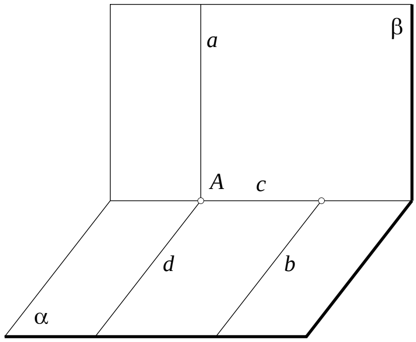
$$a \perp \alpha, \quad b \perp \beta.$$

Ako je a pravac ravnine β, tada je b pravac ravnine α.

DOKAZ. Neka je a pravac ravnine β. Ravnina β siječe tada ravninu α u pravcu c, koji prolazi probodištem A pravca a i ravnine α (v. teorem 2.5) (sl. 2.18).

Povucimo sada pravac d koji prolazi točkom A, leži u ravnini α i vrijedi $d \perp c$.

Kako je $a \perp \alpha$, to je $a \perp d$. Pravac d je dakle okomit na a i c, pa je okomit i na ravninu β. Slijedi $d \parallel b$ i b leži u ravnini α.



Sl. 2.18.

Definicija 2.7. Dvije ravnine su međusobno okomite ako postoji pravac jedne ravnine koji je okomit na drugu.

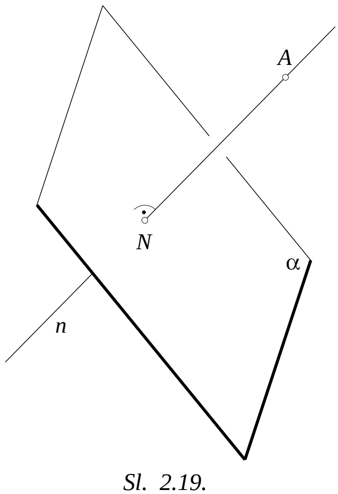
Evo još nekoliko izravnih posljedica teorema 2.28:

Teorem 2.29. *Neka je* $\alpha \perp \beta$. *Svaki pravac jedne od tih ravnina koji je okomit na njihovu presječnicu, je okomit i na drugu ravninu.*

Teorem 2.30. *Neka je* $\alpha \perp \beta$. *Okomica spuštena iz neke točke jedne od tih ravnina* α *na drugu* β, *leži u ravnini* α.

Teorem 2.31. *Ako je* $\alpha \perp \gamma$ *i* $\beta \perp \gamma$, $\alpha \not\perp \beta$, *tada je presječnica ravnina* α *i* β *okomita na ravninu* γ *i obrnuto.*

Duljine i kutovi



Sl. 2.19.

Pretpostavljamo ovdje da je barem intuitivno poznat pojam *udaljenosti dviju točaka* A *i* B odnosno pojam *duljine (mjernog broja)* dužine AB kao i pojam *kuta* $\sphericalangle(a, b)$ i njegovog *mjernog broja*.

Iz dosadašnjeg izlaganja znamo da nekom točkom A prostora, prolazi točno jedna okomica n na danu ravninu α. Probodište N te okomice i ravnine α nazivat ćemo *nožištem* N okomice n (sl. 2.19).

Definicija 2.8. Udaljenost točke A od ravnine α jednaka je duljini (mjernom broju) dužine AN, gdje je N nožište okomice spuštene iz točke A na ravninu α.

Evo nekoliko očitih svojstava udaljenosti točke od ravnine:

Teorem 2.32. *a) Udaljenost neke točke* A *od ravnine* α *je jednaka ništici točno onda ako točka* A *leži u ravnini* α.

b) Udaljenost točke A *od ravnine* α *je minimalna udaljenost točke* A *od bilo koje točke ravnine* α.

c) Ako je $\beta \parallel \alpha$, *tada je udaljenost svih točaka ravnine* β *od ravnine* α *jednaka.*

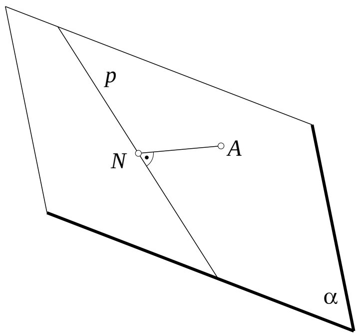
Na osnovi svojstva c) moguće je izreći:

Definicija 2.9. Udaljenost dvije paralelne ravnine jednaka je udaljenosti bilo koje točke jedne od tih ravnina do druge ravnine.

Imamo dalje:

Definicija 2.10. Udaljenost točke A od pravca p definirana je kao mjerni broj dužine AN, gdje je N nožište okomice spuštene iz točke A na pravac p.

Postoji naime ravnina α jednoznačno određena točkom A i pravcem p. Kako je poznato iz planimetrije, okomica AN u ravnini α postoji i jednoznačno je određena (sl. 2.20).



Sl. 2.20.

Ako su dva pravca a i b paralelni, tada je udaljenost bilo koje dvije točke jednog pravca od drugog jednaka. Tako imamo: