I.

TOČKE, PRAVCI, RAVNINE

1.

Osnovne figure prostora

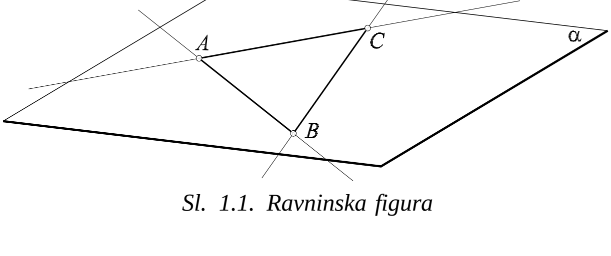
Polazeći od intuitivnog poimanja, prostor možemo promatrati kao skup $\mathscr{E}$ elemenata koje ćemo zvati točkama, te označavati s $A, B, C, \ldots$. Možemo, dakle, reći da sve što je sadržano u prostoru $\mathscr{E}$, sazdano je od točaka.

Definicija 1.1. Svaki neprazan pravi podskup F prostora $\mathscr{E}$ zvat ćemo *(točkovnom) figurom prostora* $\mathscr{E}$.

Evo nekoliko jednostavnih figura prostora $\mathscr{E}$:

1. Jednu (bilo koju) *točku* A prostora možemo zvati figurom A prostora.
2. Bilo koji *pravac* p prostora $\mathscr{E}$ možemo također zvati (točkovnom) figurom prostora $\mathscr{E}$. Naime, sve točke koje "leže" na pravcu p čine očito podskup točaka prostora, a time onda i točkovnu figuru prostora.
3. Bilo koju *ravninu* prostora možemo također smatrati (točkovnom) figurom prostora $\mathscr{E}$. Naime, sve točke prostora koje leže u toj ravnini, čine očito podskup točaka skupa točaka $\mathscr{E}$.
4. *Dužine*, *polupravci*, *poluravnine* i tako dalje, *točkovne su figure prostora* $\mathscr{E}$.

Neka su u prostoru $\mathscr{E}$ dane tri nekolinearne točke A, B, C. Tim točkama su određene i spojne dužine $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$. Tri točke A, B, C zajedno sa svim točkama na spojnim dužinama čine točkovnu figuru prostora $\mathscr{E}$. Sve točke te figure nalaze se u ravnini α prostora koja je određena s te tri dane točke (sl. 1.1).



Sl. 1.1. Ravninska figura

Definicija 1.2. Točkovnu figuru F, čije se sve točke nalaze u jednoj te istoj ravnini prostora $\mathscr{E}$, zovemo *ravninskom figurom* prostora $\mathscr{E}$.

Onu figuru, čije sve točke ne leže u jednoj te istoj ravnini, zovemo *prostornom figurom* prostora $\mathscr{E}$.

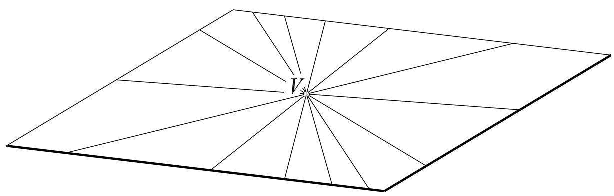
Nadalje, promotrimo intuitivno prostor koji se sastoji od skupa svih pravaca prostora $\mathscr{E}$. Analogno prijašnjoj definiciji točkovne figure (v. def. 1.1) možemo izreći:

Definicija 1.3. Svaki neprazan pravi podskup skupa svih pravaca prostora $\mathscr{E}$ zvat ćemo *pravčastom figurom* prostora $\mathscr{E}$.

Evo nekoliko primjera osnovnih pravčastih figura:

Definicija 1.4. Pravčastu figuru, koja se sastoji od svih pravaca prostora koji prolaze nekom čvrstom točkom V, prostora zovemo *snopom pravaca*.

Definicija 1.5. Pravčastu figuru, koja se sastoji od skupa pravaca koji prolaze nekom čvrstom točkom V prostora i leže u jednoj te istoj ravnini koja prolazi kroz V, zovemo *pramenom pravaca* (sl. 1.2).



Sl. 1.2. Pramen pravaca je ravninska figura.

Snop pravaca očito je pravčasta *prostorna figura* dok je pramen pravaca očito pravčasta *ravninska figura* prostora $\mathscr{E}$.

Točku V zovemo *centrom* (ili vrhom) snopa pravaca, odnosno pramena pravaca.

Zadanom točkom V jednoznačno je određen snop pravaca dok je neki pramen pravaca jednoznačno određen zadavanjem centra V i ravnine α koja prolazi kroz V.

Kao što smo do sada definirali figure prostora uzevši u obzir točke ili pravce kao elemente tih figura pa smo ih stoga nazvali točkovnim, odnosno pravčastim figurama, tako možemo definirati i figure pomoću ravnina kao elemenata.

Promotrimo intuitivno skup svih ravnina prostora $\mathscr{E}$. Analogno prijašnjim definicijama (Def. 1.1 i 1.3) možemo reći:

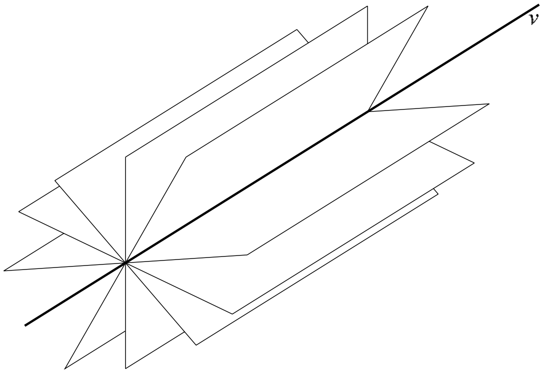
Definicija 1.6. Bilo koji neprazan i pravi podskup skupa svih ravnina u prostoru $\mathscr{E}$ zvat ćemo *figurom ravnina*.

Evo nekoliko primjera takvih figura ravnina:

Definicija 1.7. Figuru ravnina koja se sastoji iz svih ravnina prostora $\mathscr{E}$ koje prolaze nekom točkom V zovemo *svežnjem ravnina*. Točku V zovemo *centrom* ili *vrhom* tog svežnja ravnina.

Zadanom točkom V kao centrom svežanj je ravnina jednoznačno odred̄en.

Definicija 1.8. Figuru ravnina, koja se sastoji od svih ravnina prostora $\mathscr{E}$ koje prolaze danim čvrstim pravcem v, zovemo *sveskom ravnina* (sl. 1.3).



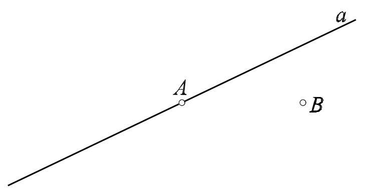
Sl. 1.3. Svezak ravnina

2.

Incidencija točaka, pravaca i ravnina

Pođimo opet intuitivno od prostora $\mathscr{E}$ kao skupa točaka A, B, C, ... Znamo da u prostoru postoje stanoviti podskupovi točaka koje zovemo pravcima a, b, c,..., a isto tako stanoviti podskupovi α, β, ..., ρ, σ... koje zovemo ravninama.

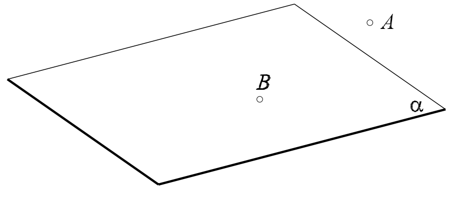
Definicija 2.1. Za neku točku A kažemo da je *incidentna* s pravcem a ako je ta točka A element skupa točaka koji čine taj pravac a (sl. 2.1).



Slika 2.1. Točka A leži na pravcu a. Ona je incidentna s pravcem. Točka B nije incidentna s pravcem.

Jednostavnije rečeno, točka A *leži* na pravcu a ili pravac a *prolazi* točkom A.

Definicija 2.2. Za neku točku B kažemo da je *incidentna* s ravninom α ako je ta točka element podskupa točaka koje čine tu ravninu.



Slika 2.2. Točka B leži u ravnini α. Ona je incidentna s ravninom. Točka A nije incidentna s ravninom (što nije jasno sa slike).

Jednostavnije rečeno točka B *leži* u ravnini α, odnosno ravnina α *prolazi* (ne prolazi) točkom B (sl. 2.2).

Svojstvo incidencije među točkama, pravcima i ravninama govori nam o njihovom međusobnom položaju u prostoru. Pogledajmo stoga kakve sve međusobne položaje mogu zauzeti točke, pravci i ravnine.

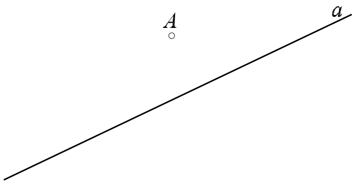
1. *Dvije točke* A i B:

a) mogu biti različite ($A \neq B$), ili

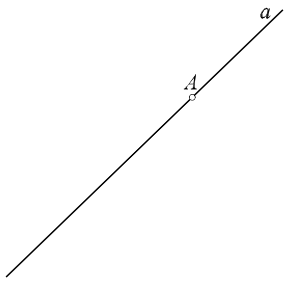
b) mogu se poklapati ($A \equiv B$).

2. *Točka* A *i pravac* a:

a) Mogu biti disjunktni, kad točka A ne leži na pravcu a (sl. 2.3);



Sl. 2.3.



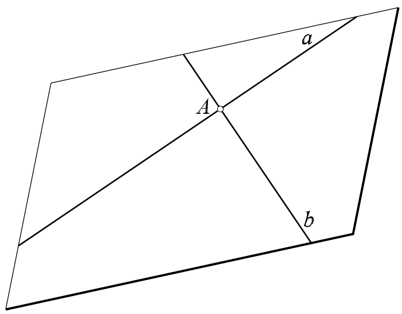
Sl. 2.4.

b) točka A može biti incidentna s pravcem a, odnosno ona može ležati na pravcu a. Još možemo reći da pravac a prolazi danom točkom A (sl. 2.4).

3. *Dva pravca* a *i* b:

a) mogu se poklapati. Dakle, isti podskup točaka definira nam i pravac a i pravac b. Pišemo $a \equiv b$.

b) mogu se *sjeći*, tj. imati točno jednu točku A zajedničku. Točka A (i samo ta točka) pripada jednom i drugom pravcu a i b. Točku A tada zovemo *sjecištem* pravaca a i b. Pišemo $a \cap b = A$ (sl. 2.5).

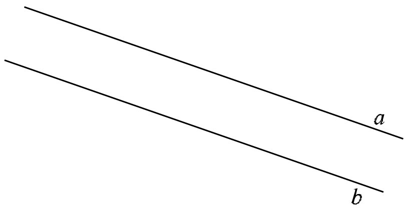


Sl. 2.5. Točka A sjecište je pravaca a i b.

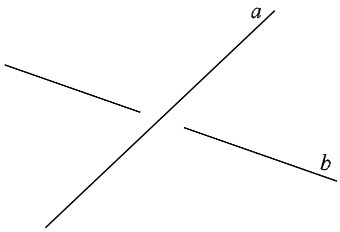
U ovom slučaju, kako ćemo to kasnije pokazati, postoji ravnina α s kojom su incidentne sve točke jednog i drugog pravca a i b. Kažemo da takva dva pravca definiraju, odnosno *razapinju* tu ravninu α. Za takva dva pravca kažemo da su *komplanarni*.

Napomenimo ovdje još i to da su dva pravca koja se poklapaju (v. slučaj a)) također komplanarni pravci.

c) Dva komplanarna pravca a i b, koji se poklapaju ili se ne sijeku (nemaju niti jednu točku zajedničku), zovemo *paralelnim pravcima*. Pišemo $a \parallel b$ (sl. 2.6).



Sl. 2.6. Paralelni pravci.



Sl. 2.7. Mimoilazni pravci.

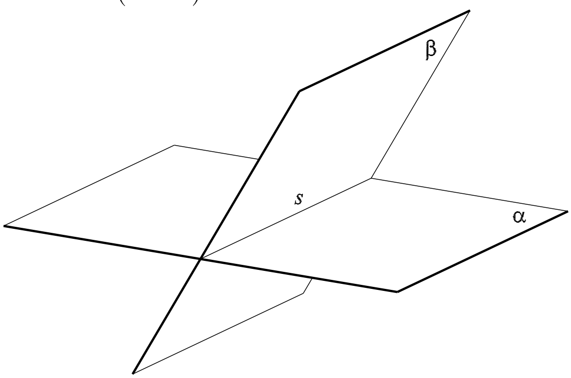
Napomenimo ovdje da smo dva pravca koji se poklapaju također ubrojili u paralelne pravce iz čisto praktičnih razloga, kako ćemo to još kasnije vidjeti.

d) Dva pravca a i b koji nisu komplanarni i prema tome niti se sijeku niti su paralelni zovemo *mimoilaznim pravcima* (sl. 2.7).

4. *Dvije ravnine α i β:*

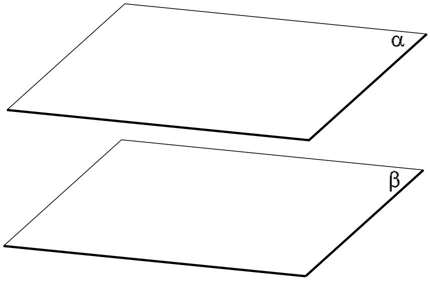
a) mogu se poklapati ako su im podskupovi točaka koji ih definiraju identični. Pišemo $\alpha \equiv \beta$.

b) mogu se *sjeći* ako postoji točno jedan pravac s, čije sve točke leže i u jednoj i u drugoj ravnini. Pišmo $\alpha \cap \beta = s$. Pravac s zovemo *presječnicom* tih dviju ravnina (sl 2.8).



Sl. 2.8. Ravnine α i β se sijeku. Njihov presjek je pravac s.

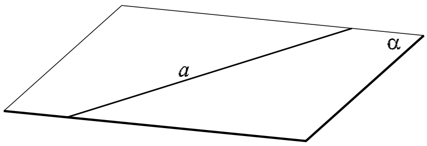
c) Za dvije ravnine kažemo da su *paralelne* ako se one ili poklapaju ili nemaju niti jedne točke zajedničke. Pišemo $\alpha \parallel \beta$ (sl. 2.9).



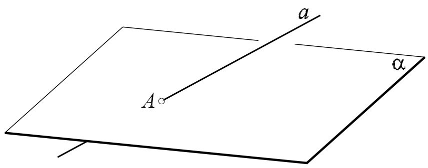
Sl. 2.9. Paralelne ravnine.

5. *Pravac a i ravnina α:*

a) Pravac a leži u ravnini α ako svaka točka pravca a leži u ravnini α. Svaka se, dakle, točka pravca a poklapa s nekom točkom ravnine α (sl. 2.10).



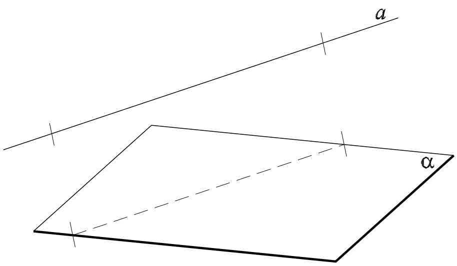
Sl. 2.10. Pravac leži u ravnini.



Sl. 2.11. Pravac i ravnina se sijeku.

b) Za pravac a i ravninu α kažemo da se *sijeku* ako postoji točno jedna točka A koja leži i na pravcu a i na ravnini α. Pišemo $a \cap \alpha = A$. Točku A zovemo *probodište* pravca a i ravnine α (sl. 2.11).

c) Za pravac a i ravninu α kažemo da su paralelni ako pravac a ili leži u ravnini α, ili pravac a i ravnina α nemaju nijedne zajedničke točke. Pišemo $a \parallel \alpha$ (sl. 2.12).



Sl. 2.12. Pravac a i ravnina α su paralelni.

3.

Postulati incidencije

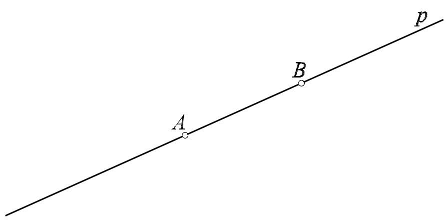
O međusobnim odnosima točaka, pravaca i ravnina imamo jasan geometrijski zor. Te pojmove smatramo elementarnim i ne pokušavamo ih opisati pomoću drugih pojmova.

Imajući u vidu taj geometrijski zor, popisujemo sistemom *postulata* (aksioma) neka temeljne veze između ovih pojmova. Aksiomi su tvrdnje koje se ne dokazuju, već se u okviru neke teorije drže ispravnima. Svaku drugu tvrdnju koje slijede iz aksioma zovemo **teoremom** (**poučak, stavak**) i nju treba dokazivati.

Postulati incidencije

I_1. *Postoji točno jedan pravac p koji prolazi kroz dvije zadane različite točke A i B.*

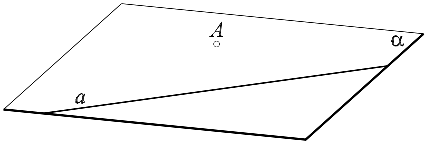
Pišemo $p = AB$ (ili $p = BA$). Takav pravac zovemo *spojnicom* točaka A i B (sl. 3.1).



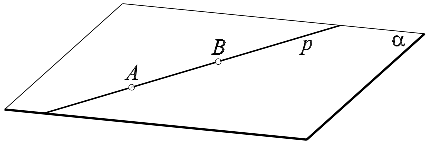
Slika 3.1. S dvije različite točke zadan je točno jedan pravac p.

I_2. *Postoji točno jedna ravnina α koja prolazi i pravcem a i točko A koja ne leži na tom pravcu.*

Tu ravninu označavamo s $\alpha = Aa$, ili $\alpha = aA$ i nazivamo je *spojnom ravninom* pravca a i točke A (sl. 3.2).



Sl. 3.2. Uz postulat I_2.



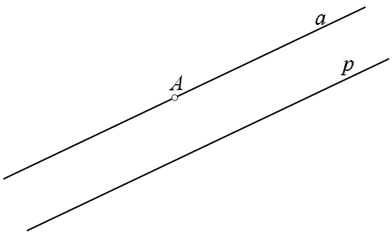
Sl. 3.3. Uz postulat I_3.

I_3. *Ako dvije različite točke A i B pravca p leže u ravnini α, tada sve točke tog pravca p leže u ravnini α.*

Za takav pravac p kažemo da *leži* u ravnini α (sl. 3.3).

I_4. *Postoji točno jedan pravac a, koji prolazi danom točkom A i paralelan je s danim pravcem p.*

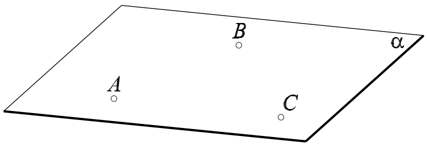
Ovaj je postulat poznat pod nazivom Euklidov V. postulat (sl. 3.4).



Sl. 3.4. Euklidov V. postulat.

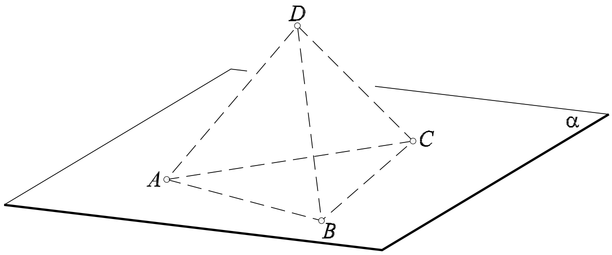
Postulati dimenzije

D_1. *Svaka ravnina sadrži (najmanje) tri nekolinearne točke* (sl. 3.5).



Sl. 3.5.

D_2. *U prostoru postoje četvorke točaka koje nisu sve komplanarne* (sl. 3.6).



Sl. 3.6.

* * *

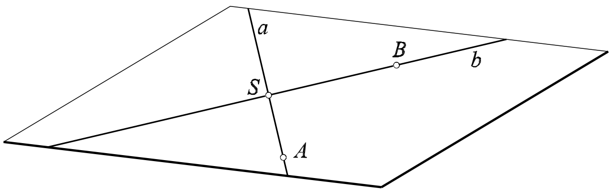
Na temelju do sada navedenih postulata možemo vrlo jednostavno dokazati nekoliko osnovnih svojstava naših do sada razmatranih figura.

Teorem 3.1. *Tri nekolinearne točke A, B i C određuju jednoznačno ravninu, koja prolazi tim trima točkama.*

DOKAZ. Promotrimo spojnicu $s = AB$. Ravnina $\alpha = sC$ sadrži tri točke A, B, C. S druge strane, svaka ravnina koja sadrži A, B, C sadrži i pravac s (radi postulata I_3) i točku C, pa se svaka takva ravnina mora poklapati s ravninom α (radi postulata I_2). □

Teorem 3.2. *Dva pravca a, b koji se sijeku u točki S određuju ravninu α u kojoj ta dva pravca leže.*

DOKAZ. Označimo na pravcu a odnosno b po jednu točku A odnosno B, različite od S (sl. 3.7). Tri nekolinearne točke A, B, S određuju prema prethodnom teoremu ravninu α, koja sadrži dvije točke pravca a i dvije točke pravca b pa prema tome α sadrži i oba pravca a i b.



Slika 3.7. Dva pravca koji se sijeku leže u ravnini.

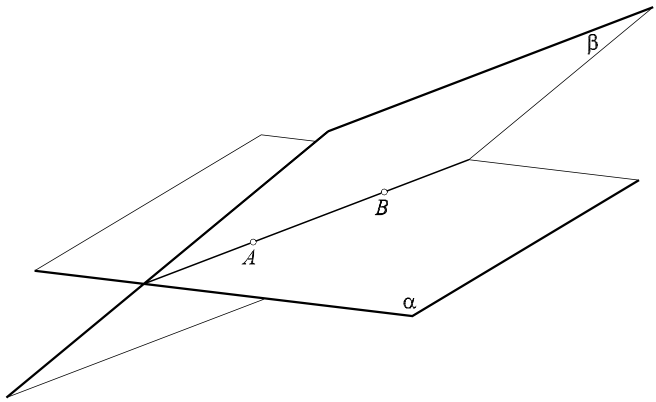
Dalje, svaka ravnina, koja prolazi dvama danim pravcima a i b, sadrži tri točke A, B, S poklapa se sa

$$\alpha = ABS = ab \qquad \text{(sl. 3.7)}.$$

Slijedi da dva pravca koja se sijeku ili su paralelni moraju biti komplanarni. □

Odavde neposredno slijedi

Teorem 3.3. *Ako dvije različite ravnine α, β imaju zajedničke dvije različite točke A, B, tada spojnica AB (i samo ona) tih dviju točaka leži u obje te ravnine (sl. 3.8).*



Sl. 3.8. Ako dvije različite ravnine imaju u presjeku dvije točke A i B, onda se one sijeku po pravcu. Time još nije dokazano da se svake dvije ravnine, koje se sijeku, sijeku po pravcu. Vidi Teorem 4.3.

Obje te točke A, B leže i u ravnini α i u ravnini β, pa onda i njihove spojnice leže u jednoj i drugoj ravnini.

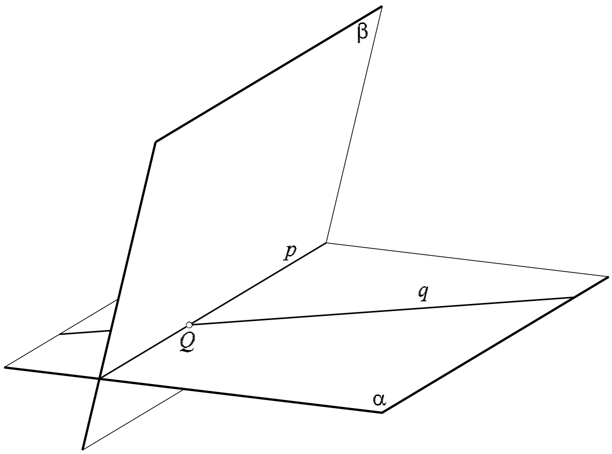
Ako pak obje ravnine α i β imaju zajedničku točku izvan pravca AB, tada bi se one morale poklapati, što je u suprotnosti s pretpostavkom da su α i β različite.

Imamo li na umu već danu definiciju mimoilaznih pravaca, možemo reći:

Teorem 3.4. *Postoje parovi mimoilaznih pravaca.*

DOKAZ. U skladu sa postulatom D_2, postoji četvorka nekomplanarnih točaka A, B, C, D. Prema tome su i pravci (spojnice) AB i CD nekomplanarni, što neposredno dokazuje tvrdnju (sl. 3.6). □

Teorem 3.5. *Označimo sa p presječnicu dviju ravnina α i β. Ako neki pravac q leži u ravnini α i probada β u točki Q, tada Q leži na presječnici p. Obrnuto, ako q siječe presječnicu p, tada q probada β (sl. 3.9).*



Sl. 3.9.

DOKAZ. Točka Q leži u ravnini β, a kako Q leži i na pravcu q, te leži i u ravnini α, a to znači na presječnici p ravnina α i β.

Obrnuto, ako q siječe p u točki Q, tada je ta točka zajednička za q i β. □

4.

Postulati uređaja i particije

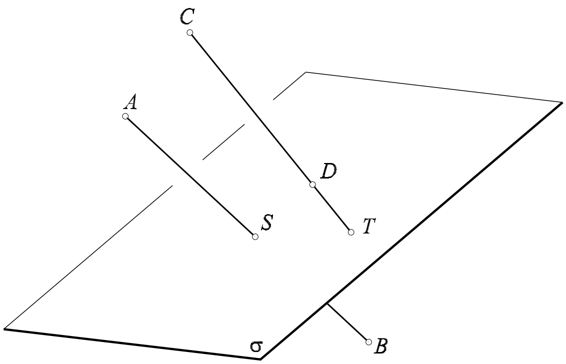
Definicija 4.1. Presiječemo li prostor nekom ravninom σ, tada skup točaka jednog od tih dvaju dijelova zajedno sa točkama ravnine σ, zovemo *poluprostorom*.

Ravninu σ zovemo *graničnom ravninom* ili stranicom poluprostora.

Točke poluprostora koje ne leže na graničnoj ravnini zovemo *unutarnjim točkama* poluprostora.

Dva različita poluprostora, koji imaju zajedničku graničnu ravninu zovu se *suprotnim (ili komplementarnim) poluprostorima*.

Ako su A i B unutarnje točke dvaju suprotnih poluprostora, tada kažemo da točke A i B leže sa *suprotnih strana granične ravnine* σ. Tada je točka S u kojoj pravac AB siječe zajedničku graničnu ravninu σ unutarnja točka dužine $\overline{AB}$ (sl. 4.1).



Sl. 4.1. Ravnina dijeli prostot na dva poluprostora.

Ako su pak C i D unutarnje točke jednog te istog poluprostora, tada za takve točke kažemo da leže s *iste strane granične ravnine* σ (sl. 4.1).

Poluprostor, koji je određen graničnom ravninom σ i jednom unutarnjom točkom A, označavamo sa σA.

Ako graničnu ravninu σ zadamo s tri (nekolinearne) točke B, C, D ili pravcem p i točkom D, tada takav poluprostor označavamo sa $(BCD)A$ odnosno sa $(pD)A$.

Definicija 4.2. Ako spojnica $\overline{AB}$ bilo kojih dviju točaka A, B figure F leži čitava u toj figuri, onda F zovemo *konveksnom figurom*.

Tako se na temelju dosadašnjih izlaganja lako vidi da je svaki *poluprostor konveksna figura*.

Na temelju definicije očito je da je presjek dviju konveksnih figura opet konveksna figura. Zato su i *presjeci poluprostora uvijek konveksne figure*.

Postulati uređaja i particije

U. *Svaki pravac posjeduje dva linearna uređaja, jedan suprotan drugom.*

P_1. *Svaki p ravnine ρ dijeli skup točaka te ravnine, koje ne leže na pravcu p, u dva (neprazna) dijela, takva da dvije točke A, B leže u različitim dijelovima ili u istom dijelu, već prema tome da li spojna dužina $\overline{AB}$ siječe, odnosno ne siječe pravac p.*

P_2. *Svaka ravnina σ dijeli skup točaka prostora, koje ne leže na σ, u dva (neprazna) dijela, takva da dvije točke A, B leže u različitim dijelovima, ili u istom dijelu, već prema tome da li spojna dužina $\overline{AB}$ siječe ili ne siječe ravninu σ.*

***

Promotrimo dalje nekoliko teorema koji su posljedica izloženih postulata:

Teorem 4.1. *Ako neki polupravac ima za početnu točku P na graničnoj ravnini σ i još prolazi unutarnjom točkom Q jednog od poluprostora, tada je svaka daljnja točka R tog polupravca unutarnja točka tog poluprostora.*

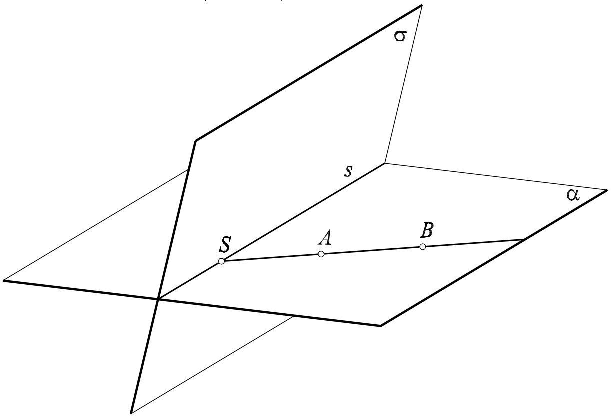
DOKAZ. Kako točka P leži na pravcu QR, ali ne pripada dužini $\overline{QR}$, ta dužina ne siječe graničnu ravninu σ. To znači da su točke Q i R unutarnje točke istog poluprostora. □

Kao neposredna posljedica ovog teorema slijedi:

Korolar 4.1. *Točka P, u kojoj pravac p siječe ravninu σ, dijeli taj pravac u dva polupravca koji leže u suprotnim poluprostorima granične ravnine σ.*

Teorem 4.2. *Presječnica s ravnine α i ravnine σ dijeli α na dvije poluravnine koje leže u suprotnim poluprostorima određenim graničnom ravninom σ (sl. 4.2).*

DOKAZ. Dvije točke A i B koje leže u α (ali ne na presječnici s) stoje s iste strane, odnosno s različitih strana pravca s već prema tome da li dužina $\overline{AB}$ ne siječe odnosno siječe pravac s (sl. 4.2).



Sl. 4.2. Poluravnine leže u različitim poluprostorima.

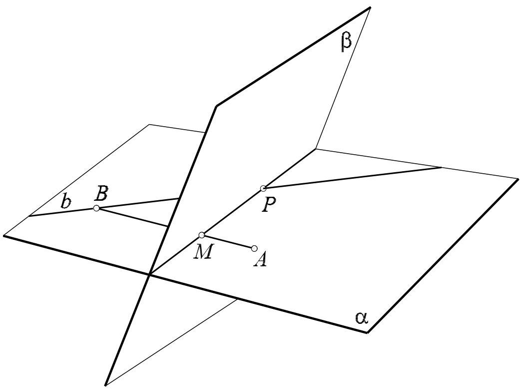
Tada dužina $\overline{AB}$ ne siječe, odnosno siječe σ i stoga se A i B nalaze također s jedne te iste strane ili sa suprotnih strana ravnine σ. □

Pokazali smo (Teorem 3.5) da dvije različite ravnine koje imaju zajedničke dvije točke imaju i zajednički jedan pravac (po kojem se sijeku) i nemaju niti jednu daljnju zajedničku točku.

Mogu li dvije ravnine imati samo jednu zajedničku točku?

Teorem 4.3. *Dvije različite ravnine α i β, koje imaju jednu zajedničku točku P, sijeku se u pravcu s koji prolazi tom točkom P.*

DOKAZ. Zadajmo u ravnini α točku A različitu od P i neka je b pravac koji prolazi kroz P, ali ne prolazi kroz A. Ako A i b leže također u β tvrdnja je dokazana.



Sl. 4.3. Dvije ravnine sijeku se po pravcu.

Točka A određuje poluprostor s graničnom ravninom β. Nadalje, točka P dijeli pravac b u dva polupravca od kojih jedan leži u suprotnom poluprostoru. Na tom polupravcu označimo točku B (sl. 4.3).

Dakle, točke A i B stoje sa suprotnih strana ravnine β i prema tome dužina $\overline{AB}$ (koja leži u α) probada ravninu β u točki M, koja pripada objema ravninama.

Ravnine α i β imaju dvije različite točke P i M zajedničke pa se prema teoremu 3.3 te dvije ravnine sijeku u pravcu PM. $\square$

Na temelju definicije incidencije i paralelnosti slijedi:

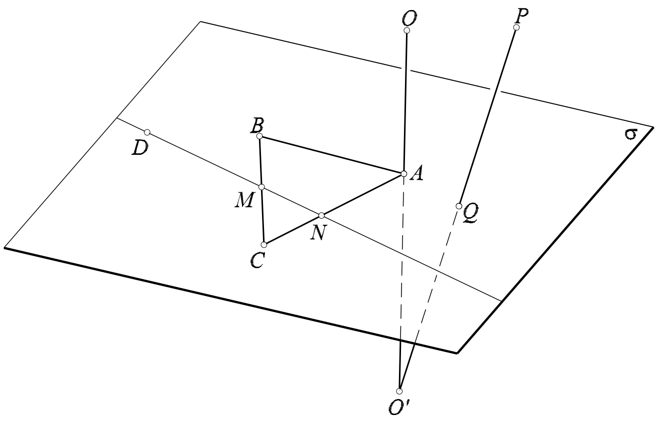
Teorem 4.4. *Dvije različite ravnine ili se sijeku uzduž jednog pravca ili su paralelne.*

Imamo dalje:

Teorem 4.5. *Ako neka figura F, koja nije pravac ili čitav prostor, ima svojstvo da spojni pravac bilo kojih dviju njenih točaka leži čitav u toj figuri, onda je ta figura ravnina.*

DOKAZ. Kako promatrana figura F nije pravac, možemo promatrati tri njene nekolinearne točke A, B i C. Tri pravca AB, BC i AC leže u F, pa onda i rub trokuta ABC.

Kroz svaku daljnju točku D ravnine $\sigma = ABC$, prolazi neki pravac koji siječe taj trokut u dvije različite točke M, N. Onda taj pravac leži u figuri F, što znači da je čitava ravnina σ dio od F (sl. 4.4).



Sl. 4.4. Ravnina sadrži sve spojnice svakog para svojih točaka, i to je jedina figura s tim svojstvom.

Dokažimo sad obratnu tvdrnju. Uzmimo da neka točka O, koja ne leži u ravnini σ, pripada figuri F. Prema pretpostavci, čitav pravac OA također leži u F. Zato u F leži i neka točka O' koja se nalazi u suprotnom poluprostoru od O s obzirom na ravninu σ.

Neka je dalje P bilo koja točka prostora izvan ravnine σ. Recimo da se ona nalazi u istom poluprostoru s točkom O. Spojimo tu točku s O'. $($Ako P leži u poluprostoru gdje i O', onda ćemo je spojiti s O.$)$ Dužina PO' siječe σ u nekoj točki Q. Onda bi pravac PO', jer sadrži dvije točke Q i O' figure F ležao čitav u F. To znači da bi svaka točka P prostora pripadala F, što je u suprotnosti s pretpostavkom.

Dakle, ravnina $\sigma = ABC$ sadrži sve točke od F, što znači da je dana figura F upravo ta ravnina. $\square$