I.

Prva MMO održana je 1959. g. u Rumunjskoj. Pored zemlje domaćina sudjelovale su još Bugarska, Čehoslovačka, DR Njemačka, Mađarska, Poljska i SSSR.

Zadaci

1. Dokazati da se razlomak $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ ne može skratiti ni za koji prirodan broj n.

2. Za koje realne realne brojeve x su istinite sljedeće jednakosti:

(a) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$;

(b) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=1$;

(c) $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=2$?

3. Neka je x neki kut, a realni brojevi a, b, c, $\cos x$ zadovoljavaju ovu jednakost

$$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0.$$

Napisati analognu kvadratnu jednakost za a, b, c, $\cos 2x$. Usporedi danu i dobivenu jednakost za slučaj $a=4$, $b=2$, $c=-1$.

4. Konstruirati pravokutan trokut čija duljina hipotenuze c je dana, pri čemu je poznato da je duljina težišnice povučene na c, geometrijska sredina duljina kateta.

5. U ravnini je dana dužina $\overline{AB}$ i unutar nje bilo koja točka M. Nad dužinama $\overline{AM}$ i $\overline{MB}$ kao stranicama konstruirani su kvadrati $AMCD$ i $MBEF$ koji se nalaze s iste strane pravca AB. Kružnice opisane oko ovih kvadrata, sa središtima P i Q, sijeku se u točkama M i N.

(a) Dokazati da pravci AF i BC prolaze kroz točku N.

(b) Dokazati da pravac MN prolazi kroz jednu te istu točku S, bez obzira koji položaj ima točka M.

(c) Naći geometrijsko mjesto polovišta dužina $\overline{PQ}$ kada se točka M giba po dužini $\overline{AB}$.

6. Dane su ravnine α i β koje se sijeku po pravcu p. U ravnini α dana je točka A, a u ravnini β točka C, tako da nijedna od tih točaka ne leži na pravcu p. Konstruirati u ravnini α točku B i u ravnini β točku D tako da četverokut $ABCD$ bude jednakokračan trapez $(AB \parallel CD)$ u koji se može upisati kružnica.

II.

Druga MMO održana je 1960. g. u Rumunjskoj na kojoj su uz domačina sudjelovale još Bugarska, Čehoslovačka, DR Njemačka i Mađarska.

Zadaci

1. Naći sve troznamenkaste brojeve koji pri dijeljenju s 11 daju broj jednak sumi kvadrata znamenaka polaznog broja.

2. Za koje realne brojeve x vrijedi nejednadžba

$$\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x+9?$$

3. Dan je pravokutan trokut ABC čija je hipotenuza duljine a, podijeljena na n jednakih dijelova (n neparan broj). Neka je α kut pod kojim se iz točke A vidi onaj od n dijelova koji sadrži polovište hipotenuze. Dokazati da je

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4nh}{(n^2-1)a};$$

gdje je h visina trokuta.

4. Konstruirati trokut ABC ako su poznati h_a, h_b i m_a (h_a i h_b su duljine visina iz A i B, a m_a duljina težišnice iz vrha A).

5. Dana je kocka $ABCDA'B'C'D'$.

(a) Naći geometrijsko mjesto svih polovišta dužina $\overline{XY}$, gdje je X točka dužine $\overline{AC}$ i Y točka dužine $\overline{B'D'}$.

(b) Naći geometrijsko mjesto polovišta Z dužina $\overline{XY}$ za koje je $|YZ| = 2|ZX|$.

6. Dan je jednakokračan trapez s osnovicama a, b i visinom h.

(a) Konstruirati točku P na osi simetrije trapeza iz koje se oba njegova kraka vide pod pravim kutom.

(b) Naći udaljenost točke P od jedne od osnovica trapeza.

(c) Uz koje uvjete se točka P može konstruirati (promotriti sve moguće slučajeve).

7. Dan je pravilni kružni stožac u koji je upisana kugla. Oko te kugle opisan je jednakokračan kružni valjak čija osnovica leži u ravnini osnovice danog stošca.

Neka je V_1 volumen stošca i V_2 volumen valjka.

(a) Dokazati da nije moguća jednakost $V_1 = V_2$.

(b) Naći najmanji broj k za koji je $V_1 = kV_2$ i u tom slučaju konstruiraj kut kod vrha osnog presjeka stošca.

III.

Treća MMO održana je 1961. g. u Mađarskoj i uz prošlogodišnje sudionice bila je prisutna i Poljska.

Zadaci

1. Riješiti sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b^2 \\ xy &= z^2, \end{aligned}$$

gdje su a i b dani brojevi. Odrediti uvjete na a i b uz koje sistem ima pozitivna i međusobno različita rješenja.

2. Neka su a, b i c duljine stranica trokuta površine S. Dokazati da je

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}.$$

Kada vrijedi jednakost?

3. Riješiti jednadžbu $\cos^n x - \sin^n x = 1$, gdje je n prirodan broj.

4. U unutrašnjosti trokuta $P_1P_2P_3$ dana je točka P. Neka su Q_1, Q_2, Q_3, tim redom, točke presjeka pravaca P_1P, P_2P, P_3P sa suprotnim stranicama. Dokazati da među kvocijentima $\frac{|P_1P|}{|PQ_1|}$, $\frac{|P_2P|}{|PQ_2|}$, $\frac{|P_3P|}{|PQ_3|}$, postoji barem jedan koji nije veći od 2 i barem jedan koji nije manji od 2.

5. Konstruirati trokut ABC ako je zadano: $|AC| = b$, $|AB| = c$ i $\sphericalangle BMA = \omega$, $(\omega < 90^\circ)$, gdje je M polovište dužine $\overline{BC}$. Dokazati da zadatak ima rješenje ako i samo ako je

$$b \cdot \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} \leqslant c < b.$$

Kada vrijedi znak jednakosti?

6. Dana je ravnina ϵ i s jedne njezine strane tri nekolinearne točke A, B i C, takve da ravnina određena s te tri točke nije paralelna s ravninom ϵ. U ravnini ϵ uzete su bilo koje tri točke A', B' i C'. Točke L, M i N su, tim redom, polovišta dužina $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ i $\overline{CC'}$, a G je težište trokuta LMN (ako on nije degeneriran). Odrediti geometrijsko mjesto točaka G, ako se točke A', B' i C' gibaju nezavisno po ravnini ϵ.

IV.

Četvrta MMO održana je 1962. g. u Čehoslovačkoj i tada su se ponovo okupile sve države kao na početku.

Zadaci

1. Odrediti najmanji prirodan broj n s ovim svojstvima:

(a) u dekadskom sustavu njegov zapis završava znamenkom 6,

(b) ako se posljednja znamenka 6 premjesti ispred ostalih znamenaka dobije se broj koji je 4 puta veći.

2. Odrediti sve realne brojeve x za koje je

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}.$$

3. Dana je kocka $ABCDA'B'C'D'$. $ABCD$ i $A'B'C'D'$ su njezina donja i gornja osnovica i $AA' \parallel BB' \parallel CC' \parallel DD'$. Točka X giba se konstantnom brzinom po bridovima kvadrata $ABCD$ u smjeru $ABCDA$; točka Y giba se istom brzinom po bridovima kvadrata $B'C'CB$ u smjeru $B'C'CBB'$. Točke X i Y počinju se gibati u istom trenutku i to X polazi iz A, a Y iz B'. Naći i nacrtati geometrijsko mjesto polovišta dužina $\overline{XY}$.

4. Riješiti jednadžbu
$$\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1.$$

5. Na kružnici k zadane su tri točke A, B, C. Pomoću ravnala i šestara konstruirati četvrtu točku D, takvu da se u četverokut $ABCD$ može upisati kružnica.

6. Dan je jednakokračan trokut ABC, kojemu je polumjer opisane kružnice jednak r, a polumjer upisane kružnice ρ. Dokazati da je udaljenost d od središta opisane do središta upisane kružnice jednaka
$$d = \sqrt{r(r-2\rho)}.$$

7. Tetraedar $SABC$ ima svojstvo da postoji pet različitih sfera koje dodiruju pravce SA, SB, SC, AB, BC, CA ako i samo ako je on pravilan. Dokazati!

V.

Peta MMO održana je 1963. g. u Poljskoj na kojoj je sudjelovalo osam država. Tada je prvi put sudjelovala Jugoslavija, a Valerijan Bjelik iz Vinkovaca bio je predstavnik Hrvatske.

Zadaci

1. Odrediti sva realna rješenja jednadžbe
$$\sqrt{x^2-p} + 2\sqrt{x^2-1} = x,$$
gdje je p realan broj.

2. Odrediti u prostoru geometrijsko mjesto vrhova pravog kuta čiji jedan krak prolazi kroz danu točku A, a drugi ima bar jednu zajedničku točku s danom dužinom $\overline{BC}$.

3. U danom n-terokutu svi unutarnji kutovi su jednaki, a duljine uzastopnih stranica zadovoljavaju ovaj uvjet: $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$. Dokazati da je
$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n.$$

4. Odrediti sva rješenja x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sustava jednadžbi
$$x_5 + x_2 = yx_1 \tag{1}$$
$$x_1 + x_3 = yx_2 \tag{2}$$
$$x_2 + x_4 = yx_3 \tag{3}$$
$$x_3 + x_5 = yx_4 \tag{4}$$
$$x_4 + x_1 = yx_5 \tag{5}$$

gdje je y realan parametar.

5. Dokazati jednakost $\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}$.

6. Učenici A, B, C, D i E sudjelovali su na nekom natjecanju. Pokušavajući pogoditi rezultate natjecanja, netko je pretpostavio da će redoslijed biti A, B, C, D, E, ali on nije pogodio točno mjesto nijednog učenika niti ijedan par učenika koji su se plasirali jedan iza drugog. Netko drugi pretpostavio je da će rezultat biti D, A, E, C, B i on je pogodio točno mjesto dvoje učenika, a isto tako i dva para učenika koji su se plasirali jedan iza drugog. Koji je bio rezultat ovog natjecanja?

VI.

Šesta MMO održana je 1964. g. u SSSR-u. Među devet država po prvi put je sudjelovala Mongolija.

Zadaci

1. (a) Odrediti sve prirodne brojeve n, takve da je $2^n - 1$ djeljivo sa 7.

(b) Dokazati da $2^n + 1$ nije djelivo sa 7 niti za jedan prirodan broj n.

2. Ako su a, b i c duljine stranica trokuta, pokazati da je

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leqslant 3abc.$$

3. U trokut ABC, sa stranicama duljina a, b i c upisan je krug i na njega su povučene tangente paralelne stranicama trokuta. Te tangente odsijecaju od trokuta ABC tri nova trokuta. U svaki od njih upisan je krug. Izračunati sumu površina sva četiri kruga.

4. Sedamnaest znanstvenika se dopisuju, svaki sa svakim. Oni se dopisuju na tri teme. Svaki par se dopisuje samo na jednu temu. Dokazati da postoje bar tri znanstvenika koji se međusobno dopisuju na istu temu.

5. U ravnini je dano 5 točaka. Između pravaca koji su određeni tim točkama svaka dva su različita i nikoja dva nisu paralelna niti okomita. Kroz svaku točku konstruirane su sve okomice takve da je svaka od njih okomita na neki pravac koji je određen s po dvije od 4 preostale točke. Odrediti najveći mogući broj presječnih točaka tih okomica, ne računajući dane točke.

6. Dan je tetraedar $ABCD$. Vrh D spojen je s težištem D_1 strane ABC. Pravci kroz točke A, B i C paralelni s DD_1 sijeku ravnine nasuprotnih strana u točkama A_1, B_1 i C_1. Dokazati da je volumen tetraedra $ABCD$ tri puta manji od volumena tetraedra $A_1B_1C_1D_1$. Da li tvrdnja vrijedi ako se uzme bilo koja točka D_1 unutar trokuta ABC?

VII.

Sedma MMO održana je u DR Njemačkoj 1965. g. Među deset država sudionica bila je po prvi put i Finska. Iz Hrvatske je sudjelovao Šime Ungar.

Zadaci

1. Naći sve realne brojeve $x \in [0, 2\pi]$ za koje vrijedi nejednakost

$$2\cos x \leqslant |\sqrt{1+\sin 2x} - \sqrt{1-\sin 2x}| \leqslant \sqrt{2}.$$

2. Dan je sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ x_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0, \end{aligned}$$

čiji koeficijenti zadovoljavaju ove uvjete:

(a) a_{11}, a_{22}, a_{33} su pozitivni;

(b) svi ostali koeficijenti su negativni;

(c) u svakoj jednadžbi je suma koeficijenata pozitivna.

Dokazati da je $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ jedino rješenje ovog sustava.

3. Dan je tetraedar $ABCD$. Brid $\overline{AB}$ ima duljinu a, $\overline{CD}$ ima duljinu b, udaljenost između mimosmjernih pravaca AB i CD je d, dok je kut između tih pravaca jednak ω. Ravnina π, koja je paralelna s pravcima AB i CD dijeli tetraedar na dva dijela. Izračunati omjer njihovih volumena ako se zna da je omjer udaljenosti od AB do π i udaljenosti od CD do π jednak k.

4. Odrediti četiri realna broja x_1, x_2, x_3, x_4 takva da je suma svakog od njih s produktom preostalih, jednaka 2.

5. Neka je u trokutu OAB $\sphericalangle BOA = \alpha$ $(\alpha < 90^\circ)$. Kroz bilo koju točku $M \neq O$, povučene su okomice MP na OA i MQ na OB. Neka je H ortocentar trokuta OPQ. Odrediti geometrijsko mjesto točaka H ako je

(a) M na stranici $\overline{AB}$;

(b) M unutar trokuta AOB.

6. U ravnini je dano n $(n \geqslant 3)$ točaka. Neka je d maksimum udaljenosti od po dvije od danih točaka. Dokazati da ima najviše n parova danih točaka čija je udaljenost jednaka d.

VIII.

Osma MMO održana je u Bugarskoj 1966. g. i ona je okupila devet država. Iz Hrvatske je sudjelovao Mirko Primc.

Zadaci

1. Na olimpijadi su bila dana 3 zadatka A, B, C. Između učenika njih 25 je riješilo barem jedan od tih zadataka. Onih učenika koji su riješili zadatak B, a nisu A, bilo je 2 puta više nego onih koji su riješili zadatak C, a nisu riješili A. Onih učenika koji su riješili samo zadatak A bilo je za jedan više od onih koji su pored A riješili još neki zadatak. Od učenika koji su riješili samo jedan zadatak, pola ih je riješilo zadatak A. Koliko učenika je riješilo samo zadatak B.

2. Ako su a, b, c duljine stranica i α, β, γ nasuprotni kutovi trokuta kod kojeg je $a + b = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}(a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta)$, dokazati da je taj trokut jednakokračan.

3. Dokazati da je suma udaljenosti od središta opisane sfere oko pravilnog tetraedra do njegovih vrhova manja od sume udaljenosti od bilo koje druge točke do vrhova tetraedra.

4. Dokazati jednakost

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x,$$

gdje je n prirodan broj i $x \neq \frac{\lambda\pi}{2^k}$, $(k = 0, 1, 2, \ldots, n$ i λ cijeli broj).

5. Riješiti sustav

$$\begin{aligned}
|a_1 - a_2|x_2 + |a_1 - a_3|x_3 + |a_1 - a_4|x_4 &= 1\\
|a_2 - a_1|x_1 + |a_2 - a_3|x_3 + |a_2 - a_4|x_4 &= 1\\
|a_3 - a_1|x_1 + |a_3 - a_2|x_2 + |a_3 - a_4|x_4 &= 1\\
|a_4 - a_1|x_1 + |a_4 - a_2|x_2 + |a_4 - a_3|x_4 &= 1,
\end{aligned}$$

gdje su a_1, a_2, a_3, a_4 dani, međusobno različiti realni brojevi.

6. Neka su M, K, L točke koje se nalaze redom na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ trokuta ABC, pri čemu ni jedna od točaka M, K, L nije vrh trokuta ABC. Dokazati da površina barem jednog od trokuta AML, BKM, CLK nije veća od $\frac{1}{4}$ površine trokuta ABC.

IX.

Deveta MMO održana je u Cetinji u Jugoslaviji 1967. g. na kojoj je sudjelovalo trinaest država, među kojima po prvi put Francuska, Italija, Švedska i Velika Britanija. Iz Hrvatske je sudjelovao Zvonko Kolarić.

Zadaci

1. U paralelogramu $ABCD$ trokut ABD je šiljastokutan. Neka je $|AB| = a$, $|AD| = 1$ i $\sphericalangle DAB = \alpha$. Dokazati da krugovi K_A, K_B, K_C i K_D polumjera 1, sa središtima u A, B, C i D, tim redom, pokrivaju paralelogram ako i samo ako je $a \leqslant \cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha$.

2. Dan je tetraedar u kojem je duljina točno jednog brida veća od 1. Dokazati da njegov volumen nije veći od $\frac{1}{8}$.

3. Neka su k, m i n prirodni brojevi takvi da je $m + k + 1$ prosti broj veći od $n + 1$. Neka je $C_s = s(s+1)$. Dokazati da je produkt $(C_{m+1} - C_k)(C_{m+2} - C_k)\ldots(C_{m+n} - C_k)$ djeljiv produktom $C_1 C_2 \ldots C_n$.

4. Dani su šiljastokutni trokuti $A_0B_0C_0$ i $A_1B_1C_1$. Konstruirati trokut ABC koji je sličan trokutu $A_1B_1C_1$ i opisan oko trokuta $A_0B_0C_0$, tako da je $C_0 \in \overline{AB}$, $A_0 \in \overline{BC}$, $B_0 \in \overline{CA}$. Konstruirati trokut koji ima maksimalnu površinu.

5. Dan je niz

$$\begin{aligned} C_1 &= a_1 + a_2 + \ldots + a_8 \\ C_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_8^2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_n &= a_1^n + a_2^n + \ldots + a_8^n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

gdje su $a_1, a_2, \ldots, a_8$ realni brojevi koji nisu svi jednaki nuli. Među članovima ovog niza postoji beskonačno mnogo jednakih nuli. Naći sve n za koje je $C_n = 0$.

6. Na natjecanju koje je trajalo n dana, podijeljeno je m medalja. Prvog dana dodijeljena je jedna medalja i još $\frac{1}{7}$ preostalih $m-1$ medalja. Drugog dana su dodijeljene dvije medalje i još $\frac{1}{7}$ preostalih (do tada) medalja, itd. Konačno, n-tog, posljednjeg dana dodijeljeno je preostalih n medalja. Koliko dana je trajalo natjecanje i koliko je medalja podijeljeno?

X.

Deseta MMO održana je u SSSR-u 1968. g. na kojoj je bilo dvanaest država sudionica. Iz Hrvatske su sudjelovali Zvonko Kolarić, Branko Najman, nagrađen brončanom medaljom, i Dragutin Svrtan.

Zadaci

1. Dokazati da postoji točno jedan trokut čije duljine stranica su uzastopni prirodni brojevi, a jedan od kutova je dva puta veći od jednog od preostala dva.

2. Odrediti sve prirodne brojeve x čiji je produkt znamenaka (u dekadskom sustavu) jednak $x^2 - 10x - 22$.

3. Dan je sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} ax_1^2 + bx_1 + c &= x_2 \\ ax_2^2 + bx_2 + c &= x_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ax_{n-1}^2 + bx_{n-1} + c &= x_n \\ ax_n^2 + bx_n + c &= x_1, \end{aligned}$$

gdje su a, b i c realni brojevi i $a \neq 0$. Dokazati da

(a) za $(b-1)^2 - 4ac < 0$ sustav nema realno rješenje;

(b) za $(b-1)^2 - 4ac = 0$ sustav ima točno jedno realno rješenje;

(c) za $(b-1)^2 - 4ac > 0$ sustav ima više od jednog realnog rješenja.

4. Dokazati da u svakom tetraedru postoji vrh, takav da se od bridova koji iz njega izlaze može konstruirati trokut.

5. Neka je $a > 0$ realan broj i $f(x)$ realna funkcija definirana za svaki realan x koja zadovoljava uvjet

$$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - (f(x))^2},$$

za svaki x.

(a) Dokazati da je funkcija f periodična, tj. da postoji takav realan broj $b > 0$ da je za svaki x, $f(x+b) = f(x)$.

(b) Za $a = 1$ naći primjer takve funkcije $f \not\equiv$ konst.

6. Neka je $\lfloor x \rfloor$ najveći cijeli broj koji nije veći od x. Za svaki prirodan broj n odrediti sumu

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor + \ldots.$$

XI.

Rumunjska je bila domaćin jedanaeste MMO koja je održana 1969. g. Broj država – učesnica se povećao na četrnaest. Po prvi put su sudjelovale Belgija i Nizozemska. Iz Hrvatske su sudjelovali Zvonko Čerin i Damir Henč, nagrađen srebrnom medaljom.

Zadaci

1. Dokazati da postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva a sa svojstvom da je za svaki prirodan broj n, broj $z = n^4 + a$, složen.

2. Neka su a_1, $a_2, \ldots,$ a_n realne konstante, x realna varijabla i

$$f(x) = \cos(a_1 + x) + \frac{\cos(a_2 + x)}{2} + \frac{\cos(a_3 + x)}{2^2} + \ldots + \frac{\cos(a_n + x)}{2^{n-1}}.$$

Ako je $f(x_1) = f(x_2) = 0$ dokazati da je $x_1 - x_2 = m\pi$, gdje je m cijeli broj.

3. Za $k = 1, 2, 3, 4, 5$ naći nužan i dovoljan uvjet koji mora zadovoljavati broj $a > 0$ da bi postojao tetraedar čijih k bridova ima duljinu a, dok preostalih $6 - k$ bridova ima duljinu 1.

4. Dužina $\overline{AB}$ je promjer kružnice γ. Točka C (različita od A i B) leži na γ. Točka D je ortogonalna projekcija točke C na $\overline{AB}$. Tri kružnice γ_1, γ_2, γ_3 dodiruju $\overline{AB}$ tako da je γ_1, upisana u trokut ABC, a γ_2 i γ_3 dodiruju dužinu $\overline{CD}$ i kružnicu γ. Dokazati da γ_1, γ_2, γ_3 imaju i drugu zajedničku tangentu.

5. U ravnini je dano n $(n > 4)$ točaka, od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu. Dokazati da postoji barem $\binom{n-3}{2}$ konveksnih četverokuta koji imaju vrhove u četiri dane točke.

6. Dokazati da, ako je $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_1y_1 - z_1^2 > 0$, $x_2y_2 - z_2^2 > 0$, vrijedi nejednakost

$$\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \leqslant \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2}.$$

Naći nužne i dovoljne uvjete uz koje vrijedi jednakost.

XII.

Na dvanaestoj MMO, koja je održana 1970. g. u Mađarskoj, sudjelovalo je četrnaest zamalja, među kojima Austrija po prvi put. Iz Hrvatske je bio Damir Henč.

Zadaci

1. Dan je trokut ABC. Neka je M unutarnja točka stranice $\overline{AB}$. Neka su, nadalje, r_1, r_2, r – polumjeri kružnica, upisanih, tim redom, u trokute AMC, BMC, ABC i ρ_1, ρ_2, ρ – polumjeri kružnica koje:

(a) leže unutar kuta BCA;

(b) izvana su upisane, tim redom, u trokute AMC, MBC, ABC.

Dokazati da je

$$\frac{r_1 r_2}{\rho_1 \rho_2} = \frac{r}{\rho}.$$

2. Neka su a, b, n – prirodni brojevi veći od 1. Brojevi a i b su baze dvaju brojevnih sustava. Neka brojevi A_n i B_n imaju jednak prikaz $x_n x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_1 x_0$ u sustavima s osnovama a i b, pri čemu je $x_n \neq 0$ i $x_{n-1} \neq 0$. Obilježimo s A_{n-1} i B_{n-1} brojeve koji se dobivaju kada se prva znamenka x_n izostavi. Dokazati da je $a > b$ ako i samo ako je

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} < \frac{B_{n-1}}{B_n}.$$

3. Niz realnih brojeva a_0, a_1, a_2,..., a_n,... zadovoljava ovaj uvjet

$$1 = a_0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant \ldots \tag{1}$$

Niz b_1, $b_2, \ldots, b_n, \ldots$ definiran je na ovaj način:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{a_k}}.$$

Dokazati:

(a) za svaki n je $0 \leqslant b_n < 2$;

(b) za dani c, takav da je $0 \leqslant c < 2$, postoji niz a_0, a_1, $a_2, \ldots, a_n, \ldots$ koji zadovoljava uvjet (1) i pritom je $b_n > c$ za beskonačno indeksa n.

4. Naći sve prirodne brojeve n takve da se skup $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ može podijeliti na dva podskupa tako da produkt svih elemenata jednog od njih bude jednak produktu svih elemenata drugog skupa.

5. U tetraedru $ABCD$ je $BD \perp CD$ i nožište okomice iz vrha D na ravninu trokuta ABC, podudara se s ortocentrom tog trokuta. Dokazati da je

$$(|AB| + |BC| + |AC|)^2 \leqslant 6(|AD|^2 + |BD|^2 + |CD|^2).$$

Za koje tetraedre vrijedi jednakost?

6. U ravnini je dano 100 točaka od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu. Promatrajmo sve moguće trokute s vrhovima u tim točkama. Dokazati da među njima ima najviše 70% šiljastokutnih trokuta.

XIII.

Trinaesta MMO održana je 1971. g. u Čehoslovačkoj, a sudjelovalo je petnaest država, po prvi put je bila ekipa iz Kube. Iz Hrvatske je bio Marko Tadić.

Zadaci

1. Dokažite da za svake realne brojeve a_1, a_2,..., a_n vrijedi nejedankost

$$\begin{aligned}(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)\cdots(a_1 - a_n)&\\ + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3)\cdots(a_2 - a_n)&+\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\ + (a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1}) &\geqslant 0\end{aligned}$$

ako je $n = 3$ i $n = 5$, a ne vrijedi ni za koji drugi $n > 2$.

2. Dan je konveksan poliedar P_1 s 9 vrhova A_1, $A_2, \ldots, A_9$. Neka su P_2, $P_3, \ldots, P_9$ poliedri koji se dobivaju translacijama poliedra P_1 koje točku A_1 premještaju u A_2, $A_3, \ldots, A_9$, tim redom. Dokazati da bar dva od poliedara P_1, $P_2, \ldots, P_9$ imaju barem jednu zajedničku unutarnju točku.

3. Dokazati da niz $2^n - 3$, $n = 1, 2, \ldots$ ima beskonačno mnogo brojeva takvih da su svaka dva od njih relativno prosta.

4. Svaka strana tetraedra $ABCD$ je šiljastokutan trokut. Promatrajmo zatvorene poligonalne linije $XYZTX$ određene na sljedeći način: točka X je na bridu $\overline{AB}$, različita od A i B. Analogno, Y, Z, T su unutarnje točke bridova $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, tim redom.

(a) Ako je $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD \neq \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA$, pokazati da među tim poligonalnim linijama nema najkraće.

(b) Ako je $\sphericalangle DAB + \sphericalangle BCD = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA$, onda postoji beskonačno mnogo takvih poligonalnih linija s minimalnom duljinom i ona je jednaka $2|AC| \sin \frac{\alpha}{2}$, gdje je $\alpha = \sphericalangle CAB + \sphericalangle DAC + \sphericalangle DAB$. Dokazati!

5. Dokazati da za svaki prirodan broj m postoji neprazan konačan skup S točaka u ravnini s ovim svojstvom: "svaka točka iz skupa S je na jediničnoj udaljenosti od točno m drugih točaka iz S."

6. Promatrajmo kvadratnu tablicu

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{array}$$

koja sadrži nenegativne cijele brojeve i ima ovo svojstvo: kad god je $a_{ij} = 0$, suma elemenata i-tog retka i j-tog stupca je

$$a_{i1} + a_{i2} + \ldots + a_{1n} + a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj} \geqslant n.$$

Dokazati da je suma svih elemenata u tablici $\geqslant \dfrac{n^2}{2}$.

XIV.

Na četrnaestoj MMO, koja je održana u Poljskoj 1972. g., sudjelovalo je četrnaest država. Iz Hrvatske su bili Uroš Milutinović, Ivan Mirković, nagrađen brončanom medaljom, i Marko Tadić.

Zadaci

1. Dokazati da se svaki skup od bilo kojih deset različitih dvoznamenkastih prirodnih brojeva može podijeliti na dva disjunktna podskupa tako da sume brojeva u oba podskupa budu jednake.

2. Dokazati da je sljedeća tvrdnja istinita za svaki prirodan broj $n \geqslant 4$: svaki tetivan četverokut može se podijeliti na n tetivnih četverokuta.

3. Dokazati da je za svaka dva nenegativna cijela broja m i n broj

$$\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$$

cijeli $(0! = 1)$.

4. Naći sva rješenja $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ sistema nejednadžbi:

$$\begin{aligned}
(x_1^2 - x_3x_5)(x_2^2 - x_3x_5) &\leqslant 0\\
(x_2^2 - x_4x_1)(x_3^2 - x_4x_1) &\leqslant 0\\
(x_3^2 - x_5x_2)(x_4^2 - x_5x_2) &\leqslant 0\\
(x_4^2 - x_1x_3)(x_5^2 - x_1x_3) &\leqslant 0\\
(x_5^2 - x_2x_4)(x_1^2 - x_2x_4) &\leqslant 0.
\end{aligned}$$

5. Neka su f i g realne funkcije, definirane za svaki realan broj, takve da je

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)g(y)$$

za svaki x i y. Ako funkcija f nije identički jednaka nuli i ako je $|f(x)| \leqslant 1$ za svaki x, dokazati da je onda $|g(y)| \leqslant 1$ za svaki y.

6. Dane su četiri različite paralelne ravnine. Dokazati da postoji pravilan tetraedar koji ima po jedan vrh u svakoj od danih ravnina.

XV.

Petnaesta MMO održana je 1973. g. u SSSR-u na kojoj je sudjelovalo šesnaest država. Predstavnici Hrvatske bili su Uroš Milutinović, Ivan Mirković, svaki od njih nagrađen brončanom medaljom, i Siniša Vrećica.

Zadaci

1. Točka O nalazi se na pravcu l; $\overrightarrow{OP}_1$, $\overrightarrow{OP}_2, \ldots, \overrightarrow{OP}_n$ su jedinični vektori takvi da se točke P_1, $P_2, \ldots, P_n$ nalaze s iste strane pravca l. Ako je n neparan broj, dokazati da je

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \ldots + \overrightarrow{OP_n}| \geqslant 1,$$

gdje je $|\overrightarrow{OM}|$ oznaka modula vektora $\overrightarrow{OM}$.

2. Ispitati da li postoji konačan skup od M točaka u prostoru, koje nisu sve u istoj ravnini, takav da za svake dvije točke A i B skupa M postoje druge dvije točke C i D skupa M takve da su pravci AB i CD paralelni i različiti.

3. Naći najmanju vrijednost izraza $a^2 + b^2$, gdje su a i b realni brojevi, za koje jednadžba $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ ima bar jedno realno rješenje.

4. Vojnik treba provjeriti da li u području koje ima oblik jednakostraničnog trokuta (uključujući i njegovu granicu) ima mina. Domet njegovog detektora jednak je polovici duljine visine trokuta. Vojnik polazi iz jednog vrha trokuta. Kojim putem se on mora kretati da bi obavio zadatak, a da pritom prijeđe put najmanje moguće duljine.

5. Dan je neprazan skup G funkcija realne varijable x oblika $f(x) = ax + b$, gdje su $a \neq 0$ i b realni brojevi, koje zadovoljava ju ove uvjete:

1° ako su f, $g \in G$, onda je $g \circ f \in G$, gdje je $(g \circ f)(x) = g(f(x))$;

2° ako je $f \in G$, $f(x) = ax + b$, onda je inverzna funkcija $f^{-1} \in G$, gdje je

$$f^{-1}(x) = \frac{x - b}{a};$$

3° za svako $f \in G$ postoji x_f, takvo da je $f(x_f) = x_f$.

Dokazati da postoji realan broj k takav da je $f(k) = k$ za svako $f \in G$.

6. Neka su a_1, $a_2, \ldots, a_n$ dani pozitivni realni brojevi i q realan broj, $0<q<1$. Naći n realnih brojeva b_1, $b_2, \ldots, b_n$ takvih da bude ispunjeno:

(a) $a_k < b_k$, za $k = 1, 2, \ldots, n$;

(b) $q < \dfrac{b_{k+1}}{b_k} < \dfrac{1}{q}$, za $k = 1, 2, \ldots, n-1$;

(c) $b_1 + b_2 + \ldots + b_n < \dfrac{1+q}{1-q}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$.