XXX.

Na 30. MMO koja je održana u Njemačkoj, u Braunschweigu, 1989. g. sudjelovale su 52 države, po prvi put Venezuela, Indonezija i Tajland.

Zadaci

1. Dokazati da se skup $\{1, 2, \ldots, 1989\}$ može podijeliti na 117 disjunktnih podskupova A_1, $A_2, \ldots, A_{117}$ za koje vrijedi:

(a) A_i ima 17 elemenata za $i = 1, 2, \ldots, 117$;

(b) suma elemenata u svakom A_i je jednaka, za $i = 1, 2, \ldots, 117$.

2. Dan je šiljastokutan trokut ABC. Simetrale unutrašnjih kutova A, B, C sijeku opisanu kružnicu tom trokutu još u točkama A_1, B_1, C_1, tim redom. Neka je A_0 točka presjeka pravca AA_1 sa simetralama vanjskih kutova uz vrhove B i C. Točke B_0 i C_0 su određene analogno. Dokazati da je:

(a) površina trokuta $A_0B_0C_0$ dva puta veća od površine šesterokuta $AC_1BA_1CB_1$;

(b) površina trokuta $A_0B_0C_0$ bar četiri puta veća od površine trokuta ABC.

3. Neka su n i k pozitivni cijeli brojevi i S skup od n točaka u ravnini tako da vrijedi:

(i) nikoje tri točke iz S nisu kolinearne;

(ii) za svaku točku P iz S postoji barem k različitih točaka is S koje su jednako udaljene od P.

Pokazati da je $0 < k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

4. Konveksni četverokut $ABCD$ ima ova dva svojstva:

(i) za duljine stranica $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ vrijedi $|AB| = |AD| + |BC|$;

(ii) postoji točka P unutar četverokuta, čija udaljenost od pravca CD je jednaka h, takva da je $|AP| = h + |AD|$ i $|BP| = h + |BC|$.

Pokazati da vrijedi nejednakost

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{|AD|}} + \frac{1}{\sqrt{|BC|}}.$$

5. Dokazati da za svaki pozitivan cijeli broj n postoji n uzastopnih pozitivnih cijelih brojeva, takvih da nijedan od njih nije cjelobrojna potencija prostog broja.

6. Kažemo da permutacija $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n})$ skupa $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, gdje je n pozitivan cijeli broj, ima svojstvo P ako je $|x_i - x_{i+1}| = n$ za barem jedan i iz skupa $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$.

Dokazati da je za svaki n, broj permutacija koje imaju svojstvo P veći nego broj onih koje to svojstvo nemaju.

XXXI.

Na 31. MMO, koja je održana u Kini 1990. g., iz Hrvatske su sudjelovali Alen Selimbegović, Miroslav Šilović, nagrađen srebrnom medaljom.

Zadaci

1. Tetive $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ sijeku se u točki E unutar dane kružnice. Neka je M unutarnja točka dužine $\overline{BE}$. Tangenta u točki E kružnice kroz točke D, E i M siječe pravac BC u F i AC u G. Ako je $\dfrac{|AM|}{|AB|} = t$, naći $\dfrac{|EG|}{|EF|}$ u zavisnosti od t.

2. Na kružnici je dan skup E od $2n-1$ ($n \geqslant 3$) različitih točaka, pri čemu je točno k od njih obojeno crnom bojom. Za bojenje točaka kažemo da je "dobro" ako postoje dvije crne točke između kojih se u unutrašnjosti jednog od odgovarajućih lukova koji te točke određuju, nalazi točno n točaka iz E.

Naći najmanji broj k za koji je svako bojenje skupa E "dobro".

3. Odrediti sve cijele brojeve $n > 1$, takve da je $\dfrac{2^n+1}{n^2}$ cijeli broj.

4. Neka je $\mathbf{Q}^+$ skup pozitivnih racionalnih brojeva. Konstruirati funkciju $f : \mathbf{Q}^+ \longrightarrow \mathbf{Q}^+$ takvu da vrijedi

$$f(xf(y)) = \frac{f(x)}{y}$$

za sve x, y iz $\mathbf{Q}^+$.

5. Dan je pozitivan cijeli broj n_0. Igrači A i B naizmjence biraju cijele brojeve n_1, n_2, n_3,... prema sljedećim pravilima: znajući broj n_{2k}, igrač A može izabrati bilo koji cijeli broj n_{2k+1} takav da je $n_{2k} \leqslant n_{2k+1} \leqslant n_{2k}^2$; znajući n_{2k+1}, igrač B može izabrati bilo koji broj n_{2k+2} takav da je $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ pozitivna potencija prostog broja (ili broja 1). Igrač A pobjeđuje kada izabere broj 1990, a igrač B pobjeđuje kada izabere broj 1. Za koje n_0

(a) A može pobijediti;

(b) B može pobijediti;

(c) nijedan igrač nema pobjedničku strategiju?

6. Dokazati da postoji konveksan 1990-kut sa svojstvima:

(a) svi kutovi mnogokuta su jednaki, i

(b) duljine stranica su jednake 1^2, 2^2, $3^2, \ldots, 1989^2$, 1990^2, u nekom poretku.

XXXII.

Godine 1991. MMO je održana u Švedskoj, u gradiću Sigtuma, na kojoj je sudjelovalo 55 država, po prvi put Bahrein i Makao. Iz Hrvatske je bila Kristina Rogale, nagrađena brončanom medaljom.

Zadaci

1. Dan je trokut $ABCD$. Neka su A', B', C' točke presjeka simetrala kutova CAB, ABC, BCA, redom, sa stranicama $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, a je I središte upisane mu kružnice. Dokazati da je

$$\frac{1}{4} < \frac{|AI| \cdot |BI| \cdot |CI|}{|AA'| \cdot |BB'| \cdot |CC'|} \leqslant \frac{8}{27}.$$

2. Neka je n cijeli broj, $n > 6$ i a_1, $a_2, \ldots, a_k$ su svi prirodni brojevi manji od n koji su relativno prosti s n. Ako je

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_k - a_{k-1} > 0,$$

dokazati da je n ili prost broj ili potencija broja 2.

3. Neka je $S = \{1, 2, 3, \ldots, 280\}$. Naći najmanji prirodan broj n, takav da u svakom podskupu skupa S od n elemenata postoji 5 brojeva od kojih su svaka 2 međusobno relativno prosta.

4. Dan je povezan graf G s k bridova. Dokazati da se njegovi bridovi mogu numerirati svim brojevima 1, 2, $3,\ldots$, k, tako da za svaki vrh v grafa koji je spojen bridovima s barem dva druga vrha, vrijedi: najveća zajednička mjera svih brojeva kojima su numerirani bridovi koji izlaze iz v, je 1.

[Graf G se sastoji od skupa točaka, koji se zovu vrhovi, zajedno s familijom bridova koji spajaju neke parove različitih vrhova. Svaki par različitih vrhova u, v pripada najviše jednom bridu. Graf G je povezan ako za svaki par različitih vrhova x, y postoji neki niz vrhova $x = v_0, v_1, v_2, \ldots, v_m = y$ takav da je svaki par vrhova (v_i, v_{i+1}) $(0 \leqslant i < m)$ spojen bridom iz G.]

5. Neka je P unutarnja točka trokuta ABC. Dokazati da je bar jedan od kutova PAB, PBC, PCA manji ili jednak 30°.

6. Beskonačan niz realnih brojeva x_0, x_1, x_2,... je ograničen ako postoji konstanta C takva da je $|x_i| < C$ za svaki $i \geqslant 0$.

Dan je realan broj $a > 1$. Konstruirati ograničen beskonačan niz x_0, x_1, $x_2, \ldots$ takav da nejednakost

$$|x_i - x_j| \cdot |i - j|^a \geqslant 1$$

vrijedi za svaki par različitih brojeva i, j.

XXXIII.

Na 33. MMO, koja se održavala u Moskvi od 10. do 21. srpnja 1992. g., sudjelovalo je čak 68 država, među kojima je bilo 12 promatrača. Na prostoru bivše Jugoslavije nastalo je pet država od kojih je samo Jugoslavija bila punopravni sudionik.

Zadaci

1. Naći sve cijele brojeve a, b, c za koje je $1 < a < b < c$, ako je poznato da je $abc - 1$ djeljivo s $(a-1)(b-1)(c-1)$.

2. Naći sve funkcije $f\ :\ \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ za koje je

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2 \quad \forall x, y \in \mathbf{R}.$$

3. U prostoru je dano devet točaka od kojih nikoje četiri ne leže u istoj ravnini. Svake dvije su povezane dužinom i svaka od njih obojena je plavom ili crvenom bojom ili nije obojena. Naći najmanji broj n takav da pri bilo kakvom bojenju izabranih n dužina, među njima postoje tri jednako obojene koje su stranice trokuta.

4. Kružnica k i njezina tangenta t nalaze se u jednoj ravnini, a točka M je na t. Naći geometrijsko mjesto točaka P za koje vrijedi: postoje dvije točke Q i R na t tako da je M polovište dužine $\overline{QR}$, a kružnica k je upisana u trokut PQR.

5. Neka je O_{xyz} pravokutni koordinatni sustav u prostoru, S konačan skup točaka u njemu, a S_x, S_y i S_z skupovi ortogonalnih projekcija svih točaka iz S redom na ravnine O_{yz}, O_{zx} i O_{xy}. Dokazati da je

$$|S|^2 \leqslant |S_x| \cdot |S_y| \cdot |S_z|,$$

gdje je $|A|$ broj elemenata konačnog skupa A.

6. Za svaki pozitivan broj n neka je $S(n)$ najveći cijeli broj takav da se za svaki pozitivan cijeli broj $k < S(n)$, broj n^2 može prikazati kao suma od k kvadrata pozitivnih cijelih brojeva.

(a) Dokazati da je $S(n) \leqslant n^2 - 14$ za svaki $n > 4$.

(b) Naći cijeli broj n za koji je $S(n) = n^2 - 14$.

(c) Dokazati da postoji beskonačno mnogo cijelih brojeva n za koje je $S(n) = n^2 - 14$.

XXXIV.

34th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD

ISTANBUL, 1993

Sljedeća MMO koja se održavala od 13. do 24. srpnja 1993. g. u Turskoj, u Istanbulu, okupila je učenike iz 73 države. Hrvatska je tada po prvi put sudjelovala kao punopravni član. Naša ekipa imala je šest članova: Neven Grbac (Lovran, 4. r.), Miroslav Jurišić (Split, 2. r.), Danijel Kopčinović (Zagreb, 3. r.), Mario Krnić (Split, 4. r.), Domagoj Kolar (Rijeka, 4. r.) i Natalia Kuljiš (Split, 3. r.). Od naših učenika Miroslav Jurišić je bio nagrađen brončanom medaljom. Po ukupnom broju osvojenih bodova Hrvatska je bila 55. Voditelji hrvatske olimpijske ekipe su bili Željko Hanjš s Matematičkog odjela Prirodoslovno-matematičkog fakulteta i Ilko Brnetić s Fakulteta elektrotehnike i računarstva u Zagrebu.

Zadaci

1. Neka je $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$, gdje je $n > 1$ cijeli broj. Dokazati da se $f(x)$ ne može prikazati kao produkt dva polinoma od kojih svaki ima sve koeficijente cjelobrojne i stupanj barem 1.

2. Neka je D točka unutar šiljastokutnog trokuta ABC tako da je

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB + 90^\circ \quad \text{i} \quad |AC| \cdot |BD| = |AD| \cdot |BC|.$$

(a) Izračunati vrijednost kvocijenta

$$\frac{|AB| \cdot |CD|}{|AC| \cdot |BD|}.$$

(b) Dokazati da su tangente u točki C na kružnice opisane oko trokuta ACD i BCD međusobno okomite.

3. Na beskonačnoj šahovskoj ploči igra se ova igra. Na početku, n^2 žetona postavljeno je na polja kvadrata $n \times n$ i to po jedan od njih na svako polje. U ovoj igri "potez" je skok u horizontalnom ili vertikalnom smjeru preko zauzetog polja na slobodno polje koje je neposredno pored njega. Žeton preko kojeg je izvršen skok se ukloni.

Naći sve one vrijednosti n za koje igra može završiti sa samo jednim žetonom na ploči.

4. Za tri točke P, Q i R u promatranoj ravnini, definirano je $m(PQR)$ kao najmanja duljina od visina trokuta PQR (pri čemu je $m(PQR) = 0$ kada su P, Q i R kolinearne).

Neka su A, B i C dane točke u ravnini. Dokazati da za svaku točku X u ravnini vrijedi:

$$m(ABC) \leqslant m(ABX) + m(AXC) + m(XBC).$$

5. Neka je $n = 1, 2, 3, \ldots$. Utvrditi da li postoji funkcija $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ takva da je

(i) $f(1) = 2$,

(ii) $f(f(n)) = f(n) + n$, za svako $n \in \mathbf{N}$ i

(iii) $f(n) < f(n+1)$, za svako $n \in \mathbf{N}$.

6. Neka je $n > 1$ cijeli broj.

Na kružnici je postavljeno n svjetiljki $L_0, \ldots, L_{n-1}$. Svaka svjetiljka je upaljena ili ugašena. Vrše se koraci S_0, $S_1, \ldots$, $S_j, \ldots$ U koraku S_j utječe se na svjetiljku L_j (stanje ostalih svjetiljki se ne mijenja) i to ovako: ako je L_{j-1} upaljena, S_j mijenja stanje od L_j iz upaljenog u ugašeno ili iz ugašenog u upaljeno, a ako je L_{j-1} ugašena S_j ostavlja stanje od L_j nepromijenjeno. Svjetiljke su označena “mod n” tj. $L_{-1} = L_{n-1}$, $L_0 = L_n$, $L_1 = L_{n+1}$, itd. Na početku su sve svjetiljke upaljene.

Pokazati da:

(a) postoji pozitivan broj $M(n)$ takav da će nakon $M(n)$ koraka sve svjetiljke biti upaljene;

(b) ako je n oblika 2^k tada će sve svjetiljke biti upaljene nakon $n^2 - 1$ koraka;

(c) ako je n oblika $2^k + 1$ sve svjetiljke će biti upaljene nakon $n^2 - n + 1$ koraka.

XXXV.

Godine 1994. od 8. do 20. srpnja održavala se 35. MMO u Hong Kongu na kojoj je susdjelovalo 69 država. Hrvatsku su predstavljali Milica Čudina (Dubrovnik, 3. r.), Ivica Ivec (Križevci, 4. r.), Miroslav Jurišić (Zagreb, 3. r.), Natalia Kuljiš (Split, 4. r.), Ozren Perše (Zagreb, 4. r.) i Damir Vukičević (Split, 4. r.). Od naših učenika, Miroslav Jurišić i Ivica Ivec bili su nagrađeni brončanim medaljama, dok su Milica Čudina i Natalia Kuljiš dobile pohvalu. Po ukupnom broju osvojenih bodova Hrvatska je bila 43.

Zadaci

1. Neka su m i n pozitivni cijeli brojevi. Nadalje, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ su međusobno različiti elementi skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ako je $a_i + a_j \leqslant n$ za neke i, j, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$, tada postoji k, $1 \leqslant k \leqslant m$, takav da je $a_i + a_j = a_k$. Dokazati da je

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

2. Trokut ABC je jednakokračan pri čemu je $|AB| = |AC|$. Pri tome vrijedi:

(a) M je polovište stranice $\overline{BC}$ i O je točka na pravcu AM tako da je OB okomito na AB.

(b) Q je proizvoljna točka na stranici $\overline{BC}$ različita od B i C.

(c) E se nalazi na pravcu AB i F na pravcu AC tako da su točke E, Q i F različite i kolinearne.

Dokazati da je OQ okomito na EF ako i samo ako je $|QE| = |QF|$.

3. Za svaki pozitivan cijeli broj k neka je $f(k)$ broj elemenata skupa $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$ čiji prikaz u bazi 2 sadrži točno tri jedinice.

(a) Dokazati da za svaki pozitivan cijeli broj m, postoji bar jedan pozitivan cijeli broj k takav da je $f(k) = m$.

(b) Odrediti sve pozitivne cijele brojeve m za koje postoji točno jedan k takav da je $f(k) = m$.

4. Odrediti sve uređene parove (m, n) pozitivnih cijelih brojeva takvih da je

$$\frac{n^3+1}{mn-1}$$

cijeli broj.

5. Neka je S skup svih realnih brojeva koji su strogo veći od -1. Naći sve funkcije $f : S \longrightarrow S$ koje zadovoljavaju ova dva uvjeta:

(a) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ za sve x, y u S;

(b) Funkcija $\frac{f(x)}{x}$ je strogo rastuća na svakom od intervala $-1 < x < 0$ i $x > 0$.

6. Pokazati da postoji podskup A skupa pozitivnih cijelih brojeva s ovim svojstvom: Za svaki beskonačan skup S prostih brojeva postoje dva pozitivna cijela broja $m \in$ A i $n \notin$ A tako da je svaki od njih produkt k različitih elemenata skupa S, za neko $k \geqslant 2$.

OLYMPIADE INTERNATIONALE DE MATHÉMATIQUES

INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD

CANADA 1995

XXXVI.

Godine 1995. od 13. do 25. srpnja održavala se 36. MMO u Kanadi, u Torontu, na kojoj su se okupili predstavnici iz 73 države. Iz Hrvatske su bili: Bojan Antolović (Zagreb, 3. r.), Milica Čudina (Dubrovnik, 4. r.), Ante Đerek (Zagreb, 3. r.), Blaženka Gregurec (Zagreb, 4. r.), Miroslav Jurišić (Zagreb, 4. r.) i Maja Starčević (Križevci, 4. r.). Ante Đerek, Miroslav Jurišić i Maja Starčević bili su nagrađeni brončanim medaljama, dok su Bojan Antolović i Milica Čudina dobili pohvalu. Po ukupnom broju osvojenih bodova Hrvatska je bila 33.

Zadaci

1. Neka su A, B, C i D četiri različite točke na pravcu, poredane u tom redosljedu. Kružnice s dijametrima $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ sijeku se u točkama X i Y. Pravac XY siječe BC u točki Z. Neka je P točka na pravcu XY različita od Z. Pravac CP siječe kružnicu s dijametrom $\overline{AC}$ u točkama C i M, a pravac BP siječe kružnicu s dijametrom $\overline{BD}$ u točkama B i N. Dokazati da se pravci AM, DN i XY sijeku u jednoj točki.

2. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokazati da je

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

3. Odrediti sve cijele brojeve $n > 3$ za koje postoji n točaka A_1, $A_2, \ldots, A_n$ u ravnini, te realni brojevi r_1, $r_2, \ldots, r_n$ tako da su zadovoljena ova dva uvjeta:

(a) nikoje tri od točaka A_1, A_2, $\ldots$, A_n ne leže na istom pravcu;

(b) za svaku trojku i, j, k ($1 \leqslant i < j < k \leqslant n$), površina trokuta $A_iA_jA_k$ je jednaka $r_i + r_j + r_k$.

4. Naći najveću moguću vrijednost broja x_0 za koji postoji niz pozitivnih realnih brojeva x_0, $x_1, \ldots, x_{1995}$ koji zadovoljavaju ove uvjete:

(a) $x_0 = x_{1995}$ i

(b) $x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$, za svaki $i = 1, 2, \ldots, 1995$.

5. Neka je $ABCDEF$ konveksni šesterokut, pri čemu je

$$|AB| = |BC| = |CD|, \qquad |DE| = |EF| = |FA| \quad \text{i}$$
$$\sphericalangle BCD = \sphericalangle EFA = 60^\circ.$$

Neka su G i H dvije točke u unutrašnjosti šesterokuta takve da je

$$\sphericalangle AGB = \sphericalangle DHE = 120^\circ.$$

Dokazati da je

$$|AG| + |GB| + |GH| + |DH| + |HE| \geqslant |CF|.$$

6. Neka je p neparan prost broj. Naći broj svih podskupova A skupa $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ tako da

(a) A ima točno p elemenata, i

(b) zbroj svih elemenata skupa A je djeljiv s p.

XXXVII.

Godine 1996. od 5. do 17. srpnja Indija je bila domaćin 37. MMO koja je održana u Mumbaiu (Bombay) na kojoj je sudjelovalo 75 država: Albanija, Argentina, Armenija, Australija, Austrija, Azerbejdžan, Belgija, Bjelorusija, Bosna i Hercegovina, Brazil, Bugarska, Cipar, Češka, Čile, Danska, Estonija, Filipini, Finska, Francuska, Gruzija, Grčka, Hong Kong, Hrvatska, Indija, Indonezija, Island, Italija, Izrael, Iran, Irska, Japan, Jugoslavija, Južnoafrička Republika, Kanada, Kazahstan, Kina, Kirgistan, Kolumbija, Južna Koreja, Kuba, Kuvajt, Latvija, Litva, Mađarska, Makao, Makedonija, Malezija, Maroko, Meksiko, Moldavija, Mongolija, Nizozemska, Norveška, Novi Zeland, Njemačka, Poljska, Portugal, Rumunjska, Rusija, Singapur, Slovačka, Slovenija, Sri Lanka, Švedska, Španjolska, Švicarska, Sjedinjene Američke Države, Tajland, Tajvan, Turska, Ukrajina, Velika Britanija, Vijetnam, Trinidad i Tobago, Turkmenistan.

Iz Hrvatske je sudjelovalo šest učenika: Bojan Antolović (Zagreb, 4. r.), Tonči Crmarić (Split, 3. r.), Ante Đerek (Zagreb, 4. r.), Zvonko Iljazović (Zagreb, 3.

r.), Krunoslav Kovač (Požega, 4. r.), Marjan Praljak (Zagreb, 3. r.), a pored njih bio je i Boris Milošević kao učenik–promatrač. Bojan Antolović bio je nagrađen srebrnom, a Tonči Crmarić brončanom medaljom. Po ukupnom broju osvojenih bodova Hrvatska je bila 34.

Zadaci

1. Neka je $ABCD$ pravokutna ploča dimenzija $|AB| = 20$, $|BC| = 12$. Ploča je podijeljena na 20×12 jediničnih kvadrata.

Neka je r dani pozitivni cijeli broj. Novčić se može premjestiti s jednog kvadrata na drugi ako i samo ako je udaljenost središta ta dva kvadrata jednaka $\sqrt{r}$.

Zadatak je odrediti redoslijed premještanja kojim će se novčić premjestiti iz kvadrata kojemu je vrh A, do kvadrata kojemu je vrh B.

(a) Pokazati da se cilj ne može postići ako je r djeljiv s 2 ili 3.

(b) Pokazati da se cilj može postići ako je $r = 73$.

(c) Može li se cilj postići ako je $r = 97$?

2. Neka je točka P unutar trokuta ABC takva da je $\sphericalangle BPA - \sphericalangle BCA = \sphericalangle APC - \sphericalangle ABC$. Točke D, E su središta kružnica upisanih u trokute APB, APC, tim redom. Pokazati da se pravci AP, BD i CE sijeku u jednoj točki.

3. Neka je $\mathbf{S} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ skup nenegativnih cijelih brojeva. Naći sve funkcije definirane na $\mathbf{S}$ koje poprimaju vrijednosti u $\mathbf{S}$, tako da je

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n), \quad \text{za svake } m, n \text{ iz } \mathbf{S}.$$

4. Pozitivni cijeli brojevi a i b su takvi da su oba broja $15a + 16b$ i $16a - 15b$ kvadrati pozitivnih cijelih brojeva. Naći najmanju vrijednost koju može imati minimum od ova dva kvadrata.

5. Neka je $ABCDEF$ konveksan šesterokut tako da je AB paraleno s DE, BC paralelno s FE i CD paralelno s AF. Neka su R_A, R_C, R_E, tim redom, polumjeri kružnica opisanih oko trokuta ABF, BCD, DEF i p je opseg šesterokuta. Dokazati da je

$$R_A + R_C + R_E \geqslant \frac{p}{2}.$$

6. Neka su n, p, q pozitivni cijeli brojevi takvi da je $n > p + q$. Neka su x_0, $x_1, \ldots, x_n$ cijeli brojevi koji zadovoljavaju ove uvjete:

(a) $x_0 = x_n = 0$;

(b) za svaki cijeli broj i takav da je $1 \leqslant i \leqslant n$, je ili $x_i - x_{i-1} = p$ ili $x_i - x_{i-1} = -q$.

Pokazati da postoji par indeksa (i,j) takav da je $i < j$ i $(i,j) \neq (0,n)$, za koji je $x_i = x_j$.

38th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD

XXXVIII.

Prva MMO u Južnoj Americi održavala se od 18. do 31. srpnja 1997. u poznatom turističkom mjestu Mar del Plati u Argentini. Sudjelovali su učenici iz 82 države, što je bio dotadašnji najveći broj. Predstavnici hrvatske olimpijske ekipe su bili: Tonči Crmarić (Split, III. gimnazija, 4. r.), Zvonko Iljazović (Zagreb, XV. gimnazija, 4. r.), Matija Kazalicki (Zagreb, XV. gimnazija, 2. r.), Vjekoslav Kovač (Zagreb, XV. gimnazija, 3. r.), Andrijana Radovčić (Split, III. gimnazija, 2. r.), Vedran Zorić (Split, III. gimnazija, 3. r.). Osvojili su jednu srebrnu (Vedran Zorić) i četiri brončane medalje (Andrijana Radovčić, Tonči Crmarić, Vjekoslav Kovač i Matija Kazalicki), dok je Zvonko Iljazovič dobio pohvalu. Po ukupnom broju osvojenih bodova Hrvatska je bila 24.

Zadaci

1. Točke u ravnini, s cjelobrojnim koordinatama, su vrhovi jediničnih kvadrata. Kvadrati su naizmjenično obojeni crnom i bijelom bojom (kao na šahovskoj ploči).

Za svaki par pozitivnih cijelih brojeva m i n, promatraj pravokutni trokut čiji vrhovi imaju cjelobrojne koordinate, a njegove katete, duljina m i n, leže na stranicama jediničnih kvadrata.

Neka je S_1 ukupna površina crnog dijela trokuta i S_2 ukupna površina bijelog dijela. Neka je

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|.$$

(a) Odrediti $f(m,n)$ za svake pozitivne cijele brojeve m i n koji su, ili oba parni ili oba neparni.

(b) Dokazati da je $f(m,n) \leqslant \frac{1}{2} \max\{m,n\}$ za svake m i n.

www.element.hr

(c) Pokazati da ne postoji konstanta C takva da je $f(m, n) < C$, za svake m i n.

2. Neka je $\sphericalangle A$ najmanji kut trokuta ABC.

Točke B i C dijele kružnicu opisanu oko trokuta na dva luka. Neka je U unutrašnja točka luka između B i C koji ne sadrži točku A.

Simetrale od $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ sijeku pravac AU u točkama V i W, tim redom. Pravci BV i CW sijeku se u točki T.

Pokazati da je
$$|AU| = |TB| + |TC|.$$

3. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_n$ realni brojevi koji zadovoljavaju uvjete
$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$$
i
$$|x_i| \leqslant \frac{n+1}{2} \quad \text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pokazati da postoji permutacija $y_1, y_2, \ldots, y_n$ od $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tako da je
$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

4. Matrica $n \times n$ (kvadratno polje) čiji su elementi brojevi iz skupa $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ naziva se *srebrna* matrica, ako za svaki $i = 1, \ldots, n$, i-ti redak i i-ti stupac, zajedno sadrže sve elemente od S. Pokaži da:

(a) ne postoji srebrna matrica za $n = 1997$;

(b) postoje srebrne matrice za beskonačno mnogo brojeva n.

5. Naći sve parove (a, b) cijelih brojeva $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$ koji zadovoljavaju jednadžbu
$$a^{b^2} = b^a.$$

6. Za svaki pozitivan cijeli broj n, s $f(n)$ je označen broj različitih prikaza broja n kao sume potencija broja 2 s nenegativnim cjelobrojnim eksponentima.

Prikazi koji se razlikuju samo u poretku njegovih sumanada, smatraju se jednakima. Npr., $f(4) = 4$ jer se broj 4 može prikazati na ova četiri načina: 4, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$.

Dokazati, da je za svaki cijeli broj $n \geqslant 3$,
$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$