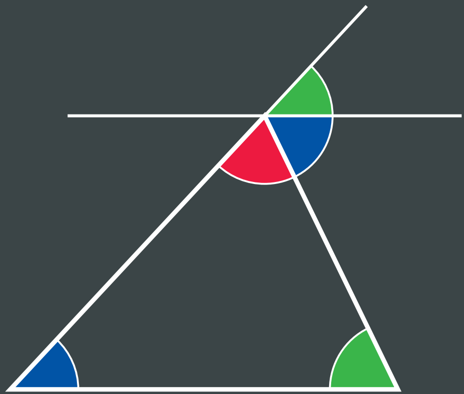
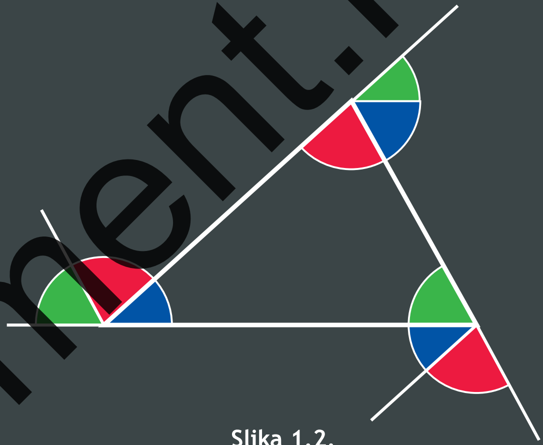
1 Kutovi trokuta i mnogokuta

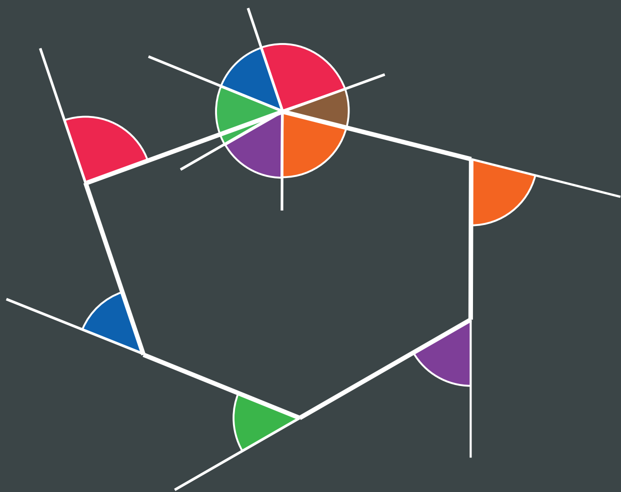


Slika 1.1.



Slika 1.2.

Slika 1.3.

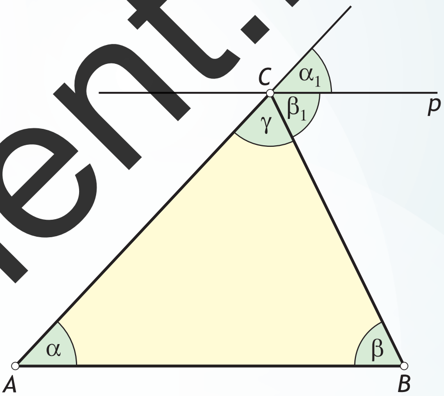


Slika 1.4.

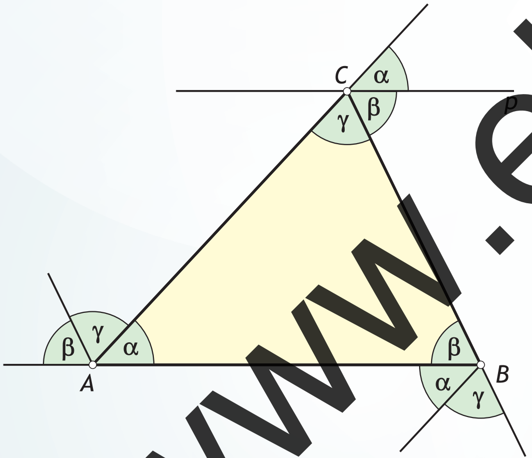
Dva kuta s paralelnim kracima su sukladna ili su suplementna (zbroj im je jednak 180º). Tu činjenicu primjenjujemo pri dokazu sljedećih tvrdnji:

- *Zbroj unutarnjih kutova u svakom trokutu jednak je 180º* (slika 1.1).
- *Zbroj vanjskih kutova trokuta iznosi 360º* (slika 1.2).
- *Vanjski kut trokuta jednak je zbroju dvaju nesusjednih unutarnjih* (slika 1.2).

Dokažimo prvu tvrdnju (slika desno): Vrhom *C* trokuta *ABC* položimo pravac *p* paralelan pravcu *AB*. Preko vrha *C* produžimo polupravac *AC*. Uočavamo da je $\alpha \cong \alpha_1$ i $\beta \cong \beta_1$. Te su sukladnosti utemeljene na spomenutom poučku o kutovima s paralelnim kracima. Slijedi: $\alpha + \beta + \gamma = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma = 180^\circ$.



Dokaz druge tvrdnje na neki je način sadržan u dokazu prethodne. I pri vrhovima *A* i *B* provest ćemo istu konstrukciju kao pri vrhu *C*. Tako zaključujemo da je $3(\alpha + \beta + \gamma) = 540^\circ$. U tom su zbroju sadržana tri unutarnja kuta trokuta i tri njegova vanjska kuta. Kako je zbroj unutarnjih kutova 180°, onda je zbroj vanjskih jednak $2(\alpha + \beta + \gamma) = 360^\circ$.

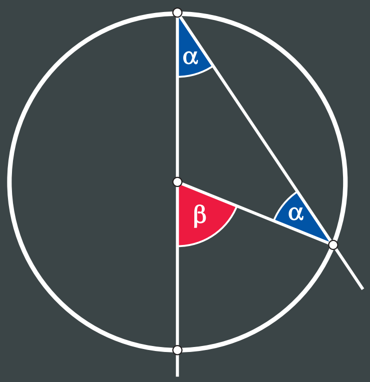


S iste se slike može zaključiti da je svaki vanjski kut trokuta zbroj dvaju nesusjednih unutarnjih kutova.

Promatrajmo sada sliku 1.3. Dan je konveksni mnogokut sa *n* stranica. Odaberimo u njegovoj nutrini neku točku *P* i pospajajmo je s vrhovima mnogokuta. Tako smo mnogokut razrezali na *n* trokuta. Zbroj svih kutova u tih *n* trokuta iznosi $n \cdot 180^\circ$. No kutovi s vrhom u točki *P* nisu unutarnji kutovi mnogokuta pa ih valja oduzeti. Tako je zbroj unutarnjih kutova konveksnog mnogokuta jednak $n \cdot 180^\circ - 360^\circ = n \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ = (n-2) \cdot 180^\circ$.

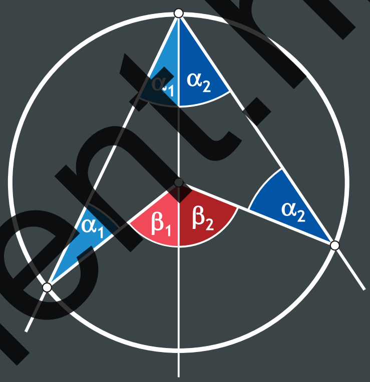
I konačno, prema slici 1.4 zaključujemo da je zbroj vanjskih kutova konveksnog *n*–terokuta jednak 360º.

2 Obodni i središnji kut kružnice



$\beta = 2\alpha$

Slika 2.1.

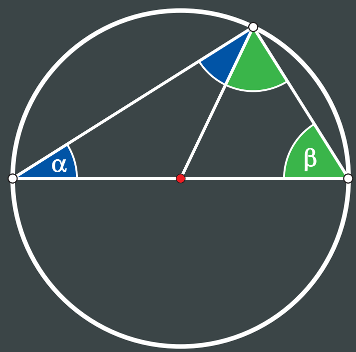


$\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$

Slika 2.2.

$\beta = 2\alpha$

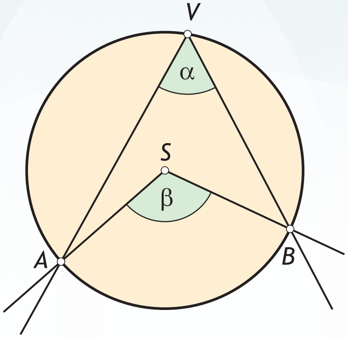
Slika 2.3.

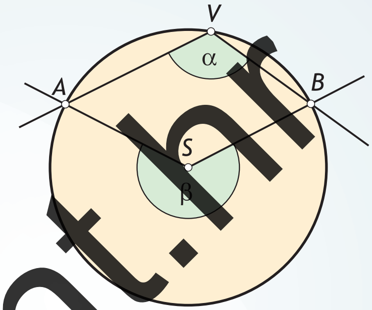


$\gamma = 90°$

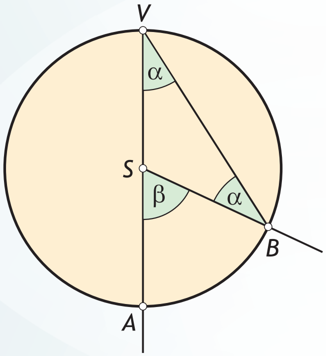
Slika 2.4.

Obodni kut je kut kojem je vrh V na kružnici, a kraci sijeku kružnicu u točkama A i B. Svakom obodnom kutu α pripada jedan jedini središnji kut β. Središnjem kutu β pripada beskonačno mnogo obodnih kutova. Ako je α šiljasti kut, β je manji od 180° (lijeva slika), a ako je α tupi kut, β je izbočen (desna slika).





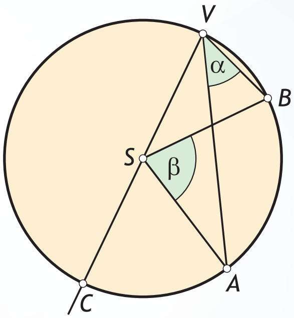
Vrijedi poučak: *Središnji kut dvostruko je veći od pripadajućeg mu obodnog kuta:* $\beta = 2\alpha$.



Dokažimo ovaj poučak. Neka jedan krak obodnog kuta (slika lijevo) prolazi središtem kružnice. Trokut VSB je jednakokračan ($|SB| = |SV|$), a središnji kut BSA vanjski je kut tog trokuta. Prema poučku o vanjskom kutu trokuta, taj kut je jednak zbroju sukladnih kutova $\sphericalangle SBV$ i $\sphericalangle BVS$ pa slijedi $\sphericalangle BSA = 2 \cdot \sphericalangle BVA$. Time je dokazan poučak o obodnom i središnjem kutu, ali za ovaj poseban slučaj.

Na slici 2.2 prikazan je dokaz općenitijeg položaja krakova obodnog kuta, a on se svodi na prethodno zaključivanje.

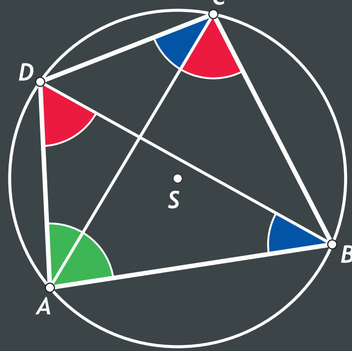
Slika 2.3 prikazuje dokaz u slučaju kada točke A i B leže s iste strane pravca VS. U ovom slučaju dokaz nije lako iščitati sa slike. A on slijedi:



$$\beta = \sphericalangle BSA = \sphericalangle BSC - \sphericalangle ASC = 2\sphericalangle BVC - 2\sphericalangle AVC = 2\left(\sphericalangle BVC - \sphericalangle AVC\right) = 2\sphericalangle BVA = 2\alpha.$$

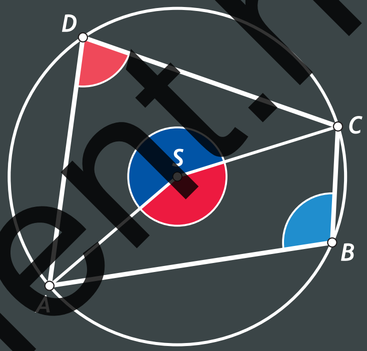
I na kraju izdvojen je poseban slučaj poučka o obodnom i središnjem kutu kada su točke A, B i S na jednom pravcu (slika 2.4). Tada je središnji kut ispružen, a obodni nad njim je pravi kut. Ova je činjenica poznata kao **Talesov poučak**. Poseban je to slučaj poučka o obodnom i središnjem kutu. Slika 2.4 predstavlja jedan jednostavan dokaz Talesova poučka. Kut pri vrhu C jednak je zbroju kutova pri vrhovima A i B. Dakle je $\gamma = \alpha + \beta$, a kako je $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, onda je $\gamma = 90^\circ$.

3 Tetivni i tangencijalni četverokut



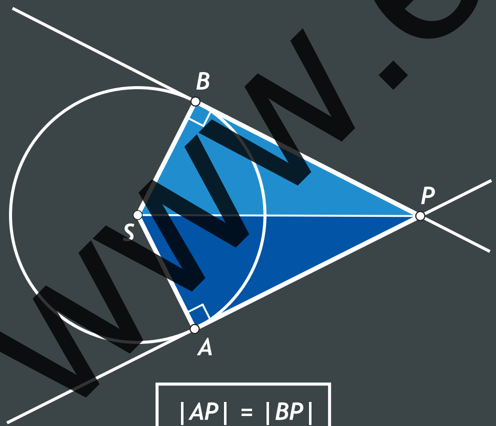
$\sphericalangle BCD + \sphericalangle DAB = 180°$

Slika 3.1.



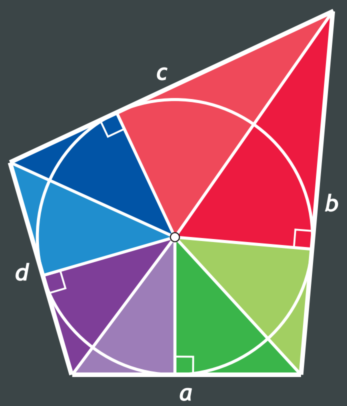
$\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDA = 180°$

Slika 3.2.



$|AP| = |BP|$

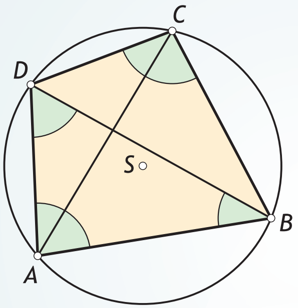
Slika 3.3.



$a + c = b + d$

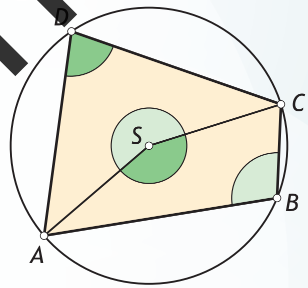
Slika 3.4.

Tetivni četverokut je četverokut upisan kružnici. Poučak o tetivnom četverokutu glasi: *Zbroj dvaju nasuprotnih kutova tetivnog četverokuta jednak je 180°.*



Sa slike 3.1 možemo izvesti dokaz ovog poučka. Najprije uočimo da je $\measuredangle BCA \cong \measuredangle BDA$ jer su to obodni kutovi nad tetivom $\overline{AB}$. Vrijedi također $\measuredangle ACD \cong \measuredangle ABD$ jer su to obodni kutovi nad tetivom $\overline{AD}$. I sada imamo: $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = \measuredangle DAB + \measuredangle ACD + \measuredangle BCA = \measuredangle DAB + \measuredangle ABD + \measuredangle BDA$. Ovaj posljednji zbroj jest zbroj kutova u trokutu *ABD*, a on iznosi 180°. Time je dokaz proveden.

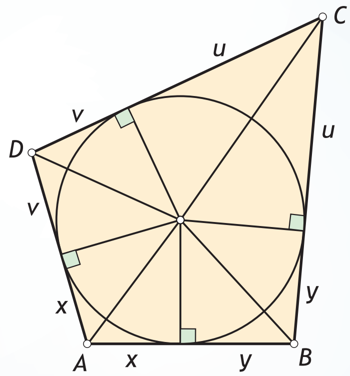
No dokaz može biti i nešto jednostavniji, a temelji se na slici 3.2. Obodnom kutu $\measuredangle CDA$ pripada središnji kut $\measuredangle CSA$ (kutovi označeni tamnijom zelenom bojom), a obodnom kutu $\measuredangle ABC$ pripada središnji (izbočeni) kut $\measuredangle CSA$. Izravno sada slijedi dokaz poučka o tetivnom četverokutu.



Obratimo sada pozornost na sliku 3.4. Sve stranice četverokuta diraju kružnicu. Takav četverokut kojemu se može upisati kružnica zove se **tangencijalni četverokut**. Poučak o tangencijalnom četverokutu glasi:

Ako su a, b, c i d (ovim redom) stranice tangencijalnog četverokuta onda vrijedi $a + c = b + d$.

Dokaz ovog poučka temelji se na sljedećem zaključivanju (slika 3.3): Položimo iz točke *P* izvan kružnice tangente na kružnicu. Dirališta su točke *A* i *B* te vrijedi $|PA| = |PB|$. Tvrdnja proistječe iz sukladnosti pravokutnih trokuta *APS* i *BPS*.



Primijenimo li sada prethodni poučak na tangencijalni četverokut (slika desno), imat ćemo:

$$|AB| + |CD| = (x + y) + (u + v) = (y + u) + (x + v) = |BC| + |AD|.$$