1.

Skup kompleksnih brojeva

(9 / 10 sati)

1. Kompleksni broj . . . . 1 / 1
2. Zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva . . . . 3 / 3
3. Dijeljenje kompleksnih brojeva . . . . 2 / 2
4. Kompleksna ravnina . . . . 2 / 2
5. Ponavljanje, utvrđivanje i sistematizacija . . . . 2 / 3

Upoznavanje s kompleksnim brojevima na početku drugog razreda može se napraviti bez ikakvih poteškoća. Za uvođenje takvih brojeva postoji dovoljna motivacija (rješavanje kvadratnih jednadžbi) i dovoljna osposobljenost učenika (baratanje algebarskim izrazima).

Bez poznavanja trigonometrije, moramo se ograničiti samo na algebarski prikaz kompleksnog broja. Uz definicije i vježbanje algebarskih operacija, učenici moraju upoznati pojam kompleksno-konjugiranog broja te pojam modula kompleksnog broja. Važna je i geometrijska interpretacija broja u kompleksnoj ravnini.

1.1. Kompleksni broj

Broj sati: 1 / 1

Ciljevi i zadaci

– razumjeti razloge za uvođenje kompleksnih brojeva;
– usvojiti definicije imaginarne jedinice i kompleksnog broja;
– usvojiti kriterij jednakosti kompleksnih brojeva i znati ga primjenjivati.

Pojmovi: Imaginarna jedinica. Kompleksni broj. Realni i imaginarni dio kompleksnog broja. Jednakost kompleksnih brojeva.

Metodička razrada

Učenicima su dobro poznati pojmovi prirodnog, cijelog i racionalnog broja. Valja ponoviti pojam iracionalnog i realnog broja. U svrhu uvođenja kompleksnih brojeva otvara se problem rješivosti jednostavne kvadratne jednadžbe oblika $ax^2 + b = 0$. Problem će se staviti i u povijesni kontekst pa je stoga u ovom odjeljku dan i *Povijesni kutak* o povijesti kompleksnih brojeva.

Na ovom je satu dovoljno uvesti pojam kompleksnog broja te pojmove njegovog realnog i imaginarnog dijela. Također će se definirati i jednakost kompleksnih brojeva.

1. Definicija kompleksnog broja. Nije jednostavno odgovoriti na koji način je najbolje definirati kompleksne brojeve. Matematički, najbolje je kompleksan broj z definirati kao *uređen par* realnih brojeva, $z = (x, y)$, a operacije zbrajanja i množenja na tom skupu na sljedeći način:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

U tom pristupu treba zatim poistovjetiti broj oblika $(x, 0)$ s realnim brojem x, zato što je zbroj i umnožak brojeva tog oblika ponovo broj istog oblika pri čemu se čuvaju operacije u skupu realnih brojeva. Nakon toga relacija

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

opravdava temeljni identitet $i^2 = -1$. Tu smo sa i označili kompleksni broj $i := (0, 1)$ koji ne pripada skupu realnih brojeva.

Dakako da je ovakav pristup neprikladan za prvi susret s kompleksnim brojevima[1] Umjesto toga, kompleksne brojeve uvodimo tako da prvo definiramo pojam imaginarne jedinice, a zatim pojam kompleksnog broja kroz zahtjev da u novom skupu brojeva budu sačuvana svojstva algebarskih operacija zbrajanja i množenja.

Nakon definicije kompleksnog broja treba na nizu jednostavnih primjera usvojiti pojmove algebarskog i realnog dijela kompleksnog broja. U tu svrhu neka posluži primjer poput sljedećeg:

---

[1] U jednom francuskom udžbeniku sedamdesetih godina kompleksni brojevi su definirani preko izomorfizma s poljem kvadratnih antisimetričnih matrica drugoga reda s jednakim elementima na dijagonali.

Primjer 1. Odredi algebarski i realni dio kompleksnih brojeva $3+2i$, $3-2i$, $1+i$, $1-i$, $4i$, $-\sqrt{2}i$, $6-\sqrt{2}i$, 6, πi, π.

Učenik mora shvatiti da je imaginarni dio kompleksnog broja realan broj.

* * *

Iz definicije kompleksnog broja neposredno slijedi i kriterij jednakosti kompleksnih brojeva. Njega treba izvježbati kroz primjere, za to će poslužiti zadatak 1. iz udžbenika te zadaci 2. i 3. iz zadataka za vježbu.

Premda se možda sve navedeno čini sadržajno, obrada je na razini uvođenja osnovnih pojmova pa nema razloga za bilo kakve teškoće. Primjeri su najjednostavniji jer u ovom trenutku drugih i ne može biti.

Istaknimo da je bitno da učenici prihvate kako su kompleksni brojevi proširenje skupa realnih brojeva i da su u tom smislu i realni brojevi kompleksni.

Domaći rad. Kao domaći rad u obzir dolaze zadaci 1.1. na strani 5. Napomenimo kako će učenici teško sami razumjeti zadatak 4. U tome je zadatku nekorektno primjenjen identitet $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, koji vrijedi samo za realne brojeve $a\geq 0$ i $b\geq 0$.

1.2. Zbrajanje i množenje kompleksnih brojeva

Broj sati: 3 / 3

Ciljevi i zadaci

– usvojiti operacije zbrajanja i množenja realnih brojeva;
– naučiti kako se određuju cjelobrojne potencije imaginarne jedinice.

Pojmovi: Zbroj kompleksnih brojeva. Umnožak kompleksnih brojeva. Potencije imaginarne jedinice.

Metodička razrada

Operacije zbrajanja i množenja uvode se na prirodni način, tretirajući kompleksni broj kao algebarski izraz. Ne treba pamtiti formulu za umnožak dvaju kompleksnih brojeva.

1. Potencije imaginarne jedinice. Potencije imaginarne jedinice treba obraditi kao zasebnu temu.

Na početku drugog sata možete zadati problem računanja kompleksnih brojeva $(1+i)^3$ i $(1+i)^4$. Neka ih učenici izračunaju najprije postupnim množenjem, tako da dobiju konačni rezultat, a zatim kao polinome po varijabli i. Tako će dobiti sljedeće jednakosti

$$1 + 3i + 3i^2 + i^3 = -2 + 2i,$$
$$1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = -4$$

Time će biti motivirani da se zapitaju čemu su jednake potencije imaginarne jedinice i.

Korisno je sada izračunati prvih nekoliko potencija i^n, recimo do do i^9 ili i^{13}, dok svakome ne bude jasno periodično ponašanje u tom nizu. Zatim valja na više primjera izvježbati računanje tih potencija za veliki n. U tu svrhu će poslužiti primjer 7. i zadatak 8. iz udžbenika.

Pri kraju sata uvesti pojam kompleksno-konjugiranog broja i načiniti primjer 10.

Nakon uvođenja pojma kompleksnog broja, sada bi kroz vježbu trebalo proraditi niz zadataka i primjera što bi trebalo doprinijeti usvajanju i razumijevanju gradiva. Izbor zadataka na kraju točke 1.2. dovoljno je bogat i njihov odabir stvar je nastavnika.

U ovom odjeljku nalazi se i *Kutak plus* u kojem je obrađeno računanje drugog korijena. To je neobvezatan dio gradiva i namijenjen je učenicima s posebnim interesom za učenje matematike.

Domaći rad. Izbor zadataka na str. $10/11$.

1.3. Dijeljenje kompleksnih brojeva

Broj sati: 2 / 2

Ciljevi i zadaci

– usvojiti pojam konjugirano-kompleksnih brojeva;
– naučiti postupak dijeljenja kompleksnih brojeva.

Pojmovi: Konjugirano-kompleksni brojevi. Dijeljenje kompleksnih brojeva.

Metodička razrada

U uvodu u dijeljenje kompleksnih brojeva uvodimo najprije pojam konjugirano-kompleksnih brojeva. To su dva broja oblika $a+bi$ i $a-bi$, dakle oni kojima su realni dijelovi jednaki a imaginarni suprotni realni brojevi. Jedan od ta dva broja označava se s crticom iznad oznake drugoga, primjerice z i $\overline{z}$, i ovaj dugi čitamo ka “ze potez.” Umnožak dvaju konjugirano kompleksnih brojeva je realan broj. Ta činjenica se valja osobito naglasiti jer na njoj je utemeljen postupak dijeljenja kompleksnih brojeva.

1. Dijeljenje kompleksnih brojeva. Učenici su upoznati s postupkom racionalizacije nazivnika algebarskih izraza. Prisjećanje na taj postupak (primjer je naveden u udžbeniku) može približiti ideju dijeljenja kompleksnih brojeva, ali logički nije nužno da se taj postupak provede.

Ovdje je važno uočiti da je za postupak dijeljenja dvaju brojeva dovoljno shvatiti kako se računa algebarski prikaz *recipročnog broja* $1/z$. Zbog toga postupak dijeljenja treba započeti s primjerima tog oblika. U udžbeniku su navedeni primjeri broja $\dfrac{1}{3-2i}$ a zatim i broja $\dfrac{1}{x+yi}$. Te primjere treba proraditi, i možda nadodati još neke istog oblika, poput $\dfrac{1}{1+i\sqrt{3}}$, $\dfrac{1}{\sqrt{2}-i}$, pa čak i $\dfrac{1}{4i}$, $\dfrac{1}{i\sqrt{5}}$. Primjetite da u ovom posljednjem ne treba racionalizirati nazivnik!

Neki učenici će uočiti da je formulu

$$\frac{1}{x+yi}=\frac{x-yi}{x^2+y^2}$$

lako zapamtiti, pa da je mogu koristiti u računanju. Takvo skraćivanje postupka ne treba ni podsticati ni zabranjivati.

Nakon toga treba odmah prići primjerima dijeljenja kompleksnih brojeva, namjerno treba preskočiti općenitu formulu (1) na strani 14 za količnik $\dfrac{z_1}{z_2}$. Nju ne treba pamtiti. Ona je u udžbeniku navedena da se uoči prvi korak koji treba načiniti pri dijeljenju kompleksnih brojeva, a konačan rezultat samo pokazuje da je količnik uvijek moguće napisati u algebarskom obliku, tj. da je količnik kompleksnih brojeva z_1 i z_2, $z_2 \neq 0$, kompleksan broj.

1.4. Kompleksna ravnina

Broj sati: 2 / 2

Ciljevi i zadaci

– upoznati pojam kompleksnog broja;
– razumjeti pridruživanje kompleksnih brojeva i točaka u koordinatnoj ravnini;
– povezati pojam modula s udaljenošću točaka u ravnini;
– naučiti kako odrediti podskupove točaka u kompleksnoj ravnini na temelju jednostavnih relacija (jednadžbi i nejednadžbi) među kompleksnim brojevima.

Pojmovi: Modul kompleksnog broja. Kompleksna ravnina. Realna i imaginarna os. Udaljenost točaka u ravnini.

Metodička razrada

1. Modul kompleksnog broja. Pojam modula kompleksnog broja je važan pojam. Iako će se s njim učenici više susretati u četvrtom razredu, gdje je on nužan u trigonometrijskom prikazu kompleksnog broja, osnovna svojstva modula, vezana uz algebarske operacije množenja i dijeljenja, treba napraviti u drugom razredu.

Modul ćemo definirati algebarskim putem, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. U ovom trenu ne možemo se pozvati na geometrijski zor, što će uslijediti već u narednoj lekciji. Kao motivaciju za modul, dovoljno će biti spomenuti njegovu vezu s već usvojenim pojmovima:

$$z \cdot \bar{z} = (x+yi)(x-yi) = x^2+y^2 = |z|^2.$$

Možete spomenuti i ovaj identitet:

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

koji slijedi iz gornje jednakosti.

Na nizu primjera treba izvježbati računanje modula kompleksnog broja. U tu svrhu, iskoristite primjer 4. iz udžbenika. Učenik mora shvatiti da je modul kompleksnog broja nenegativan realni broj (kad je jednak nuli?), te da je taj pojam proširenje pojma apsolutne vrijednosti realnog broja. Zato se i koristi ista oznaka.

U udžbeniku su dokazana temeljna svojstva modula:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Ta svojstva treba usvojiti, iako sam dokaz nije nužno provesti. Treba kazati da iz prvog svojstva slijedi i

$$|z^n| = |z|^n.$$

Lako se uvjeriti u korisnost ove formule. Zadajte da se izračuna modul kompleksnog broja $(2+i)^4$. Neka najprije izračunaju broj, a onda mu odrede modul. Nakon toga neka se uvjere u istinitost formule.

Načinite nakon toga zadatak 5.

2. Koordinatni sustav. Za obradu ove teme dovoljan bi bio jedan školski sat. Međutim s obzirom na važnost prikaza u koordinatnom sustavu, korisno je utrošiti onoliko vremena koliko je potrebno na ponavljanje pojmova Kartezijevog koordinatnog sustava: određivanje položaja točke u sustavu, pojam kvadranta, pa i crtanja pravca.

Nakon toga treba opisati kompleksnu (Gaussovu) ravninu. Točke u kompleksnoj ravnini smijemo zapisivati ili kao kompleksne brojeve $x+iy$, ili kao uređeni par (x,y). To znači da točke na imaginarnoj osi moramo zapisivati kao i, $2i$, $-3i$ itd., nije korektno zapisati samo imaginarni dio tih brojeva. To je jedina razlika u zapisivanju između kompleksne i Kartezijeve ravnine.

Za vježbu načinite neke od zadataka 8.–10., strana 26.

Domaći rad. Preostali dio zadataka 8.–10.

3. Modul i udaljenost. Povezati pojam modula kompleksnog broja $z=x+yi$ s udaljenosti točke (x,y) od ishodišta.

Izvesti formulu za modul razlike dvaju kompleksnih brojeva:

$$|z_1-z_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

Ona slijedi direktno iz algebarskog prikaza razlike z_1-z_2 dvaju kompleksnih brojeva. Međutim, važno je nacrtati kompleksne brojeve u ravnini i dati geometrijsku interpretaciju ove formule.

Iako ta formula povezuje pojam modula s formulom za udaljenost točaka u Kartezijevoj ravnini koja je otprije poznata, iskustvo pokazuje da je učenici teško primjenjuju, čak i u studentskoj dobi. Tu treba inzistirati na tome da učenik usvoji činjenicu da je udaljenost dvaju brojeva (prikazanih u kompleksnoj ravnini) jednaka modulu njihove razlike. Hoće li u računanju učenik koristiti "gotovu" formulu, ili će najprije izračunati razliku a zatim modul kompleksnog broja, nije bitno (iako je korisniji ovaj "dulji" postupak, jer on podrazumijeva da je shvaćena ta veza).

Na ovom mjestu može se izvesti formula za jednadžbu kružnice sa središtem u točki (x_0,y_0) i polumjerom r. Taj izvod je nužan da bi se dalje opisao pojam udaljenosti dvaju kompleksnih brojeva i ne treba bježati od njega ("kružnica je gradivo trećeg razreda")

Za vježbu napraviti primjere 11.–13. iz udžbenika.

Domaći rad. Izbor iz zadataka 14.–16.

Kako su kompleksni brojevi relativno *štur* dio gradiva, u kojem nije jednostavno naći primjere primjene dostupne uzrastu učenika, odlučili smo se za jednu relativno jednostavnu, a vrlo efektnu, primjenu. To su fraktali. Nastavnici mogu potaknuti učenike da na tu temu pretraže Internet, a oni tamo mogu naći dosta vrlo popularnog materijala od kojih je dio namijenjen i srednješkolcima.

1.5. Ponavljanje i utvrđivanje

Broj sati: 2 / 3

Ukoliko to vrijeme dopusti, napraviti preostale zadatke iz udžbenika.

Zainteresirane učenike možete uputiti da potraže u knjižnici knjigu N. Elezovića "*Kompleksni brojevi*", izdanje Element, Zagreb 2000. Tamo se mogu pronaći i dodatni zadaci za vježbu.

Od koristi će svakako biti i knjiga B. Dakića "*Zadaci za 1. razred (s pismenih ispita)*, izdanje Element, Zagreb 2002 (ili ranija).

Oni koji preferiraju veći broj pismenih ispita za provjeru znanja tijekom školske godine, mogu drugi sat iskoristiti za pisanje takvog ispita. Primjeri zadataka koji se javljaju na klasifikacijskim ispitima za neke fakultete u Hrvatskoj dani su na kraju Priručnika. Prosječno vrijeme za rješavanje jednog zadatka na testu je 4.5 minuta, tako da je primjereno zadati 6–8 zadataka koje treba riješiti u roku od 30 ili 40 minuta. Možete zadati i veći broj zadataka, s tim da učenik nije obvezan riješiti sve za odličnu ocjenu.

2.

Kvadratna jednadžba

(18 / 19 sati)

1. Kvadratna jednadžba . . . . 2 / 2
2. Rješenja kvadratne jednadžbe . . . . 3 / 3
3. Diskriminanta kvadratne jednadžbe . . . . 2 / 2
4. Vièteove formule . . . . 4 / 4
5. Bikvadratna jednadžba . . . . 3 / 4
6. Ponavljanje, utvrđivanje i sistematizacija . . . . 3 / 3
7. Pismeni ispit i analiza . . . . 3 / 3

Kvadratna jednadžba i formula za njezina rješenja "zaštitni je znak" drugog razreda. To je vjerojatno jedina formula koju će svi učenici zapamtiti na duže vrijeme.

Mjesec dana za proučavanje kvadratne jednadžbe sasvim je dovoljno vrijeme. Vjerojatno ni za jednu drugu cjelinu nećete imati toliko vremena u odnosu na predviđeno gradivo. No to ipak znači da je ova cjelina važna jer se na primjeru kvadratne jednadžbe, a kasnije i kvadratne funkcije, stječu trajna znanja koja učenik mora primijeniti i u složenijim situacijama.

2.1. Kvadratna jednadžba

Broj sati: 2 / 2

Ciljevi i zadaci

– usvojiti pojam kvadratna jednadžba;
– usvojiti definicije imaginarne jedinice i kompleksnog broja;
– naučiti rješavati posebne oblike kvadrane jednadžbe.

Pojmovi: Kvadratna jednadžba. Koeficijenti kvadratne jednadžbe. Rješenje kvadratne jednadžbe.

Metodička razrada

1. Kvadratna jednadžba. Na početku je korisno navesti nekoliko problema rješavanje kojih vodi na kvadratnu jednadžbu. Problemi trebaju biti jednostavni tako da postavljanje jednadžbe ne predstavlja teškoću. Uz one navedene u udžbeniku možemo dodati još i ove:

Primjer 1. Umnožak dvaju uzastopnih parnih cijelih brojeva iznosi 168. Koji su to brojevi?

U tekstu zadatka pretpostavljeno je i više nego što je potrebno. Važno je izdvojiti samo činjenicu da je jedan broj za dva veći od drugog. To vodi na jednadžbu

$$x(x+2)=168$$

odakle je

$$x^2+2x-168.$$

Ako se unaprijed uvaži činjenica da broj mora biti paran pa prvi označimo s $2n$, drugi će biti $2n+2$, pa dobivamo jednadžbu

$$2n(2n+2)=168$$

ili, nakon kraćenja

$$n(n+1)=42.$$

Odavde je vidljivo da je rješenje jednadžbe $n=6$, odnosno $2n=12$, pa su brojevi 12 i 14. Međutim, drugo rješenje, $n=-7$, nije toliko očito.

Primjer 2. Površina pravokutnika je $18\ \text{cm}^2$, a njegov opseg 20 cm. Kolike su stranice pravokutnika?

Prema uvjetu zadatka je

$$x\cdot y=18,$$
$$2x+2y=20.$$

Iz druge jednadžbe čitamo $y=10-x$, što ćemo uvrstiti u prvu:

$$x(10-x)=18.$$

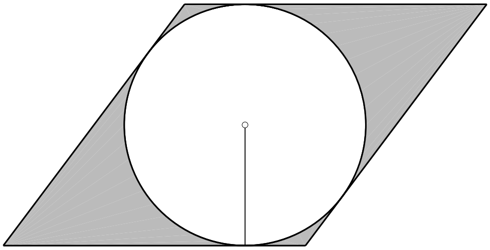
Učenici će rješenje potražiti u skupu cijelih brojeva i neće ga pronaći! Jednadžbu treba zatim napisati u sređenom obliku

$$x^2 - 10x + 18 = 0.$$

Duljine stranice pravokutnika su (približno) $x = 7.645751$ i $y = 2.354249$.

(Prethodni problem ima samo jedno rješenje, iako kvadratna jednadžba ima dva rješenja.)

Primjer 3. Stranica romba iznosi $a = 5$ cm. Njegova površina je za $S = 8\ \text{cm}^2$ veća od površine rombu upisanog kruga. Koliki je polumjer kruga upisanog u romb?



Sl. 2.1.

Označimo traženi polumjer sa r. Onda je površina romba jednaka $a \cdot 2r$, pa to vodi na jednadžbu

$$a \cdot 2r = \pi r^2 + S,$$

tj.

$$\pi r^2 - 10r + 8 = 0.$$

Ova jednadžba nema rješenja, postavljeni uvjet je nemoguć.

Ova će jednadžba imati rješenje za svaki $S < \dfrac{100}{4\pi} \approx 7.95$. Tako npr. stavimo li da je $S = 6$, tad jednadžba $10r = \pi r^2 + 6$ ima dva rješenja $r_1 \approx 2.38$ i $r_2 \approx 0.80$ (što se provjerava uvrštavanjem u jednadžbu).

Ti primjeri dovoljno pokazuju kolika je važno naučiti kad kvadratna jednadžba ima rješenja, te kako se ono određuje. Pritom je vidljivo da će postojati i slučajevi kad problem nema jednoznačno određeno rješenje.

* * *

Nakon uvodnih primjera (koji mogu biti i jednostavniji od ovih) treba napisati kvadratnu jednadžbu s općim koeficijentima i dati imena tim koeficijentima.

Na nizu primjera, poput jednadžbi $x^2 - 4 = 0$, $x^2 + 4 = 0$, $x^2 + 2x + 1 = 0$ treba ukazati na situacije koje možemo očekivati, s obzirom na broj i vrstu rješenja.

Nakon toga se može pristupiti analizi posebnih slučajeva.

2. Jednadžbe posebnog oblika. Vodeći koeficijent a kvadratne jednadžbe uvijek je različit od nule (inače jednadžba nije kvadratna!). Međutim, neki od druga dva koeficijenta (ili oba) može biti jednak nuli.

Te je slučajeve dobro razmotriti prije rješavanja opće jednadžbe, kako se ne bi dogodilo da se rješenja degeneriranih jednadžbi nalaze preko iste "famozne" formule.

Također, na primjeru degenerirane jednadžbe se mnogo jasnije vidi da je problem rješavanja kvadratne jednadžbe ekvivalentan problemu faktorizacije kvadratnog trinoma, a ta se važna činjenica ponekad potpuno zanemaruje i učenici nikad ne postanu svjesni toga.

U udžbeniku nije korištena faktorizacija pri rješavanju jednadžbe $ax^2 + c = 0$. razlog tome je što ona postaje nespretna pri rješavanju konkretnih jednadžbi. Uočimo koliko je sljedeći način rješavanja nepregledan:

$$\begin{gathered}2x^2 + 5 = 0,\\ x^2 + \frac{5}{2} = 0,\\ \left(x + i\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(x - i\sqrt{\frac{5}{2}}\right) = 0,\\ x_1 = -i\sqrt{\frac{5}{2}}, \qquad x_2 = i\sqrt{\frac{5}{2}}\end{gathered}$$

Ni faktorizacija u realne faktore nije mnogo preglednija. Zato je bolje utvrditi automatizmom da jednadžba

$$x^2 = k$$

na koju se prethodni oblik svodi uvijek ima *dva rješenja suprotnih predznaka*. Karakter tih rješenja ovisi o predznaku broja k.

Ipak, korisno je s vremena na vrijeme primijeniti i sljedeći postupak kad se na njega naiđe:

$$\begin{gathered}x^2 - 4 = 0,\\ (x + 2)(x - 2) = 0,\\ x_1 = -2, \qquad x_2 = 2.\end{gathered}$$

Pri tom treba naglasiti svaki put da se iz faktorizacije trinoma mogu pročitati rješenja jednadžbe.

Za vježbanje ovog tipa jednadžbi na satu je dovoljno riješiti primjer 3. i zadatak 2. iz udžbenika, strana 32./33.

* * *

Ako je slobodni koeficijent jednak nuli, tad trebamo riješiti jednadžbu

$$ax^2 + bx = 0.$$

Nju rješavamo izlučivanjem zajedničkog faktora x.

Domaći rad. Manje-više slučajan izbor među zadacima 1.–8. str. 35. (npr. svi neparni podzadaci ili sl.).

2.2. Rješenja kvadratne jednadžbe

Broj sati: 3 / 3

Ciljevi i zadaci

– usvojiti formulu za rješavanje kvadratnih jednadžbi;
– naučiti postaviti kvadratnu jednadžbu u problemima drugog stupnja.

Pojmovi: Svođenje na potpuni kvadrat. Normirani oblik kvadratne jednadžbe. Rješenja kvadratne jednadžbe. Problem drugog stupnja.

Metodička razrada

1. Svođenje na kvadratni trinom. Do formule za rješenja opće kvadratne jednadžbe dolazi se svođenjem kvadratnog trinoma na potpuni kvadrat. Iako se taj postupak nikad nakon toga ne primjenjuje pri rješavanju kvadratne jednadžbe, treba napraviti potpuni izvod ovih formula. Najprije na konkretnim primjerima (primjer 1. i primjer 2. iz udžbenika), a zatim i u općem slučaju. Naime, tehnika svođenja na potpuni kvadrat važna je metoda koja se susreće pri različitim problemima i treba je dobro usvojiti.

Domaći rad. Izbor iz zadataka 1, 2, 3. i 4, za prvu domaću zadaću.

2. Vježbanje. Nakon izvođenja formule za rješenja kvadratne jednadžbe, treba je izvježbati na nizu primjera. Primjer 3. i zadatak 1. u udžbeniku bit će dovoljni. (Ne zaboravimo da se primjeri i zadaci razlikuju samo po tome što se pretpostavlja da se primjer rješava na ploči, dok je rješavanje zadataka prepušteno samostalnom radu učenika.)

Formula za rješavanje kvadratne jednadžbe zadane u normiranom obliku je "simpatična" formula bez koje se može preživjeti pa ju je bolje preskočiti dok se temeljna formula potpuno ne usvoji. Ni nakon toga ne treba forsirati ovu "jednostavniju" formulu.

Domaći rad. Drugu zadaću izabrati među zadacima 12.–18.

3. Problemi drugog stupnja. Na nizu primjera izvježbati postavljanje kvadratne jednadžbe i analizu dobivenih rješenja. Primjeri 4.–9. navedeni u udžbeniku pokrivaju tipične situacije.

Pri ponavljanju kompletne cjeline, treba se ponovo vratiti i uraditi primjere koji se ne stignu u prvom navratu.

Domaći rad. Izbor među zadacima 19.–46.

2.3. Diskriminanta kvadratne jednadžbe

Broj sati: 2 / 2

Ciljevi i zadaci

– uočiti značenje diskriminante za prirodu rješenja kvadratne jednadžbe;
– upoznati se sa složenijim primjerima u kojima se zahtijeva analiziranje rješenja.

Pojmovi: Diskriminanta kvadratne jednadžbe

Metodička razrada

Ova kratka točka je nastavak na prethodnu. Definiciju diskriminante treba dati u trenutku kad su učenici dobro ovladali primjenom formule za rješavanje kvadratne jednadžbe. Na satu se stigne, uz primjere iz udžbenika, obraditi i dio zadataka za vježbu. U tu svrhu bi bilo korisno napraviti temeljito još neki među zadacima 2.–11.

Domaći rad. U dvije domaće zadaće može se zadati većina zadataka ove točke.

2.4. Vièteove formule

Broj sati: 4 / 4

Ciljevi i zadaci

– naučiti Vièteove formule;
– utvrditi vezu faktorizacije trinoma i rješenja kvadratne jednadžbe;
– izvježbati rješavanje složenijih zadataka vezanih uz rješenja kvadratnih jednadžbi;
– riješavati primjere u kojima se javljaju simetrični algebarski izrazi.

Pojmovi: Vièteove formule. Faktorizacija kvadratnog trinoma.

Metodička razrada

Vièteove formule općenito su primjer simetričnih formula koje povezuju nultočke polinoma s njegovim koeficijentima. Njihova direktna primjena možda je najjasnija u zadacima u kojima se rješavanje sustava simetričnih jednadžbi svodi na rješavanje jedne algebarske jednadžbe višeg stupnja. Na primjer, rješavanje sustava

$$\begin{aligned} x+y+z&=7,\\ xy+yz+zx&=14,\\ xyz&=8 \end{aligned}$$

ekvivalentno je rješavanju algebarske jednadžbe trećeg stupnja

$$x^3-7x^2+14x-8=0.$$

Jedno rješenje ove jednadžbe je $x=1$, što vidimo neposrednim uvrštavanjem. Preostala dva rješenja su brojevi 2 i 4. Rješenje početnog sustava je bilo koja permutacija trojke $(1,2,4)$.

Vièteove formule su nadalje važne jer daju identitete koje moraju zadovoljavati uglavnom nepoznata rješenja algebarske jednadžbe, a koji mogu biti od velike koristi. Klasični izvod tih formula temelji se na poznavanju *osnovnog stavka algebre*, prema kojem polinom ima onoliko nultočaka koliki mu je stupanj (brojeći njihovu višestrukost). To znači da se svaki polinom stupnja n može faktorizirati na način

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

pri čemu su $x_1,\ldots,x_n$ (sve) njegove nultočke. Množeći polinom zdesna i koristeći stavak o jednakosti polinoma, zaključujemo da vrijede jednakosti:

$$\begin{aligned} x_1+x_2+\ldots+x_n&=-\frac{a_{n-1}}{a_n},\\ x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n&=\frac{a_{n-2}}{a_n},\\ &\vdots\\ x_1x_2\cdots x_n&=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

Ovaj uvod sugerira da se pri prvom susretu s Vièteovim formulama mora pristupiti na drukčiji način. U ovom nam trenutku nije poznat ni osnovni stavak algebre, ni faktorizacija kvadratnog trinoma, ni stavak o jednakosti polinoma. Međutim, za razliku od opće algebarske jednadžbe, jednadžbu drugog stupnja umijemo riješiti egzaktnim formulama. Stoga ćemo u izvodu i analizi Vièteovih formula postupiti upravo suprotno!

Vièteove formule ćemo izvesti eksplicitno, primjenom formula za rješenja kvadratne jednadžbe pa ćemo ih iskoristiti da dokažemo faktorizaciju kvadratnog trinoma!

1. Izvod Vièteovih formula. Simetrične funkcije i izrazi. Taj izvod treba napraviti, na način kako je to učinjeno u udžbeniku. Kao direktna primjena tih formula naveden je primjer 1, u kojem se računaju vrijednosti elementarnih simetričnih izraza $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$ i $x_1^2+x_2^2$, a da se ne određuju posebno x_1 i x_2.

Princip simetrije jedan je od temeljnih principa na kojima se zasnivaju mnoge pojave, i treba razvijati osjećaj za primjenu simetričnih formula gdje god i kad god je to moguće.

Funkcija n varijabli $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ je *simetrična* ako se njezine vrijednosti ne mijenjaju bilo kojom permutacijom njezinih argumenata.

Među svim simetričnim funkcijama izdvojit ćemo sljedeće:

$$\begin{aligned}
&S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n,\\
&S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n,\\
&\quad\vdots\\
&S_n = x_1x_2\cdots x_n
\end{aligned}$$

Ovaj odabir je načinjen upravo radi veza ovih simetričnih funkcijama s nultočkama polinoma

$$x^n - S_1x^{n-1} + S_2x^{n-2} - \ldots \pm S_n.$$

Elementarnim transformacijama mnoge druge simetrične funkcije možemo prikazati pomoću ovih n funkcija. Evo nekih primjera koji su povezani s polinomom drugog stupnja. Jednostavnosti zapisivanja radi, označimo te dvije simetrične funkcije ovako:

$$\begin{aligned}
x + y &= u,\\
xy &= v.
\end{aligned}$$

Onda je, na primjer

$$\begin{aligned}
x^2+y^2 &= (x+y)^2 - 2xy = u^2 - 2v,\\
x^3+y^3 &= (x+y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = u^3 - 3uv,\\
x^4+y^4 &= (x+y)^4 - 4x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 = (x+y)^4 - 4xy(x^2+y^2) - 6x^2y^2\\
&= u^4 - 4v(u^2-2v) - 6v^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2,\\
\frac{1}{x}+\frac{1}{y} &= \frac{x+y}{xy} = \frac{u}{v},
\end{aligned}$$

itd.

U primjerima i zadacima iz udžbenika dovoljno je poznavati ove veze.

* * *

Vièteove formule koristimo i u zadacima različitih tipova u kojima se govori o svojstvima nultočaka kvadratne funkcije.

Primjer 1. Ako je $x = 2$ jedno rješenje jednadžbe

$$x^2 + mx + 6 = 0,$$

koliko je drugo rješenje i koliki je broj m?

Primjer je riješen u udžbeniku. Možda je korisno spomenuti da je još važnije rješenje u kojem se odgovara na pitanje postavljeno u obratnom poretku: koliki je broj m i koliko je drugo rješenje.

Ako se postavi pitanje u tom poretku, vrlo često će prvi korak koji će učenik postaviti biti jednadžba

$$\frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 24}}{2} = 2.$$

Dakako da se njezinim rješavanjem dobiva točan odgovor $m = -5$, ali ovaj primjer pokazuje da famozna "formula" zasjenjuje sve drugo što se o kvadratnoj funkciji treba znati. Ovdje je dakako dovoljno uvrstiti $x = 2$ u jednadžbu funkcije, jer je to *njezina nultočka*:

$$2^2 + m \cdot 2 + 6 = 0 \implies m = -5.$$

Nakon toga se, primjenom Vièteove formule (bilo koje) odredi drugo rješenje $x_2 = 3$.

Istom idejom se rješava i zadatak 5. iz udžbenika (strana 40.). Jedno rješenje jednadžbe

$$ax^2 + (b + c)x - (a + b + c) = 0$$

je $x_1 = 1$, a drugo rješenje je onda $x_2 = -1 - \dfrac{b + c}{a}$. Znajući to, sugerirajte učenicima da sad do tih rješenja dođu primjenom formule za rješenja kvadratne jednadžbe.

Domaći rad. Izbor među zadacima 1.–9. Boljim učenicima može se predložiti da samostalno rješavaju zadatke 11.–13.

2. Faktorizacija kvadratnog trinoma. Rješavajući kvadratnu jednadžbu svođenjem na potpuni kvadrat jasno je da smo tim postupkom utvrdili sva njezina rješenja. Ipak, primjenom Vièteovih formula, na način kako je to učinjeno u udžbeniku, možemo dokazati temeljni identitet

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

tj. posljedicu osnovnog stavka algebre za polinom drugog stupnja. Od ovog trenutka nadalje treba uvijek sugerirati da se kvadratna jednadžba može rješavati i faktorizacijom kvadratnog trinoma. Neke je jednadžbe jednostavnije rješavati na taj način:

$$x^2 - 5x + 6 = 0,$$

jer je $x_1 + x_2 = 9$, $x_1 x_2 = 14$

$$(x - 2)(x - 3) = 0,$$
$$x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

To će općenito biti slučaj s jednadžbama oblika

$$x^2 - mx + n = 0$$

kad su vidljivi brojevi x_1 i x_2 kojima je zbroj jednak m a umnožak n.

$$
\begin{aligned}
x^2 - 9x + 14 = 0 &\implies x_1 = 2, \quad x_2 = 7,\\
x^2 - 7x + 6 = 0 &\implies x_1 = 1, \quad x_2 = 6,\\
x^2 - 8x + 15 = 0 &\implies x_1 = 3, \quad x_2 = 5.
\end{aligned}
$$

Među primjerima u ovoj točki treba napraviti primjer 6. u kojem se utvrđuje veza rješenja i faktorizacije kvadratnog trinoma. Primjeri 7, 8. i 9. nisu od fundamentalne važnosti i smiju se preskočiti.

Domaći rad. Izbor među zadacima 14.–16.

Zadaci 17.–33. neka posluže za ponavljanje i vježbu prije pismenog ispita.

3. Simetrične jednadžbe. Jedna od jednostavnih i očitih primjena Vieteovih formula vezane su uz sustave simetričnih jednadžbi s dvije nepoznanice. Primjeri 8. i 9. pokazuju na koji se naqv cin očekuje da će se rješavati takvi sustavi.

I kasnije, tijekom učenja matematike pojavljivat će se sustavi simetričnih jednadžbi i uvijek je dobro primjenjivati ovaj postupak.

Za vježbu i domaću zadaću napraviti izbor zadataka 32. i 33. na str. 57.

2.5. Bikvadratna jednadžba

Broj sati: 1 / 2

Ciljevi i zadaci

– usvojiti pojam algebarske jednadžbe $n-$ tog stupnja;
– naučiti rješavati bikvadratnu jednadžbu.

Pojmovi: algebarske jednadžbe $n-$ tog stupnja, bikvadratna jednadžba

Metodička razrada

Mnoge jednadžbe rješavaju se svođenjem na kvadratnu. U udžbeniku i zadacima navedeni su najvažniji primjeri.

Općenito, algebarske jednadžbe višeg reda, kao i sustavi jednadžbi, teški su za rješavanje. Tu činjenicu svakako treba naglasiti učenicima. Algebarske jednadžbe trećeg i četvrtog reda mogu se riješiti eksplicitnim formulama[1], međutim, te su formule prekomplicirane i nezgrapne za korištenje. Algebarska jednadžba petog stupnja općenito se ne može riješiti pomoću radikala. Dakako, to isto vrijedi i za sve jednadžbe stupnja većeg od 5. Eksplicitnim formulama možemo riješiti samo neke specijalne slučajeve tih jednadžbi (poput binomnih, simetričnih i sl.)

Uvod u obradu možemo provesti rješavanjem Primjera 1. Taj je primjer osobito instruktivan jer ukazuje kako se na spretan način može uspješno riješiti jedan složen zadatak. S druge strane, supstitucija je postupak koji se vrlo često primjenjuje u matematici i dobro ga je vježbati uvijek iznova.

Domaći rad. Izbor zadataka 2.5.

[1] Kažemo: pomoću radikala, jer se pod formulama podrazumijevaju algebarski izrazi koji obuhvaćaju i računanje korijena.

2.6. Uporaba računala pri rješavanju kvadratnih jednadžbi

Broj sati: 0 / 0

Ciljevi i zadaci

– osposobljavanje učenika za korištenje džepnog računala.

Metodička razrada

Ova je tema napisana samo u udžbeniku za prirodoslovne gimnazije. Dakako da se takva tema ne nalazi u nastavnom planu, jer se valjda podrazumjeva da je tehnika služenja džepnim računalom sama po sebi jasna (ili pak o džepnom računalu sastavljači programa i nisu previše razmišljali).

Istina je da će kroz srednju školu učenici zaista naučiti koristiti svoje računalo, ali je jednako ako istina da će mnogi naučiti to raditi na pogrešan način, jer nisu na vrijeme bili ispravno podučeni.

Stavili smo ovu temu u udžbenik da naglasimo kako je problem ispravnog računanja važan i ne treba ga preskakati.

Obrada ove cjeline može se napraviti tako da se učenicima za domaći rad zada da je sami polako pročitaju prateći na svom računalu postupke koji su navedeni u udžbeniku. Drugi sat će nastavnik napraviti kratki test s nekoliko primjera kvadratnih jednadžbi koje učenici trebaju sami riješiti uz pomoć računala.