1.

Kut i brojevna kružnica

(3 / 3 sati)

Nastava matematike u trećem razredu tradicionalno se dijeli u dvije velike cjeline — trigonometriju i analitičku geometriju. Svaka od njih obrađuje se približno jednako vrijeme, po jedno polugodište.

Uvodni dio trigonometrije, trigonometrija pravokutnog trokuta, napravljen je u drugom razredu. Na taj se dio prirodno nastavljaju poučci o trokutu i primjena trigonometrije u planimetriji, no to su posljednja poglavlja 'velike' trigonometrije. Tako je ovdje naglasak dan na trigonometrijskim funkcijama kao funkcijama realnog argumenta. Tome je prilagođen redoslijed izlaganja gradiva.

Gdje god je bilo moguće, dali smo važnost primjerima. Riječ je o području matematike koje je uvijek kroz povijest imalo svoju praktičnu primjenu, pa smo nastojali izborom primjera i načina izlaganja tome dati primjerenu važnost.

Džepno računalo neizbježno je pomagalo bez kojeg je nemoguće učiti trigonometriju. Iako su učenici trebali doći u ovaj razred sa znanjem korištenja računala u trigonometriji, ovaj udžbenik to ni u jednom trenutku ne pretpostavlja. Svi bitni koraci računa objašnjeni su ponovo. Nastavnik treba provjeriti jesu li svi učenici osposobljeni za numeričko računanje i mora pomoći tamo gdje to nije slučaj.

U prvom se poglavlju upoznajemo s orijentiranim kutom i njegovom radijanskom mjerom.

Ciljevi i zadaci

– Utvrditi pojam kuta i glavne mjere;
– shvatiti odnos svih mjera kuta i njegove glavne mjere;
– izvježbati pretvorbe dijelova kuta na računalu;
– naučiti što je radijanska mjera kuta te pretvorbu u stupnjeve i obratno.

Pojmovi: Kut. Mjera kuta. Glavna mjera kuta. Stupnjevi. Radijani. Eksponencijalno preslikavanje. Brojevna kružnica.

1.1. Kut

Broj sati: 1 / 1

Metodička razrada

Uvodno ponavljanje može biti kratko. Pojam kuta učenicima je poznat, a ponavljanje ima svrhu da naglasi razliku koja će uslijediti. U dosadašnjoj definiciji, kut je bio podskup ravnine, njegova mjera pozitivan broj iskazan u stupnjevima.

Novi pojam kuta povezan je s vrtnjom zrake oko njene početne točke. Stoga se u definiciji inzistira na pojmu *uređeni par zraka*, jer to uistinu dobro opisuje kut dobiven rotacijom jedne zrake, a u odnosu na drugu, fiksnu zraku. Taj će novi pojam *orijentiranog kuta* učenici lako prihvatiti. Jednako tako će shvatiti i mjeru kuta u stupnjevima. Nju treba ilustrirati s nekoliko tipičnih crteža na kružnici, birajući standardne mjere kutova.

Nešto je teži problem određivanja glavne mjere kuta. Možemo kazati da je danas važnost tog određivanja smanjena jer više nije nužno pri određivanju vrijednosti trigonometrijskih funkcija svoditi kut u prvi kvadrant. Taj je postupak sve donedavno bio obvezan, jer su u tablicama vrijednosti trigonometrijskih funkcija bile dane samo za kutove iz prvog kvadranta.

Način računanja glavne mjere kuta objašnjen je u udžbeniku. Tu se pretpostavlja da će se računi prema potrebi izvoditi i na džepnom računalu. Stoga je način računanja glavne mjere iskazan preko funkcije najveće cijelo.

Nakon primjera iz udžbenika, učenici će sami riješiti Zadatak 2.

Domaći rad. Izbor iz zadataka 1.1.

1.2. Radijanska mjera kuta

Broj sati: 1 / 1

Metodička razrada

Drugi sat trigonometrije treba uvesti novu, radijansku mjeru kuta. Nakon definicije kuta od 1 radijan, definirat ćemo opću radijansku mjeru i njezinu vezu s mjerom u stupnjevima.

Prva varijanta udžbenika pisana je bez pripadnog prirucnika. Tako su se neke metodičke napomene nasle u udžbeniku, iako bi im prikladnije mjesto bilo prirucnik. Jedna takva napomena sad je iz udžbenika prebačena ovdje:

“Radijanska mjera kuta realni je broj. Ako je pogodno, ostavljamo u njegovu zapisu broj π. Rezultat zaokružujemo obično na dvije do pet decimala, ovisno o potrebnoj preciznosti. Iako je onda riječ o približnoj vrijednosti mjere kuta, uobičajeno je ipak pisati znak jednakosti. Tako ćemo (u gornjem primjeru) pisati $20^\circ = 0.349$ rad umjesto ispravnijeg zapisa $20^\circ = 0.349\cdots$ rad ili $20^\circ \approx 0.349$ rad.

Također, često izostavljamo oznaku jedinice (rad) u zapisu mjere kuta, i pišemo samo $\alpha = 0.349$, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ i slično.

Računanje sa stupnjevima ima neke prednosti, ali i mane. Stupanj je intuitivno jasniji pojam od radijana: imamo jasnu predodžbu o tome koliki je kut od 115°, no rijetko će tko uočiti da je on približno isti kao i kut od 2 radijana. Problemi pri računanju sa stupnjevima dolaze zato što se podjela na manje jedinice čini u heksadekadskom sustavu: jedan stupanj ima 60 minuta, a jedna minuta 60 sekundi. To pri računanju stvara poteškoće, jer mjeru kuta zadanu u stupnjevima minutama i sekundama prije određivanja radijanske mjere moramo pretvoriti u mjeru zadanu samo u stupnjevima."

Slika kružnice u Kartezijevom pravokutnom sustavu, s naznačenom radijanskom mjerom vrlo je važna. Učenici moraju praktički napamet naučiti položaj tih istaknutih kutova, jer će im to u nastavku trigonometrije biti od velike koristi.

Jednako tako treba naučiti odnos mjere u stupnjevima s mjerom u radijaniuma za istaknute kutove dane u tablici u udžbeniku.

Ostatak sata provest će se u vježbanju pretvorbi radijanske mjere u mjeru u stupnjevima i obratno.

Obratite posebno pozornost jesu li svi učenici naučili pretvorbu minuta i sekunda u dijelove stupnja i obratno. Tu pretvorbu su inače trebali naučiti u drugom razredu.

Pretvorba dijelova stupnja u minute i sekunde lakša je pomoću džepnog računala. Svako iole bolje računalo ima ugrađenu tu funkciju. Neka učenici na temelju primjera u udžbeniku provjere kako se to radi na njihovom računalu. Bilo bi vrlo nespretno taj, a i obratni postupak, provoditi 'pješice'.

Domaći rad. Učenici koji nisu sigurni u tehnici računanja, neka pomno pročitaju gradivo u udžbeniku prateći upute u njemu. Zatim riješiti zadatke 1.–6.

1.3. Brojevna kružnica

Broj sati: 1 / 1

Metodička razrada

Pri pisanju udžbenika postavljalo se pred autore pitanje koliko detaljno treba ući u razradu ove teme. Napisani tekst treba promatrati prvenstveno s aspekta činjenice da će se udžbenikom služiti učenici vrlo različitih sposobnosti i interesa za matematiku. Pri tom je osnovni moto autora bio da sve ono što je napisano bude logički potpuno ispravno. Ako se nešto zbog uzrasta učenika ili predviđenog vremena ne može potpuno korektno objasniti, onda se to mora i naglasiti.

Pitanje korektnosti definicije mjere kuta spada u jedno od tih područja, gdje se možda nepotrebno inzistira na matematičkoj strogosti.

Zato je pojam sukladnosti kutova, koji je nužan za potvrdu ispravnosti definicije mjere kuta, ostavljen samo u udžbenicima prirodoslovne gimnazije. Taj je pojam povezan s operacijama translacije i rotacije, jer je taj pristup blizak pojmu orijentiranog kuta.

Isto tako, smatramo da u općim gimnazijama i tehničkim školama ne treba previše vremena posvetiti pojmu eksponencijalnog preslikavanja. Sasvim je dovoljna Slika na str. 16. iz Udžbenika, koju treba dovesti u vezu s već poznatim radijanskim mjerama kuta. Na taj način se ova cjelima može interpretirati kao nastavak vježbanja s radijanskom mjerom kuta.

Domaći rad. Izbor među zadacima 1.–6.

2.

Trigonometrijske funkcije

(15 / 21 sati)

Pri definiranju trigonometrijskih funkcija realnog argumenta (‘bilo kojega kuta’) ne treba eksperimentirati. Trigonometrijska (brojevna) kružnica je poznata, kordinate svake njezine točke definiraju sinus i kosinus realnog broja (kuta) — i to je to.

Dilemu na koji način definirati tangens i kotangens riješili smo u korist geometrije, držeći se dakle istog načela kao za sinus i kosinus. Nakon definicije izvest će se onda temeljna veza tangensa sa sinusom i kosinusom.

Iako kratko, ovo je poglavlje bogato sadržajima i treba ih usvajati polako. Ukoliko predviđeni broj sati ne bude dovoljan, posudite još sat ili dva, jer temelje kuće treba dobro betonirati.

Ciljevi i zadaci

– Naučiti definicije trigonometrijskih funkcija;
– zapamtiti vrijednosti tih funkcija za neke istaknute kutove;
– utvrditi temeljne veze među trigonometrijskim funkcijama;
– upoznati svojstvo parnosti, odnosno neparnosti trigonometrijskih funkcija;
– izvesti tablicu pretvorbi trigonometrijuskih funkcija;
– naučiti pojam periodičnosti i temeljnog perioda, zapamtiti temeljne periode trigonometrijskih funkcija.

Pojmovi: Trigonometrijske funkcije. Parnost, neparnost. Trigonometrijski identiteti. Periodična funkcija, period, temeljni period.

2.1. Definicija trigonometrijskih funkcija

Broj sati: 3 / 3

Metodička razrada

Nakon kratkog prisjećanja na definiciju trigonometrijskih funkcija pravokutnog trokuta, korisno je prisjetiti se vrijednosti tih funkcija za kutove od 30°, 45° i 60°. Zatim treba povezati stupnjeve s radijanskim mjerama i napisati vrijednosti trigonometrijskih funkcija radijanskih mjera kuta.

Na prvom satu razrade ove teme treba obraditi definicije funkcija sinus i kosinus. Obje se definicije uvode istovremeno, jer su sinus i kosinus koordinate točke na trigonometrijskoj funkciji. Međutim, u nastavku je bolje na nizu sličica najprije ilustrirati promjenu sinusa kad točka putuje po trigonometrijskoj kružnici i naznačiti vrijednost sinusa u tablici koja je napisana u udžbeniku. Nakon toga isto treba načiniti i s kosinusom.

Domaći rad. Izbor zadataka 1.– 8.

* * *

U drugom školskom satu obradit ćemo definiciju tangensa i kotangensa i popuniti tablicu njihovih vrijednosti.

Domaći rad. Izbor iz preostalih zadataka iz skupa 2.1., koji dotad nisu obrađeni.

2.2. Određivanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija

Broj sati: 1 / 2

Metodička razrada

Trigonometrijske funkcije su transcedentalne, njihove se vrijednosti ne mogu dobiti s konačno mnogo algebarskih operacija (osim u vrlo rijetkim posebnim slučajevima).

Učenje trigonometrije je besmisleno ako učenika ne osposobi u praktičnom računu. Praktičan račun danas traži služenje džepnim računalom. Zato smo u jednom poglavlju, dovoljno rano, nastojali objasniti sve bitne korake u tom računu.

To se posebno odnosi na računanje vrijednosti kuta. Tu se uvode pojmovi arkus sinusa i arkus tangensa, ali *isključivo na nivou oznaka,* jer se iste oznake nalaze na većini džepnih računala. Na način kako je napisano u udžbeniku, učenik ne bi smio imati problema s razumjevanjem ovih pojmova i nije potrebno govoriti ništa o arkus funkcijama kao realnim funkcijama inverznim trigonometrijskim (o tome će biti riječi u četvrtom razredu, i to samo za program prirodoslovnih gimnazija).

Računanje vrijednosti kuta zapravo je rješavanje najjednostavnije trigonometrijske jednadžbe. U većini slučajeva, to će biti jedine trigonometrijske jednadžbe koje će učenici u nastavku školovanja ikad sresti. Zato i ovo poglavlje treba obraditi vrlo temeljito i dovoljno dugo dok se ne uvjerite da su svi učenici usvojili tehniku računanja.

Učenici su u prethodnom razredu naučili računati vrijednosti trigonometrijskih funkcija pomoću računala (za kutove iz prvog kvadranta). Pri razradi ove teme nije se međutim potrebno pozivati na takvo eventualno predznanje.

Korisno je ukratko spomenuti problem računanja vrijednosti trigonometrijskih funkcija, te kako se to računanje vršilo kroz povijest. Naglasite važnost koje su numeričke tablice imale kroz povijest. (Donesite u razred primjerak "logaritamskih tablica", ako uspijete pronaći još koji!).

Razradu ove teme najbolje je načiniti tako da se prepusti samostalnom radu učenika. Postupci računanja objašnjeni su detaljno u Udžbeniku. Najkorisnije je da ih svaki učenik samostalno pročita i uvježba istovremeno na svom računalu, (Ne zaboravite unaprijed najaviti da se računala moraju donijeti.) Intervenirajte samo tamo gdje se eventualno pojave problemi.

Različitost džepnih računala koje učenici posjeduju svakako će stvoriti problem u obradi ove teme, upravo zato se treba inzistirati na samostalnom računanju. To, dakako, može uzrokovati da za obradu ove teme treba utrošiti sat više.

Upravo radi toga u udžbeniku je naveden dovoljan broj primjera na temelju kojih učenici mogu usvojiti tehniku računanja.

Domaći rad. Zadaci 4.–8. Obvezno je načiniti sve predviđene zadatke.

2.3. Računanje vrijednosti kuta

Broj sati: 2 / 2

Metodička razrada

Određivanje kuta zahtijeva nešto više pozornosti od računanja vrijednosti trigonometrijske funkcije.

Na uvodnom Primjeru 1. treba opisati sva rješenja jednadžbe $\sin\alpha = \frac{1}{2}$. Tu treba uočiti da je dovoljno odrediti jednu vrijednost kuta i onda pomoću nje se računaju sve ostale.

Ako je zadana vrijednost y sinusa kuta α i tražimo koliki je kut a, onda će računalo dati iznos kuta koji se nalazi unutar intervala $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Taj se kut označava s $\alpha = \arcsin y$.

Prije svega, učenici moraju dobro izvježbati postupak računanja arkus sinusa, za po volji odabranu vrijednost sinusa. Pri tom kut treba iskazati u stupnjevima, minutama i sekundama, ali i u radijanima. Treba napraviti dovoljno jednostavnih primjera dok se postupak računanja kuta ne automatizira. Riječ je o postupku koji traje najviše petnaestak sekunda (namještanje računala u odgovarajući mod — stupnjevi ili radijani, računanje kuta i prema potrebi pretvaranje u dijelove stupnja).

Zatim, vrijednosti kuta trebaju se naći direktno ako su vrijednosti sinusa jednake 0, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, ± 1. To su jedine situacije kad za računanje ne koristimo računalo.

Nakon što se izvježba ovaj račun, treba izvježbati zapisivanje skupa svih rješenja jednadžbe $\sin\alpha = y$.

* * *

Drugi sat se naučeno proširuje na računanje kuta iz poznatih vrijednosti preostale tri trigonometrijske funkcije.

Koncepcija rada po udžbeniku identična je kao u prethodnom satu, s tim da se postupak određivanja vrijednosti arkus funkcije računalom ne treba toliko detaljno objašnjavati, jer se ne razlikuje od prethodnog.

Slika trigonometrijske kružnice će pomoći da se lako nauči zapisivanje skupa rješenja temeljne jednadžbe.

2.4. Osnovni trigonometrijski identiteti

Broj sati: 3 / 4

Metodička razrada

U moru formula i trigonometrijskih identiteta najvažnija su tri osnovna:

$$\sin^2 t + \cos^2 t; \quad \operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}; \quad \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{ctg} t.$$

Njih bi trebao zapamtiti svaki učenik te ih spretno primjenjivati u raznim zadacima.

Transformacije trigonometrijskih izraza jedan je od važnih postupaka. U ovom trenutku broj identiteta je još malen pa bi bilo važno uvježbati neke njihove standardne primjene. Zbog toga je na kraju ove točke dan bogat izbor zadataka za vježbu koje bi trebalo rješavati u nizovima.

Danim osnovnim identitetima povezuju se međusobno trigonometrijeke funkcije i zadaci iz tog područja poslužit će i za utvrđivanje definicija trigonometrijskih funkcija kao i njihovih osnovnih svojstava.

Tablicu pretvorbi ne treba učiti napamet. Učenicima treba dopustiti da se pri rješavanju zadataka koriste pomoćnim formulama. Međutim, od njih treba zahtijevati da znaju izvod svih tih formula, jer će na taj način moći reproducirati svaku od njih kad im to zatreba.

Ove veze koriste se npr. pri računanju integrala, jer su trigonometrijske supstitucije standardni postupak svođenje integrala s trigonometrijskim funkcijama na integrale racionalnih funkcija.

Ostane li vremena na satu, mogu se napraviti parni podzadaci zadataka 4 i 5.

Domaći rad.
Izbor zadataka 21.–28.

2.5. Svojstva trigonometrijskih funkcija

Broj sati: 2 / 4

Metodička razrada

Nastavnik će prema predznanju učenika objasniti općenito pojam parnosti i neparnosti funkcije. U ovom trenutku ne treba to interpretirati grafom funkcije, jer još nismo obradili grafove trigonometrijskih funkcija. Svojstva parnosti i neparnosti trigonometrijskih funkcija valja vezati uz razmatranja na brojevnoj kružnici. (Razrada svojstva parnosti i neparnosti će pomoći pri crtanju grafa.) Jesu li učenici razumjeli definiciju možete provjeriti na temelju ovog primjera:

Primjer 1. Koje su od sljedećih funkcija parne, a koje neparne:

1) $f(x) = x + x^2$;

2) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2$;

3) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 13$;

4) $f(x) = x^3 + 2x - 1$;

5) $f(x) = x|x|$;

6) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;

7) $f(x) = \sqrt{x^4 - 3}$;

8) $f(x) = \sqrt[3]{x - x^3}$;

9) $f(x) = \dfrac{1}{4x^2 - 3}$;

10) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$;

11) $f(x) = \dfrac{a^{2x} - 1}{a^x}$;

12) $f(x) = \ln \dfrac{x + 3}{x - 3}$.

Parne su funkcije u zadacima **2**, **3**, **6**, **7**, **9** neparne pod **5**, **8**, **10**, **11**, **12**, a funkcije u zadacima **1**, **4** nisu niti parne, niti neparne. Račun teče ovako:

1) $f(x) = x + x^2$

$$f(-x) = -x + (-x)^2 = -x + x^2 \implies \text{ni parna, ni neparna;}$$

2) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2$

$$f(-x) = (-x)^4 + 3(-x)^2 - 2 = x^4 + 3x^2 - 2 = f(x) \implies \text{parna;}$$

3) $f(x) = 2x^4 - x^2 + 13$

$$f(-x) = 2(-x)^4 - (-x)^2 + 13 = 2x^4 - x^2 + 13 = f(x) \implies \text{parna;}$$

4) $f(x) = x^3 + 2x - 1$

$$f(-x) = (-x)^3 + 2(-x) - 1 = -x^3 - 2x - 1 \implies \text{ni parna ni neparna;}$$

5) $f(x) = x|x|$

$$f(-x) = -x|-x| = -x|x| = -f(x) \implies \text{neparna;}$$

6) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$$f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} = f(x) \implies \text{parna;}$$

7) $f(x) = \sqrt{x^4 - 3}$

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^4 - 3} = \sqrt{x^4 - 3} = f(x) \implies \text{parna;}$$

8) $f(x) = \sqrt[3]{x - x^3}$

$$f(-x) = \sqrt[3]{-x - (-x)^3} = \sqrt[3]{-x + x^3} = -\sqrt[3]{x - x^3} = -f(x) \implies \text{neparna;}$$

9) $f(x) = \dfrac{1}{4x^2 - 3}$

$$f(-x) = \frac{1}{4(-x)^2 - 3} = \frac{1}{4x^2 - 3} = f(x) \implies \text{parna;}$$

10) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x}{x^2 - 1} = -f(x) \implies \text{neparna;}$$

11) $f(x) = \dfrac{a^{2x} - 1}{a^x}$

$$f(-x) = \frac{a^{-2x}-1}{a^{-x}} = \frac{\frac{1}{a^{2x}}-1}{\frac{1}{a^x}} = \frac{\frac{1-a^{2x}}{a^{2x}}}{\frac{1}{a^x}} = \frac{1-a^{2x}}{a^x} = -\frac{a^{2x}-1}{a^x} = -f(x) \Longrightarrow \text{neparna;}$$

12) $f(x) = \ln\dfrac{x+3}{x-3}$, $\dfrac{x+3}{x-3} > 0 \implies x \notin [-3, 3]$

$$f(-x) = \ln\frac{-x+3}{-x-3} = \ln\frac{-(x-3)}{-(x+3)} = \ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^{-1} = -\ln\frac{x+3}{x-3} = -f(x) \Longrightarrow \text{neparna.}$$

Na temelju definicije trigonometrijskih funkcija pomoću trigonometrijske kružnice izvode se svojstva parnosti, odnosno neparnosti ovih funkcija.

Periodičnost trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus slijedi izravno iz njihove definicije na trigonometrijskoj kružnici. Isto se može reći i za funkcije tangens i kotangens, ali slika pokazuje da je temeljni period tih funkcija smanjen na π.

Opće svojstvo periodičnosti spominjat će se ponovo u četvrtom razredu, zato sad ne treba navoditi primjera periodičnih funkcija različitih od trigonometrijskih.

Dovoljno je definirati pojam temeljnog perioda i preko primjera 1 i 2 iz udžbenika navesti formulu za temeljni period harmonijske funkcije $t \mapsto \sin(\omega t + \varphi)$.

Domaći rad. Neparni podzadaci zadataka 1.–7.

Domaći rad. Zadaci.