1.

Brojevi

(22 – 27 sati)

1.1. Brojevni sustavi

Broj sati: 3 / 3

Ciljevi i zadaci

– Razumjeti razliku pozicijskog i nepozicijskog brojevnog sustava.
– Usvojiti definiciju brojevnog sustava.
– Znati odrediti zapis broja iz dekadskog sustava u nekom drugom sustavu i obratnu vezu.
– Znati preračunavati brojeve iz jednog od sustava s bazom 2, 8 i 16 u neki drugi od tih sustava.

Pojmovi: Pozicijski zapis broja. Dekadski, binarni, oktalni i heksadekadski sustav. Hornerov algoritam. Tablice zbrajanja i množenja.

Metodička razrada

1. Uvod. U uvodu valja naglasiti povijesnu uvjetovanost razvitka brojevnih sustava. Računanje s velikim brojevima uvjetovalo je dominaciju pozicijskog brojevnog sustava. Učenici moraju uočiti i usvojiti bitnu razliku pozicijskog i nepozicijskog sustava na usporednim primjerima rimskog zapisa broja i dekadskog pozicijskog sustava kojim se koristi suvremeni svijet.

Problem izbora baze brojevnog sustava otvorit ćemo navođenjem jednostavnih primjera (kao što su primjerice sustavi s bazom 60 i 12)[1]. Postavite pitanje što zapravo znači zapis nekog broja u dekadskom sustavu. Zaključak se može proširiti na analogni način na sustav u nekoj drugoj bazi te poopćiti zapis za bilo koju bazu.

Kao prve primjere birat ćemo zadatke u kojima se izravno primijenjuje definicija. Takvi su zadatci 1.–5. te izbor iz zadataka od 11. do 29.

2. Binarni, oktalni i heksadekadski brojevi. Ponoviti definiciju brojevnog sustava te na izboru zadataka 11. do 29. provesti vježbanje. Ukazati na posebnu važnost binarnog brojevnog sustava te na međusobnu povezanost binarnog, oktalnog i heksadekadskog sustava, koja proistječe iz činjenice da su te tri baze prirodne potencije broja 2.

Koristeći se tablicama, učenici će svladati algoritme pretvorbe prirodnih brojeva iz jednog od tih sustava u ostale.

Napomenimo da je obrada brojeva u binarnoj bazi, kao osnovice rada elektroničkog računala, dio sadržaja predmeta *Informatika* u I. razredu srednje škole.

3. Prijelaz iz dekadskog sustava i u dekadski sustav. Ova će se tema različito obrađivati u programima od 3 prema onom od 5 sati.

U prvom programu taj će se prijelaz izvježbati na manjem broju primjera i to direktno prema definiciji brojevnog sustava u bazi b.

[1] Nazivi nekih brojeva u francuskom jeziku sugeriraju da su nastali uporabom baze 20. Tako npr. broj 92 se izgovara '*quatre vingt douze*' što u prijevodu znači 'četiri puta dvadeset plus dvanaest'.

Čak i ako nastavnik želi koristiti algoritme opisane u Udžbeniku, nije potrebno dokazivati njihovu istinitost. Algoritam dijeljenja korisno je rabiti za prijelaz iz dekadskog u binarni sustav.

Hornerov algoritam se također može koristiti a da se ne dokazuje istinitost.

U programima s 5 sati koristit ćemo oba algoritma, a i dokaz se može načiniti.

4. Tablice zbrajanja i množenja. Računanje u nedekadskim brojevnim sustavima u udžbeniku je dano kako bi učenici bolje shvatili princip računanja koji je identičan za sve brojevne sustave. To gradivo u prvom programu nije potrebno obraditi. Pogotovo ne treba učiti tablice množenja, ni u sustavima s malim bazama.

Eventualno se može izvježbati računanje u binarnom sustavu, jer ono ne zahtijeva učenje nove tablice množenja.

U jakom programu korisno je napisati tablice množenja za sustav s bazom 4 i bazom 2. Računanje treba izvoditi samo u binarnom sustavu.

Svakako je dobro, radi utvrđivanja gradiva, proraditi još nekoliko zadataka iz udžbenika. Osobito preporučujemo zadatke 23.–29.

1.2. Matematička indukcija

Broj sati: 3 / 3

Ciljevi i zadaci

– Razumjeti razliku između induktivnog i deduktivnog načina zaključivanja.
– Shvatiti ulogu nepotpune indukcije u matematici.
– Razviti osjećaj za neophodnost dokaza, kao i uočavanje situacija u kojima se dokaz provodi matematičkom indukcijom.
– Usvojiti postupak dokazivanja matematičkom indukcijom jednostavnijih tvrdnji i shvatiti kako je dokaz *matematičkom indukcijom* deduktivni postupak (bez obzira na njegovo ime).

Pojmovi: Matematička indukcija. Induktivni i deduktivni način dokazivanja.

Metodička razrada

1. Uvod. U uvodu valja navesti nekoliko primjera općih tvrdnji do kojih se dolazi nepotpunom indukcijom, od kojih neke nisu točne, a neke još nisu provjerene.

Izreći potom *Princip matematičke indukcije* i zapisati ga. Na temelju toga iskaza, kroz heuristički razgovor, detaljno razraditi *Primjer 3*.

Iskazati i zapisati tekst *Dokaz matematičkom indukcijom*.

Proučiti u udžbeniku *Primjer 4*. Zamoliti učenike da samostalno izrade taj primjer.

Ukoliko je to vremenski izvedivo, na satu je dobro obraditi još neki od zadataka iz Zadatka 1. ili 2. Izbor iz ta dva zadatka preporučuje se i za domaću zadaću.

2. Vježbe. Na početku ponoviti što znači provesti dokaz neke tvrdnje matematičkom indukcijom. Izraditi Primjer 5. kao ilustraciju primjene dokaza u geometriji te navesti još nekoliko geometrijskih tvrdnji koje bi se mogle dokazati matematičkom indukcijom (broj dijagonala u mnogokutu, poopćenja nekih trigonometrijskih relacija i sl.)

Nastaviti s vježbom te riješiti izbor zadataka 1.–6.

Neki zadaci su zgodni jer malo mogu "zbuniti" zbog nešto drukčijeg zapisa. Navedimo primjer Zadatka 3.1.

Primjer 1. Dokaži matematičkom indukcijom da za sve $n \in \mathbf{N}$ vrijedi:

$$1 \cdot 2^n + 2 \cdot 2^{n-1} + 3 \cdot 2^{n-2} + \cdots + n \cdot 2 + (n+1) = 2^{n+2} - (n+3).$$

S lijeve strane jednakosti nalazi se $n+1$ pribrojnik. Kad povećamo broj pribrojnika za 1, neće se, kao u prethodnim primjerima, naprosto dodati samo još jedan pribrojnik istog tipa. Što se događa, možemo pratiti uvrštavanjem redom brojeva 1, 2, 3,... umjesto n.

U svakom slučaju, *korak indukcije* nešto je računski drukčiji nego u prethodno navedenim primjerima:

$$\begin{aligned}1\cdot 2^{n+1}&+2\cdot 2^{n}+3\cdot 2^{n-1}+\cdots+(n+1)\cdot 2+(n+2)\\&=2\cdot(1\cdot 2^{n}+2\cdot 2^{n-1}+3\cdot 2^{n-2}+\cdots+(n+1))+(n+2)\\&=2\cdot(2^{n+2}-(n+3))+(n+2)=2^{n+3}-(n+4).\end{aligned}$$

U istom smislu jednako je tako zanimljiv i Zadatak 16. na sljedećoj stranici.

Primjer 2. Dokaži da je broj $7+7^2+7^3+7^4+\cdots+7^{4n}$ djeljiv sa 100 za svaki prirodni broj n.

U zadatku je bitno uočiti kako je broj pribrojnika djeljiv sa 4. Pri prijelazu od n na $n+1$ dodaju se četiri nova pribrojnika. Evo kako bi teklo rješavanje zadatka:

Baza indukcije. $T(1)$ vrijedi, jer je $7+7^2+7^3+7^4=400$, a taj je broj djeljiv sa 100.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da je tvrdnja istinita za broj n, tj. da vrijedi $7+7^2+7^3+7^4+\cdots+7^{4n}=100m$, gdje je m neki prirodni broj.

Korak indukcije. Dodamo s lijeve strane još četiri pribrojnika pa ćemo imati zbroj

$$\begin{aligned}(7+7^2+7^3+7^4+\cdots+7^{4n})&+7^{4n+1}+7^{4n+2}+7^{4n+3}+7^{4n+4}\\&=100m+7^{4n+1}(1+7+7^2+7^3)\\&=100m+7^{4n+1}\cdot 400.\end{aligned}$$

Dobili smo broj koji je očito djeljiv sa 100, a to smo i imali dokazati.

No možda je ipak vrijedno ukazati na Zadatak 10., poopćeni algoritam kvadriranja binoma, ili pak na Zadatak 11. gdje je riječ o poopćenju nekih svojstava modula. Upravo su to "pravi" primjeri primjene matematičke indukcije.

Posebnu pozornost valja posvetiti formulama iz Zadatka 8. te njihovim primjenama u rješavanju Zadatka 9. S jedne strane zbrojevi potencija javljaju se u raznim situacijama, a s druge se pri primjeni tih formula u Zadatku 8. razvija razumijevanje ovakvih zapisa i navikava na problem izračunavanja konačnih suma.

Primjerice:

Izračunaj sumu

$$S_n=1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2),$$

gdje je n prirodni broj.

Valja uočiti kako je svaki pribrojnik oblika $n(n+1)(n+2)=n^3+3n^2+2n$. Tako je onda ova suma jednaka

$$\begin{aligned}S_n=(1^3+3\cdot 1^2+2\cdot 1)&+(2^3+3\cdot 2^2+2\cdot 2)\\&+(3^3+3\cdot 3^2+2\cdot 3)+\ldots+(n^3+3n^2+2n).\end{aligned}$$

Sada zaključujemo da je

$$\begin{aligned}S_n&=(1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3)+3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+2(1+2+3+\ldots n)\\&=S_3+3\cdot S_2+2\cdot S_1=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2n+1}{3}+1\right)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.\end{aligned}$$

3. Djeljivost. Vježbe. Ovo je još jedna vrsta didaktički vrijednih zadataka koji su jasni i razumljivi po formulaciji pa zbog toga i dostupni učenicima srednje škole, a u kojima se primjenjuje matematička indukcija. Uz to što se na zadacima ove vrste utvrđuje tekuće gradivo, vježbaju se i ponavljaju sadržaji vezani uz djeljivost i računanje s potencijama.

U vježbanju se prorađuje izbor zadataka iz 12. i 13. U istom se smislu odabiru i zadaci za domaću zadaću.

Ukoliko to okolnosti dopuštaju, preporučuje se provesti vježbanje na zadacima 18. i 19. Ti su zadaci poopćenja nekih trigonometrijskih identiteta iz III. razreda. I u njihovu rješavanju potrebno je dobro baratanje tim identitetima. Rješavanje ovih zadataka zahtijeva dosta vremena, pa treba procijeniti hoćemo li ga se prihvatiti ili ne.

Svakako, kao i pri obradi ostalih sadržaja, i u ovom dijelu gradiva rješavanje primjera i zadataka mora mora biti prije svega u svrsi potkrepljivanja i razumijevanja nastavnih sadržaja. Neumjereno teški zadaci i zadaci neprimjereni učenicima tome sigurno neće pomoći. Stoga preporučujemo da teži zadaci budu u funkciji individualizacije, pa se preporučuju za samostalan rad nadarenijim učenicima.

1.3. Binomni poučak

Broj sati: 4 / 4

Ciljevi i zadaci

– Razumjeti ideju poopćenja neke matematičke tvrdnje.
– Usvojiti nove oznake i postupke s tim oznakama (faktorijele, binomni koeficijenti, znak sumacije).
– Naučiti postupak primjene *Binomne formule*.

Pojmovi: Faktorijele. Binomni koeficijenti. Kineski (Pascalov) trokut. Binomni poučak. Znak sumacije.

Metodička razrada

1. Uvod. U uvodu valja posvetiti nekoliko riječi ulozi poopćenja u matematici. Kad je riječ o potenciranju polinoma, poopćenje ide od kvadriranja binoma u dva moguća smjera. Jedan prema povećanju broja pribrojnika (kvadriranje polinoma, što je zgodno obraditi kao primjer), a drugi prema povećanju potencije binoma. Svakako valja spomenuti kub binoma, opisati način na koji smo u I. razredu došli do identiteta $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, te odatle induktivno razviti ideju za izračunavanje daljih potencija:

$$(a+b)^4 = (a+b)\cdot(a+b)^3,$$
$$(a+b)^5 = (a+b)\cdot(a+b)^4, \qquad \text{itd.}$$

Ako ovdje provedemo sva ova izračunavanja, onda je možda već ovo mjesto pogodno za ispisivanje *Pascalova trokuta*.

Najavljujemo time problem određivanja potencije $(a+b)^n$ za svaki prirodni broj n, a bit će jasno kako će u sve biti ugrađena matematička indukcija.

Nakon postavljanja problema i nagovještaja njegova rješenja, napominjemo kako je najprije potrebno uvesti neke nove oznake.

Uvodimo pojam *faktorijela* $n!$ i *binomnih koeficijenata*. Pokazujemo kako se računa s tim novim brojevima na primjerima, izboru jednostavnijih zadataka, primjerice zadataka 1.-8.

Zatim obrađujemo svojstvo simetrije binomnih koeficijenata.

2. Pascalov trokut. Ponavljamo definiciju i svojstva binomnih koeficijenata. Na temelju tih svojstava ispisujemo *Pascalov trokut*. Vraćamo se na problem potenciranja binoma. Uspoređujemo koeficijente dobivene razvojem potencija $(a+b)^3$ i $(a+b)^4$ s binomnim koeficijentima u odgovarajućem retku *Pascalova trokuta*.

Problematiziramo dalji tijek obrade pozivom učenicima da primjerice izračunaju $(a+b)^9$. Oni će to izvesti tako što će ispisati Pascalov trokut sve do njegova devetog reda pa onda potom i razvijeni oblik potencije. To će načiniti samostalno, brzo i spretno, i to će doprinijeti daljem razumijevanju glavnog zadatka. Možemo zahtijevati i da odrede neki član u razvijenom obliku potencije $(a+b)^{15}$, ali dakako bez ispisivanja cijelog raspisa.

Primijetimo kako se potenciranjem binoma dobije izvjesni polinom i sva su naša pitanja manje-više vezana uz članove tog polinoma. Taj polinom kolokvijalno se zove *razvoj binoma*, *raspis binoma* i sl.

Na ovom nastavnom satu uglavnom provodimo pripravu za sljedeći sat na kojem ćemo izreći i dokazati *Binomnu formulu*.

3. Binomna formula. U uvodnom dijelu još jednom ponovimo ideju i onda iskazujemo *Binomni poučak*. Potom ga dokazujemo. Dokaz valja provesti detaljno i temeljito, jer je to dobra zgoda da se na jasnom ali malo drukčijem primjeru demonstrira dokaz matematičkom indukcijom. Pritom treba biti svjestan nezgrapnosti zapisa na koju nailazimo tijekom ispisa dokaza. Zato još jednom upozoravamo na važnost dobre priprave. Simboli i postupci koji su školovanom matematičaru ili dijelu nadarenijih učenika sasvim jasni, mogu ometati razumijevanje izlaganja kod većine učenika.

Nakon dokaza ostaje nam dovoljno vremena da riješimo poneki primjer. Preporučujemo izbor iz Zadatka 16. ili 17.

4. Opći član u razvoju binoma. Ovdje je zapravo riječ o satu vježbanja. Učenici moraju shvatiti i razumjeti kako se neki član u razvoju binoma može zapisati bez ispisivanja cijelog razvoja. Pogodni su Primjeri 5. i 6. Također je zanimljiv i Primjer 7. te ga valja obraditi zbog nadarenijih učenika.

1.4. Prirodni, cijeli i racionalni brojevi

Broj sati: 2 / 3

Ciljevi i zadaci

– Usvojiti pojam prirodnog, cijelog i racionalnog broja, te shvatiti njihov odnos.
– Razviti intuitivni osjećaj za pojam algebarske strukture.
– Shvatiti podrijetlo periodičnosti u decimalnom prikazu racionalnih brojeva.
– Naučiti pretvarati racionalni broj u obliku razlomka u decimalni broj i obrnuto.

Pojmovi: Prosti i složeni brojevi. Relativno prosti brojevi. Euklidov algoritam. Polje racionalnih brojeva. Uređaj u polju $\mathbf{Q}$. Decimalni prikaz racionalnih brojeva.

Metodička razrada

1. Prirodni brojevi. Cijeli brojevi. U uvodu treba ponoviti koji su brojevi prirodni brojevi i koja je njihova uloga. Izdvojiti proste brojeve kao podskup skupa prirodnih brojeva generiran uvjetom da broj nema drugih djelitelja osima dva “trivijalna.”

Iskazat ćemo *Teorem o beskonačnosti skupa prostih brojeva* te provesti dokaz tog teorema. Dokaz ćemo zapisati te ga ponoviti. Riječ je o jednom od povijesno najpoznatijih matematičkih dokaza neke tvrdnje, koji ima i povijesnu vrijednost, a kao demonstracija jedne od najčešćih i najjačih deduktivnih metoda dokaza s obrazovne strane ima vrlo veliko značenje. Kao primjere riješiti izbor zadataka 10., 11. i 12.

Skup cijelih brojeva je proširenje skupa prirodnih brojeva. Ukratko ćemo to konstatirati te uvesti pojam suprotnog broja. Koristeći se pojmom suprotnog broja, definiramo oduzimanje brojeva a i b kao zbrajanje broja a i suprotnog broja od broja b.

2. Racionalni brojevi. Definirati racionalni broj te operacije zbrajanja i množenja u skupu racionalnih brojeva. U udžbeniku uz komentar pročitati *Aksiome racionalnih brojeva* te spomenuti pojam *polje*. Bez ulaženja u dubinu nastojati da učenici steknu intuitivnu predodžbu o algebarskoj strukturi. Definirati pojam recipročnog broja pa potom i operaciju dijeljenja.

Uvesti relaciju uređaja u skupu racionalnih brojeva. Spomenuti *gustoću* skupa racionalnih brojeva. S tim u vezi ponoviti pojam *aritmetičke sredine,* te eventualno dokazati sljedeću jednostavnu činjenicu:

Ako su x i y racionalni brojevi, te $x < y$, tada vrijedi $x < \frac{x+y}{2} < y$.

Dokaz je jednostavno provesti na sljedeći način:
Dodamo s obje strane nejednakosti $x < y$ broj x pa imamo $2x < x + y$. Odatle slijedi $x < \frac{x+y}{2}$.

Analogno, ako s obje strane nejednakosti dodamo y, dobit ćemo $\frac{x+y}{2} < y$.

Dokazano svojstvo vrijedi dakako i u skupu realnih brojeva, ali ovdje je zanimljivo zbog zorne interpretacije gustoće racionalnih brojeva.

Kao dobar primjer može se obraditi Zadatak 39.

* * *

Učenici su dobro upoznati s pojmom decimalnog prikaza racionalnog broja i svojstvom periodičnosti tog prikaza.

Na primjerima ćemo ilustrirati racionalne brojeve koji imaju konačan odnosno beskonačan decimalni prikaz. Korisno je efektivno provesti dijeljenje, kao što je to primjerice načinjeno u udžbeniku s brojem $\frac{1}{7}$.

Posebno valja analizirati situaciju kad je racionalni broj u svojem decimalnom prikazu konačan broj. To je zapravo situacija koja je u praksi i najčešća.

Uz ovu temu posebno su didaktički korisni zadaci 31. i 32., jer doprinose utvrđivanju i potpunom razumijevanju periodičnosti kao glavnog obilježja beskonačnih decimalnih racionalnih brojeva.

U vježbanju riješiti izbor zadataka 33. – 41.

1.5. Realni brojevi

Broj sati: 1 / 1

Ciljevi i zadaci:

– Usvojiti pojam iracionalnog, pa time i realnog broja. Znati navesti primjere iracionalnih brojeva.
– Razumjeti smisao aproksimacije te shvatiti da je račun s realnim brojevima račun s njihovim racionalnim aproksimacijama, znati to obrazložiti.
– Intuitivno prihvatiti činjenicu o ekvivalentnosti skupa realnih brojeva i točaka pravca, te ideju o brojevnom pravcu kao geometrijskom modelu skupa realnih brojeva.
– Naučiti značenje pojmova donje i gornje ograde (međe) te omeđenog skupa.

Pojmovi: Decimalni prikaz iracionalnog broja. Donja i gornja ograda skupa. Omeđeni i neomeđeni skupovi. Infimum, supremum, maksimum, minimum.

Metodička razrada

1. Realni brojevi. Uvesti pojam *iracionalnog broja*. Objašnjeno je da racionalni brojevi imaju periodički decimalni prikaz. Prema tome, svaki decimalni prikaz koji nije periodički, predstavlja iracionalni broj.

Učenici su u nekoliko navrata već dokazivali da $\sqrt{2}$ nije racionalan pa taj dokaz nije potrebno ponavljati. Za podsjetnik učenicima može se zadati neki od zadataka 12.–25. za domaći rad. Za većinu tih zadataka navedena su potpuna rješenja, pa ih valja preporučiti nadarenijim učenicima.

U razredu bi bilo korisnije odrediti još nekoliko decimala broja $\sqrt{2}$, na način kako je pokazano u Udžbeniku.

Od novih pojmova u ovoj su točki predviđeni pojmovi omeđenog i neomeđenog skupa, gornje i donje međe skupa, te infimuma i supremuma. Ove je pojmove treba obraditi na nivou intuitivnog poimanja.

1.6. Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Broj sati: 3 / 3

Ciljevi i zadaci

– Shvatiti motive koji su doveli do potrebe za proširenjem skupa realnih brojeva (učenicima je razumljiv problem rješivosti algebarske jednadžbe).
– Naučiti pretvarati kompleksne brojeve iz standardnog algebarskog u trigonometrijski oblik i obrnuto.
– Usvojiti računske operacije s kompleksnim brojevima.
– Uočiti prednosti koju pri računanju pružaju kompleksni brojevi u trigonometrijskom zapisu.

Pojmovi: Algebarski prikaz kompleksnog broja. Imaginarna jedinica. Modul kompleksnog broja. Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja. Polarni sustav, polarne koordinate. Množenje kompleksnih brojeva. Dijeljenje kompleksnih brojeva.

Metodička razrada

1. Kompleksni brojevi. Kratko i pregledno ponavljamo gradivo o kompleksnim brojevima iz II. razreda srednje škole: definicija imaginarne jedinice i kompleksnog broja. Algebarske operacije s kompleksnim brojevima. Geometrijska interpretacija kompleksnog broja i kompleksna ravnina. Ponavljanje valja potkrijepiti nizom pažljivo probranih primjera. Preporuča se izraditi u vježbi i domaćoj zadaći izbor zadataka 1.- 9.

2. Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja. Uz obveznu geometrijsku predodžbu izvesti zapis kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku. Radi boljeg usvajanja toga zapisa valja detaljno riješiti Primjer 3.

Bitno je potom uočiti kako kompleksni brojevi u Zadatku 16. nisu zapisani u trigonometrijskom obliku. Učenici trebaju usvojiti postupak njihova prevođenja na taj oblik. To je postupak koji zahtijeva dobro poznavanje definicija trigonometrijskih funkcija kao i osnovnih svojstava tih funkcija. U tom je smislu rješavanje ovog, a i njemu sličnih zadataka, vrijedno i kao ponavljanje gradiva o trigonometrijskim funkcijama.

Ukazujemo i na Zadatak 17. koji je nešto složeniji ali je na istom smjeru.

3. Množenje i dijeljenje kompleksnih brojeva. Ove dvije operacije provode se na vrlo jednostavan način. Izvođenje formula jednostavno je pa ga valja provesti. U tome primjenjujemo adicijske formule, čime se ponovi i taj dio gradiva o trigonometrijskim funkcijama.

U vježbanju i domaćoj zadaći rješavat će se izbor zadataka 18.-21.

1.7. Potenciranje i korjenovanje kompleksnih brojeva

Broj sati: 2 / 2

Ciljevi i zadaci

- Naučiti kako se izračunava cjelobrojna potencija kompleksnog broja.
- Razumjeti potrebu za poopćenjem aritmetičkog korijena.
- Usvojiti činjenicu da n-ti korijen iz kompleksnog broja ima n vrijednosti.

Pojmovi: De Moivreova formula. Potenciranje kompleksnih brojeva. Korjenovanje kompleksnih brojeva.

Metodička razrada

1. Potenciranje kompleksnih brojeva. Postavlja se problem potenciranja kompleksnih brojeva prirodnim eksponentom i ukazuje na nezgrapnost rješenja tog problema ako je broj zadan u standardnoj algebarskoj formi.

Ističemo našu ideju da taj zadatak pokušamo riješiti ako je broj zadan u trigonometrijskom zapisu. Pritom valja naglasiti kako se iza svake potencije cijelim brojem skriva množenje. Prirodno se nameće zamisao da formulu za izračunavanje potencija izvedemo induktivno oslanjajući se na pravilo množenja dvaju kompleksnih brojeva, kako je obrađeno u udžbeniku.

Tako dolazimo do Moivreove formule: $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.

Izraditi Primjer 1. te potom, bilo u vježbi, bilo kao domaći rad riješiti izbor zadataka za vježbu.

Jedan od zadataka nadarenijim učenicima bio bi zadatak da dokažu *Moivreovu formulu* matematičkom indukcijom. To je, naime, još jedna prigoda da se u novom gradivu prirodno primijeni nešto što smo prethodno obradili na razini posebne teme.

2. Korjenovanje kompleksnih brojeva. Kao motivaciju rješavamo Primjer 2. Potom problem postavljamo općenito i općenito ga i rješavamo. Rješenje potkrepljujemo Primjerom 4.

Rješenje problema pratimo njegovom geometrijskom interpretacijom.

D-3.1. Polinomi

Broj sati: 0 / 2

Ciljevi i zadaci

– Steći uvid u opći problem rješavanja algebarskih jednadžbi.
– Kroz analogije uočiti poopćenja nekih činjenica koje su poznate iz rješavanja linearnih, kvadratnih i jednostavnijih binomnih jednadžbi $\left(x^3 \pm 1 = 0,\ x^4 \pm 1 = 0,\ x^6 \pm 1 = 0\right)$.

Pojmovi: Djeljivost polinoma. Osnovni stavak algebre. Faktorizacija polinoma. Vièteove formule

Metodička razrada

Ova je tema prebačena u dodatak za prirodoslovne gimnazije, sa satnicom od dva sata. U vremenskom škripcu, tema se može skratiti na 1 sat ili čak u potpunosti preskočiti.

Učenici prirodoslovnih gimnazija su u drugom razredu naučili osnovne pojmove o polinomima. Ova cjelina zato služi kao podsjetnik, jer je algebarska jednadžba važan pojam i dobro je da se obradi još jednom, nakon što su poznata sva svojstva i operacije s kompleksnim brojevima.

U obradi cjelokupnog gradiva o kompleksnim brojevima valja u prvom programu biti vrlo umjeren glede dubine obrade i zahtjevnosti u težini zadataka. Ne bi trebalo otvarati nove i složenije problemske situacije, dovoljno je ostati na razini razumijevanja ideja i sposobnosti ilustracije njihove provedbe na jednostavnim zadacima.

U jačem programu kroz dva sata stignu se ponoviti pojam polinoma i pojam nultočke polinoma. Provesti kratak pregled činjenica uz rješavanje jednadžbi. Povezati rješenja jednadžbe s nultočkama polinoma. Izreći osnovni stavak algebre.

Riješiti Primjer 2. i na njemu ukazati na navedene opće činjenice.

Dodatna literatura za 1. poglavlje

1. V. Devide, *Matematika kroz kulture i epohe*, Školska knjiga, Zagreb
2. B. Dakić, *Matematički panoptikum*, Školska knjiga, Zagreb
3. I. Urbiha, *Zapisi brojeva u sustavima s različitim bazama*, Zbornik radova 3. susreta nastavnika matematike, Zagreb 1996.
4. N. Elezović, *Kompleksni brojevi*, Element, Zagreb
5. S. Kurepa, *Uvod u matematiku*, Školska knjiga, Zagreb
6. I. Gusić, *Matematički rječnik*, Element, Zagreb 1995.