1.
Realni brojevi

(12 – 18 sati)

Prvo poglavlje udžbenika je kratko i uvodno. Riječ je uglavnom o ponavljanju osnovnoškolskog gradiva, s ciljem da se učenici prisjete svojstava osnovnih algebarskih operacija, te operacija s cijelim i racionalnim brojevima. (U prirodoslovnim gimnazijama obradit će se detaljnije cjeline o prirodnim brojevima.)

1.1. Skupovi brojeva

Broj sati: 4

Ciljevi i zadaci

- pregledno prikazati skupove brojeva i njihove međusobne odnose
- postići da učenici razlikuju pojedine vrste brojeva

Metodička razrada

Dobar dio gradiva matematike u I. razredu srednje škole na nešto višoj razini je ponavljanje i utvrđivanje matematičkih sadržaja iz osnovne škole. Cilj i smisao ove prve teme stoga je potpunije razumijevanje i usvajanje nekih osnovnih pojmova i činjenica te razvijanje vještine izvođenja računskih operacija, sada i s općim brojevima te algebarskim izrazima.

Na samom početku napravit ćemo pregled skupova brojeva te ujedno ponoviti osnovne činjenice vezane uz brojeve. Obradu sadržaja pratit ćemo s velikim brojem dobro odabranih primjera.

Možemo očekivati da s prepoznavanjem prirodnih i cijelih brojeva te rješavanja zadataka koji su uz njih vezani neće biti teškoća. Učenici trebaju dobro usvojiti opće zapise tih brojeva uz neki dani uvjet. Tako bi, primjerice, svi učenici morali u zapisu $2n$ prepoznati parni broj, a u zapisu $2n+1$ neparni broj, morali bi znati zapisivati uzastopne cijele brojeve i sl.

U ovom dijelu je zgodno rješavati zadatke u kojima se primjenjuje *Gaussova dosjetka*. Ovdje valja istaknuti jednu činjenicu koje nastavnik ponekad možda i nije dovoljno svjestan. Naime, u ovim zadacima zbog brojnosti pribrojnika ne možemo ih sve ispisati pa nakon prvih nekoliko navodimo tri točkice kako bismo naznačili da se "ponašanje" brojeva u zapisu dosljedno i logično poštuje, od početka do kraja. To nije i ne mora biti samo po sebi jasno. Možemo, i to je dobro učiniti, tražiti od učenika da nam navedu još nekoliko brojeva koji uzastopce slijede iza prva tri navedena. Također je dobro postaviti pitanje o broju pribrojnika u nekoj konačnoj sumi. Svakako, ovakve probleme treba najprije detaljno analizirati, sve do potpunog razumijevanja.

Primijetimo kako sve ove zadatke možemo svesti na primjenu formule za zbroj prvih n uzastopnih prirodnih brojeva,

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Tako za zbroj prvih n parnih prirodnih brojeva imamo:

$$2+4+6+\ldots+2n=2\cdot(1+2+3+\ldots+n)=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1).$$

Taj rezultat i nije neočekivan, do njega bi se na neki način moglo doći i “napamet”. Potražimo i zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva:

$$\begin{aligned}&1+3+5+\ldots+(2n-1)\\&\quad=(2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)+(2\cdot3-1)+\ldots+(2n-1)\\&\quad=(2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+\ldots2\cdot n)-(1+1+1+\ldots+1)\\&\quad=2\cdot(1+2+3+\ldots+n)-n=n(n+1)-n=n^2.\end{aligned}$$

Riješimo za ilustraciju još i ovaj primjer:

Odredimo zbroj $1+5+9+\ldots+101$. Valja uočiti kako se zbrajaju prirodni brojevi koji pri dijeljenju sa 4 daju ostatak 1. Takve brojeve možemo zapisati u obliku $4k-3$. Naime, k je prirodan broj, pa onda iz zapisa $4k+1$ ne dobivamo broj 1.

Dakle, bit će:

$$\begin{aligned}&1+5+9+13+\ldots+101\\&\quad=(4\cdot1-3)+(4\cdot2-3)+(4\cdot3-3)+\ldots+(4\cdot26-3)\\&\quad=4\cdot(1+2+3+\ldots+26)-(3+3+3\ldots+3)\\&\quad=4\cdot\frac{26\cdot27}{2}-26\cdot3=1\,326.\end{aligned}$$

No možemo provesti i klasični Gaussov postupak pa združivati u parove po dva broja. Prvi s posljednjim, drugi s pretposljednjim, treći od početka s trećim od kraja itd. Zbroj svaka dva broja u paru je isti, to je broj 102. I sada valja još vidjeti koliko je pribrojnika u danoj sumi. Taj je broj jednak $n=\dfrac{101-1}{4}+1=26$. Onda je ukupan zbroj jednak $102\cdot13=1\,326$.

Naime, razlika između svaka dva susjedna broja je jednaka 4, prvi broj je 1, posljednji 101. I još k tome dodamo jedinicu.

Naravno, mi znademo da je riječ o aritmetičkom nizu i tu zapravo postupamo jednako kao u zadacima s aritmetičkim nizom, samo na nešto nižoj razini.

Spomenimo ovdje još u istom zadatku i zadatak 6. Tu imamo sljedeći račun:

$$\begin{aligned}11+13+15+\ldots+101&=(1+3+5+\ldots+101)-(1+3+5+7+9)\\&=51^2-5^2=3\,111.\end{aligned}$$

Upozoravamo još na zadatke na strani 9. u kojima je također riječ o zbrajanju nekoliko uzastopnih brojeva. Kad je broj pribrojnika neparan, onda najčešće zapisujemo srednji broj a ulijevo i udesno od njega ispisujemo pribrojnike koji mu prethode, odnosno slijede.

U jednom od tih zadataka (zadatak 6.) kaže se da je zbroj pet uzastopnih parnih prirodnih brojeva jednak $6\,080$ i pita se koji su to brojevi.

Možemo računati na način:

$$(2n)+(2n+2)+(2n+4)+(2n+6)+(2n+8)=10n+20=6\,080,$$

odakle se dobije $n=606$, te vidimo kako je riječ o brojevima $1\,212$, $1\,214$, $1\,216$, $1\,218$, $1\,220$.

Primijetimo međutim kako je podatkom da se radi o zbrajanju parnih brojeva zapravo rečeno kako se brojevi uzastopce razlikuju za dva. No upravo naznaka o parnosti pokriva taj uvjet. A da su parni, vidjet će se iz rezultata.

Stoga smo mogli pisati: $(n-4)+(n-2)+n+(n+2)+(n+4)=5n=6\,080$, te je $n=1\,216$.

Rješenje zadatka je niz sljedećih pet brojeva $1\,212$, $1\,214$, $1\,216$, $1\,218$, $1\,220$.

Slično je i sa zadatkom, u kojem se radi o zbrajanju uzastopnih neparnih brojeva..

Obično kažemo da su iracionalni brojevi oni brojevi koji nisu racionalni. No pitanje je kako će učenici prihvatiti ovakvu površnu definiciju. Hoće li razumjeti koji su to iracionalni brojevi?

Potrebno je prije svega otvoriti pitanje, postoje li uistinu brojevi koji nisu racionalni. Ono je postavljeno još u VIII. razredu, na njega je dan odgovor, no nije sigurno koliko je ostavio traga.

U "Kutku plus" naveden je klasični dokaz da broj $\sqrt{2}$ nije racionalan. Primjer bi trebalo pažljivo i detaljno obraditi, ako je to ikako provedivo. To je prvi susret učenika s ovom vrstom dokaza jedne matematičke činjenice.

Učenicima će biti jasno da su iracionalni brojevi beskonačni decimalni brojevi. No beskonačni su decimalni i mnogi racionalni brojevi. Treba objasniti razliku, jer upravo ona određuje koji su beskonačni decimalni brojevi racionalni a koji iracionalni. Na primjeru razlomka $\frac{3}{7}$ zapisanom u decimalnom obliku ilustrirano je periodično ponavljanje skupine znamenki. Vrlo se brzo može odgovoriti na pitanje koja se znamenka nalazi na bilo kojoj poziciji u tom zapisu. U zapisu iracionalnog broja to je nemoguće, jer se njegove znamenke najčešće nižu bez nekog reda. Također je važno napomenuti kako osim korijena ima i drugih iracionalnih brojeva. Jedan takav je i broj π, dobro poznat učenicima još iz VII. razreda.

I konačno, završavamo s realnim brojevima. No jasno je da se na ovom uzrastu pod realnim brojevima smatraju jednostavno *svi brojevi*. Bit će dovoljno ako učenici između konkretnih brojeva razlikuju racionalne i iracionalne brojeve.

1.2. Operacije sa skupovima

Broj sati: 1 / 2

Ciljevi i zadaci

- usvojiti skupovnu simboliku
- usvojiti osnovne operacije sa skupovima
- znati riješiti jednostavnije problemske zadatke vezane uz skupove

Metodička razrada

Skupovi su u okviru pokreta poznatog kao *Moderna matematika* šezdesetih godina ušli u nastavu matematike na velika vrata. Tu se pretjerivalo s raznim sadržajima koji su uglavnom bili vrlo apstraktni pa nije bila jasna njihova svrha i njihov smisao. No nakon dva do tri desetljeća prešlo se u drugu krajnost pa su skupovi nestali iz programa nastave matematike u osnovnim i srednjim školama.

U matematici osnovne i srednje škole postoji niz mjesta gdje se spominju skupovi. Spomenimo skupove brojeva ili skupove točaka. Intervali su podskupovi skupa realnih brojeva. Rješavajući sustave nejednadžbi javlja se potreba za određivanjem unije ili presjeka intervala. Česti su problemi prebrajanja elemenata u konačnim skupovima. U velikoj se mjeri koriste razne skupovne oznake. Zbog svega toga dakle ima smisla ukratko obraditi najosnovnije skupovne oznake i skupovne operacije.

Nije potrebno komentirati zakone asocijacije, a pogotovo distributivnost operacija unije i presjeka. Dakako da nije potrebno pamtiti bilo koje identitete navedene u primjerima i zadacima. Jedina je uloga ovih zadataka da učenici rješavajući te zadatke zapamte osnovne definicije skupovnih operacija.

U udžbeniku je dano nekoliko zanimljivih zadataka na koje nastavnici trebaju upozoriti učenike. Može se očekivati da će dio učenika, osobito onih nadarenijih, pokazati interes za njihovo rješavanje.

Ti će se zadaci sigurno stići obraditi u prosirenom programu gdje je predviđen još jedan sat za obradu ove teme.

1.3. Djeljivost. Prosti brojevi

Broj sati: 0 / 2

Ciljevi i zadaci

– ponoviti kriterije djeljivosti malim prirodnim brojevima
– shvatiti postupak provjere složenosti zadanog broja i faktorizacije složenog broja
– izvježbati svojstva relacije "biti djeljiv" u skupu cijelih brojeva

Metodička razrada

Ova je tema predviđena samo za prošireni program i obrađena je u dodatku udžbenika za prirodoslovne gimnazije.

Sastoji se od tri cjeline.

Prva je cjelina podsjećanje na kriterije djeljivosti prirodnih brojeva prikazanih u dekadskom prikazu, koji su korišteni još u osnovnoj školi. Tu valja primijetiti da su kriteriji iskazani u formi "ako i samo ako" iako se najčešće dokazuje samo dovoljnost tih uvjeta (a u zadacima često koristi nužnost).

Nije predviđeno zadržavanje niti detaljnija obrada ove cjeline, tako da dokaz kriterija nije dan. Njega je teško izvesti bez pozivanja na dekadski prikaz broja, a to nije sadržaj gradiva prvog razreda. Uloga ove cjeline je samo u tome da učenik u nastavku može lakše prepoznati je li neki (maleni) prirodni broj prost ili nije.

∗ ∗ ∗

Pojam prostog broja učenicima je također poznat (ali ne i svim bivšim, inače se ne bi u titlovima poznatog filma spominjali *primarni* brojevi).

Primjer 3. je priprema za kriterij provjere je li zadani prirodni broj prost ili ne.

Primjer 4. je prisjećanje na poznati postupak faktorizacije prirodnog broja.

Eratostenovo sito je zgodan način pronalaska liste svih prirodnih brojeva manjih od zadanog prirodnog broja. Prepustite učenicima da sami reproduciraju način otkrivanja svih prostih brojeva manjih od 100.

Posebno zainteresiranim učenicima možete zadati da sami napišu (s pomoću osobnog računala) što veću listu početnih prostih brojeva. Interesantno je vidjeti može li posao za koji je prije dvjesto godina trebao čitav ljudski vijek [1] danas napraviti školarac na početku svog obrazovanja i u roku od nekoliko dana. Ovakav je test dobar način da na vrijeme otkrijete prave talente u svom razredu.

∗ ∗ ∗

[1] J. H. Lambert je 1770. god. napisao listu prostih brojeva manjih od 100 999, obećavši besmrtnost onom čovjeku koji odredi faktorizacije za sve brojeve manje od 1 000 000. Iako to obećanje nije imalo čvrstih garancija, mnogi su matematičari prionuli poslu i ta je granica ubrzo probijena.
Jacob Philips Kulik je utrošio 20 godina života da stvori tablicu faktorizacija za sve brojeve od 1 do 100 000 000, radeći sam bez ičije pomoći. Osam rukom pisanih monografija sadrže rezultate njegovog truda. (Točnije, sedam, jer je Vol. 2, s brojevima od 12 642 600 do 22 852 800 netragom nestao). Njegova lista ipak sadrži više pogrešaka.

Cjelina o djeljivosti brojeva korisna je u rješavanju primjera. Tu je naročito važan prikaz dijeljenja dvaju cijelih brojeva s ostatkom, u obliku $b = qa + r$.

Zbog pojednostavljenja dokaza, u iskazu poučka navedeno je da je a prirodan broj, iako iskaz poučka vrijedi i u slučaju kad je a cijeli, s tim da za ostatak onda vrijedi $0 \leqslant r < |a|$. Međutim, dijeljenje dvaju cijelih brojeva uvijek se može svesti na dijeljenje cijelog broja i prirodnog broja, jer je $\dfrac{b}{-a} = \dfrac{-b}{a}$.

* * *

U udžbeniku je navedeno nekoliko zanimljivosti iz područja *teorije brojeva*, a koje su vezane uz pojam prostog broja. Međutim, nismo se mogli upuštati u detaljnija objašnjenja važnosti prostih brojeva, pogotovo važnost prolanaženja što većih prostih brojeva na kojima se temelje neke važne primjene matematike. Bilo bi dobro zainteresirati učenike da sami potraže iz dostupnih izvora (prvenstveno putem *interneta* više informacija o prostim brojevima. To bi mogao biti izvrstan zadatak za jednog ili više učenika, nakon čega će zasigurno drukčije gledati na ulogu matematike.

1.4. Mjera i višekratnik. Euklidov algoritam

Broj sati: 0 / 2

Ciljevi i zadaci

- ponoviti pojmove mjere i višekratnika prirodnih brojeva
- izvježbati računanje mjere i višekratnika
- razumjeti Euklidov algoritam za nalaženje najveće zajedničke mjere

Metodička razrada

I ova je tema predviđena samo u proširenom programu. S obzirom da je riječ o naoko važnim pojmovima, a pogotovo stoga što neposredno iza slijedi sličan račun s algebarskim izrazima, postavlja se pitanje ne bi li ta tema trebala biti sadržaj svih programa?

U osnovnoj školi poznavanje mjere i višekratnika bilo je nužno u svladavanju računa s razlomcima (racionalnim brojevima). To su znanje učenici donijeli sa sobom u srednju školu, i bit će im sasvim dovoljno za rad s algebarski izrazima. Tu se ionako traži nalaženje zajedničke mjere i višekratnika malih prirodnih brojeva i nije potrebna posebna vježba i priprema za taj račun.

Stoga je veća pažnja u ovoj cjelini posvećena Euklidovom algoritmu, koji se temelji na algoritmu dijeljenja prirodnih brojeva i nema apsolutno nikakve veze s faktorizacijom samih brojeva. Ako su dva broja relativno prosta, Euklidov algoritam će to otkriti a da ništa ne kaže o mogućoj faktorizaciji bilo kojeg od njih.

Euklidov je algoritam prema tome nešto potpuno novo. To je jedan primjer efikasnog postupka (algoritma, u doslovnom smislu riječi) koji predstavlja kvalitativni skok u odnosu na dotad poznate metode (nalazenje zajedničke mjere pomoću faktorizacije je neusporedivo složeniji postupak kad su veliki brojevi u pitanju).

Euklidov algoritam nije dokazan (to je učinjeno u udžbeniku za četvrti razred), međutim, ilustriran je na nizu primjera. Neka učenci sami naprave te primjere i uvjere se u začuđujuću efikasnost ovog postupka.

Zadatke 7.–10. bilo bi mnogo teže riješiti bez poznavanja ovog algoritma.

1.5. Racionalni brojevi

Broj sati: 3 / 3

Ciljevi i zadaci

– usvojiti pojam racionalnog broja
– razviti vještinu računanja s racionalnim brojevima
– razumjeti svojstvo gustoće skupa racionalnih brojeva

Metodička razrada

Ovo je dio prvog poglavlja u kojem će se detaljnije ponoviti sadržaji koji se odnose na racionalne brojeve. Tu i nema novih pojmova ili činjenica, pa će se gradivo koje se protezalo kroz više razreda osnovne škole ovdje sistematizirati i zatvoriti u cjelinu.

Na početku se kaže da su racionalni brojevi količnici cijelih brojeva. Zatim se definira jednakost dvaju racionalnih brojeva. Ta definicija omogućuje pogodnije određenje racionalnog broja kao količnika cijelog i prirodnog broja. Time se s jedne strane izbjegava problem dijeljenja negativnim brojem, a s druge pojednostavljuje se kriterij usporedbe razlomaka.

Naime, ako su dani razlomci $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$, gdje su a i b cijeli a b i d prirodni brojevi, onda je $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ako i samo ako je $a \cdot d < b \cdot c$. Naravno, razlomke je jednostavno usporediti i ako se zapišu kao razlomci s jednakim nazivnikom.

U tu svrhu provodimo proširivanje razlomaka. Proširivanje, odnosno kraćenje razlomaka je izravna posljedica definicije jednakosti razlomaka. Primjenjujemo ga i pri zbrajanju razlomaka. Naime, znademo zbrajati razlomke jednakih nazivnika. Ako pak treba zbrojiti razlomke različitih nazivnika, onda takve razlomke proširujemo kako bismo dobili jednake nazivnike.

Izbor zadataka za vježbu širok je i raznovrstan. Izbor će provesti nastavnik u skladu s okolnostima u kojima se izvodi nastava. Kao dopuna, u pogodnim uvjetima, mogu se rješavati zadaci u kojima se računaju zbrojevi nekih posebnih razlomaka. Pri računanju se primjenjuje još jedna lijepa dosjetka, koja se može razviti u posebnu metodu. Riječ je o rastavu u tzv. *parcijalne razlomke*. Ideja se sastoji u tome da se svaki od razlomaka zapiše u obliku razlike neka dva razlomka pa da nakon toga u ukupnoj sumi dođe do poništavanja pojedinih pribrojnika.

Evo primjera:

Izračunajmo zbroj $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \frac{1}{37 \cdot 41}$.

Ideju smo naznačili, sad računamo:

$$\frac{1}{(4k-3) \cdot (4k+1)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(4k+1)-(4k-3)}{(4k-3)(4k+1)} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4k-3} - \frac{1}{4k+1} \right).$$

I sada imamo

$$\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{37\cdot 41}$$
$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{37}-\frac{1}{41}\right)=\frac{10}{41}.$$

Slično se postupa i u ostalim zadacima iz ove skupine.

Zanimljivi su i zadaci 12., 13. i 14. Pogledajmo jedan od njih:

Primjer Ako je $\frac{a+b}{b}=3$, koliko je $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a+b}$, $\frac{b}{a}$, $\frac{a-b}{b}$?

Iz $\frac{a+b}{b}=3$ slijedi $\frac{a}{b}+1=3$, odnosno $\frac{a}{b}=2$.

Jedan dio zadatka već je ovime riješen. Nadalje je $\frac{b}{a+b}=\frac{1}{3}$, $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$. Konačno, $\frac{a-b}{a}=1-\frac{b}{a}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Naravno, mogli smo iz $\frac{a+b}{b}=3$ izračunati $a=2b$ te to uvrstiti na odgovarajuće mjesto u svakom od ostalih razlomaka i dobiti iste rezultate.

No ipak se čini da je prvo rješenje sadržajnije i sa stanovišta matematičkog mišljenja produktivnije.

I na kraju upozoravamo na zadatke na temu aritmetičke sredine. U nas se takvim zadacima poklanja premalo pozornosti, a riječ je o jednostavnim problemčićima koji imaju smisla i u sebi nose elemente primjene matematičkog znanja.

Problemskim zadacima i zadacima koji su ispričani (zadani tekstom) i inače valja posvetiti osobitu pozornost. Takvi zadaci su često poticajni i pokazuju kako je učenje matematike korisno jer omogućuje rješenje sasvim konkretnih problema.

I inače je zgodno varirati tekst zadataka, izbjegavati pretjerano nizanje zadataka tipa *Izračunaj..., Koliko je...* i sl. Čak i onda kad je potrebno provesti poneki račun, valja razmisliti ne bi li se mogla dati nešto privlačnija formulacija zadatka.

1.6. Realni brojevi. Algebarski izrazi

Broj sati: 2 / 2

Ciljevi i zadaci

– usvojiti svojstva operacija zbrajanja i množenja realnih brojeva
– primijeniti svojstva operacija s realnim brojevima pri računanju s algebarskim izrazima

Metodička razrada

U ovom dijelu prvog poglavlja riječ je o operacijama zbrajanja i množenja realnih brojeva. Valja imati na umu da je za sada svako računanje s posebnim brojevima račun s racionalnim brojevima. Zato će se i u primjerima kojima se potkrepljuju ta svojstva pojavljivati cijeli ili racionalni brojevi.

U ovom se odjeljku ukazuje na strukturu koju čini skup realnih brojeva s obzirom na operacije zbrajanja i množenja. Oduzimanje se uvodi kao zbrajanje sa suprotnim brojem, dijeljenje kao množenje recipročnim brojem.

Popisana su i istaknuta svojstva zbrajanja i množenja.

Pri rješavanju zadataka kojima želimo ilustrirati primjene ovih svojstava često se govori o *algebarskim izrazima*, no rijetko se eksplicitno navodi o čemu je zapravo riječ. U kraćem ulomku odgovara se na ovo pitanje, premda valja imati na umu kako je to pojam koji je već široko rabljen u osnovnoj školi pa učenici o njegovu značenju imaju intuitivan osjećaj.

Najprije se govori o konstantama i varijablama te se algebarski izraz definira kao bilo koji izraz koji čine konstante i varijable a dobijen je pomoću četiri osnovne računske operacije. Naravno, nije to najsretnije rješenje, ali u ovom trenutku nema boljega. Sam pojam *algebarski izraz* vjerojatno je i izmišljen kao terminološko rješenje za ono što pokriva. Dakako, druga mogućnost, uvođenje pojma polinoma, manje je prihvatljiva, jer ćemo vrlo brzo govoriti o polinomima kao funkcijama jedne varijable, pa bi se stvarala nepotrebna zbrka.

U osnovnoj školi, osobito u VIII. razredu, učenici su množili višečlane algebarske izraze. To ćemo ponoviti i uvježbati. U zadacima za vježbu nismo se upuštali u složenije zadatke, niti smo bitno varirali njihov sadržaj. Tu je samo nekolicina zadataka u kojima imamo djeljivost, ali i oni se svode na računanje slično onom u ostalim zadacima.

Primjer 1. Dokaži da je broj $(2n+3)(3n-7)-(n+1)(n-1)$ djeljiv sa 10 za svaki prirodni broj n.

Ovdje je najvažnije razumjeti sam zadatak. Učenici najprije moraju shvatiti kako se iz izraza $(2n+3)(3n-7)-(n+1)(n-1)$ za razna uvrštavanja prirodnog broja n dobije neki cijeli (ne nužno prirodni) broj. Tvrdi se da je svaki od tako dobivenih brojeva djeljiv sa 10.

Za $n=1$ dobijemo broj -20, za $n=2$ broj -10, za $n=3$ broj 10 itd.

Tvrdnju pokazujemo općenito. Izračunamo $(2n+3)(3n-7)-(n+1)(n-1) = 5n^2-5n-20$. Rezultat zapišemo u obliku $5\cdot[n(n-1)-4]$. Da se za svaki n dobije broj djeljiv sa 5, očito je. No broj u zagradi je za svaki n parni broj. U umnošku $n(n-1)$ imamo dva uzastopna broja. Jedan je od njih paran pa je paran i taj umnožak. Od parnog broja oduzima se parni broj 4 i rezultat je parni broj. Tako smo dokazali djeljivost sa 10.

Boljim se učenicima može zadati i neki od zadataka 5., 6. ili 7. u kojima se ne traži cijeli rezultat množenja već samo jednan član toga rezultata.

Pogledajmo zadatak 7.

Primjer 2. Odredi onaj član umnoška $(a-b+ab)(a+b-ab)(a+b+ab)$ koji sadrži a^2b^2.

Možemo, naravno, provesti množenje pa u rezultatu izdvojiti član koji sadrži a^2b^2.

No možemo do rezultata doći i bez potpuno provedenog množenja, pretraživanjem. Izdvojimo prvi član prve zagrade i množimo ga s članovima druge zagrade. Pitamo se, da li tako dobiveni rezultat možemo pomnožiti nekim članom treće zagrade da bismo dobili član koji sadrži a^2b^2. Umnožak $a\cdot a$ ne daje rezultat. Umnožak $a\cdot b$ možemo pomnožiti s ab. Bilježimo samo "dobre umnoške" i dobivamo rezultat:

$$a\cdot b\cdot ab+a\cdot(-ab)\cdot b+(-b)\cdot a\cdot ab+(-b)\cdot(-ab)\cdot a+ab\cdot a\cdot b+ab\cdot b\cdot a = 2a^2b^2$$

i to je taj traženi član.

1.7. Brojevni pravac

Broj sati: 1 / 1

Ciljevi i zadaci

– uvesti brojevni pravac kao geometrijski model skupa realnih brojeva
– razviti intuitivan osjećaj o bijektivnosti pridruživanja realnih brojeva i točaka pravca

Metodička razrada

Brojevni pravac je geometrijski model skupa realnih brojeva. Na njemu učenik zorno doživljava gustoću racionalnih brojeva, a kasnije možda i kontinuitet realnih. Nakon što smo pokazali kako postoje brojevi koji nisu racionalni, primjerice korijeni iz nekih racionalnih brojeva, konstrukcijom se uvjeravamo da brojevi kao $\sqrt{3}$ ili $\sqrt{5}$ imaju i svoje (racionalnim brojem nezaposjednuto) mjesto na brojevnom pravcu.

Lako je pokazati da su racionalni brojevi gusti na brojevnom pravcu. Klasičan primjer s kojim su učenici upoznati još u osnovnoj školi jest aritmetička sredina dvaju racionalnih brojeva, koja je ponovo racionalan broj a nalazi se u polovištu dužine kojoj su rubne točke početna dva broja.

Drugi primjer koji je dan u udžbeniku također je koristan. Zbroj bilo koja dva racionalna broja opet je racionalan broj. Ovdje je izabran zbroj čvrstog broja $\frac{1}{13}$ i drugog koji je promjenjiv a predstavlja članove niza koji teži u nulu (niz 0.1, 0.01, 0.001,...). I bez objašnjenja pojma limesa i niza, učenik će zorno vidjeti beskonačno mnogo racionalnih brojeva koji se približavaju broju $\frac{1}{13}$.

Brojevni pravac koristit ćemo pri rješavanju nejednadžbi i sustava linearnih nejednadžbi s jednom nepoznanicom. Važan je i zbog kasnijeg prijelaza na koordinatni sustav u ravnini.

1.8. Pismena provjera znanja

Na kraju obrade ovog poglavlja predviđena je pismena provjera znanja. On je zapravo najvećim dijelom i ispit predznanja. Ponekad nastavnici odmah na samom početku školske godine provode *Ispit predznanja* s ciljem provjere znanja s kojim su učenici došli iz osnovne škole. No ima više razloga zbog kojih to i nije najsretnije rješenje. Prije svega, u školu se dolazi nakon ljetnih praznika i prvih nekoliko dana učenici se *uhodavaju*. Tu je onda i nova sredina na koju se valja priviknuti. Dobro je također da se i sami upoznamo s učenicima. Dobro je da i sami obradimo s novim učenicima nešto gradiva pa i to možemo uključiti u provjeru. Time ćemo provjeri dati dodatnu svrhu. Učenicima provjeru treba najaviti, treba im objasniti na koji će se način provjera provesti i što će se provjeravati.

Predviđa se vrijeme trajanja provjere od 45 minuta. Zadatke treba pripremiti i podijeliti učenicima. Bodovanje rezultata stvar je navike nastavnika. Predlazemo da se provjerite primjenu sljedećeg jednostavnog postupka. Svaki se zadatak može bodovati s dva boda. Točan postupak bez točnog rezultata donosi jedan bod, a do kraja točno riješen zadatak bodujemo s 2 boda.

Primjeri pismenih ispita dani su na kraju ovog priručnika. U prvom razredu predlažemo veći broj pismenih provjera, po jednu nakon svakog poglavlja udžbenika.