1 Korijeni

Što ću naučiti?

- obrazložiti smisao i potrebu uvođenja pojma korijena
- provoditi računske operacije s korijenima
- primjenjivati korijene u praktičnim zadatcima
- provoditi djelomično korjenovanje
- procjenjivati vrijednost drugog i trećeg korijena
- racionalizirati nazivnik razlomka

Dodatni sadržaji

Pripremi se za gradivo koje slijedi, riješi pripremne zadatke koji se nalaze u digitalnoj inačici.

U matematičkim opisima raznih pojava i zakona nailazimo na kvadrate određenih veličina. Tako je, primjerice, površina kvadrata sa stranicom duljine a jednaka a^2, prijeđeni put pri slobodnom padu tijela dan je formulom $s = \frac{g}{2}t^2$, a u Pitagorinu poučku zbroj kvadrata duljina kateta pravokutnog trokuta jednak je kvadratu duljine hipotenuze itd. Volumen kocke jednak je kubu duljine njezinog brida, $V = b^3$.

Kako izračunati duljinu stranice kvadrata ako mu je zadana površina? Koliko traje slobodni pad tijela bačenog s visine od s metara? Ako su zadane duljine dviju kateta pravokutnog trokuta, kolika je duljina hipotenuze? Koliki je brid kocke kojoj je poznat volumen? Odgovor na ova i druga pitanja potaknula su uvođenje drugog i trećeg korijena realnog broja.

1.1. Drugi i treći korijen realnog broja

Drugi ili kvadratni korijen pozitivnog broja

Za neki realni broj x i prirodni broj n definiramo **potenciju** kao umnožak n jednakih faktora:

$$x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x.$$

Najjednostavnija potencija, izuzmemo li $x^1 = x$, potencija je x^2, koju zovemo još i **kvadratom** broja x. Ova se potencija često susreće u raznim prirodnim zakonima, geometrijskim problemima i sl. Spomenuli smo površinu kvadrata kojemu je poznata duljina stranice. Slično tome, površina kruga s polumjerom duljine r jednaka $r^2\pi$, a prijeđeni put kod jednoliko ubrzanog gibanja s ubrzanjem a računamo po formuli $s = \frac{a}{2}t^2$.

U nekim ćemo zadatcima trebati odrediti kvadrat nekog broja, a u nekima ćemo morati odgovoriti na obrnuto pitanje.

Primjerice: *ako je površina kvadrata jednaka $225\ cm^2$, kolika je duljina njegove stranice?*

Očito, valja potražiti pozitivan broj a za koji vrijedi $a^2 = 225$. Jednostavno je naći odgovor, $a = 15\ \text{cm}$. Rješenje: broj 15, **drugi** je ili **kvadratni korijen** broja 225. Pišemo: $\sqrt{225} = 15$.

Ili primjerice: *ako je pri slobodnom padu neko tijelo prevalilo put od 50 metara, koliko je trajao pad?*

Dakle, iz jednadžbe $s = \frac{g}{2}t^2$ treba izračunati t. Pritom je $s = 50$ m, a konstanta gravitacije je $g = 9.81$ m/s^2. Slijedi $50 \approx 5t^2$, odnosno $t^2 \approx 10$, pa je $t \approx 3.16$. Ovaj posljednji rezultat odredili smo džepnim računalom.

Drugi korijen pozitivnog broja

Drugi ili **kvadratni korijen** pozitivnog broja a je ***pozitivan*** broj $\sqrt{a}$ za koji vrijedi:

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Također je $\sqrt{0} = 0$.

Za bilo koji realni broj a vrijedi $\sqrt{a^2} = |a|$.

Primjer 1.

Izračunajmo:

1) $\sqrt{100} = 10$ jer je $10^2 = 100$;

2) $\sqrt{0.64} = 0.8$, jer je $0.8^2 = 0.64$;

3) $\sqrt{17}$ nije racionalan broj te je $\sqrt{17}$=4.12310562561766 . . . ≈4.1231;

4) $\sqrt{-9}$ nije realan broj jer ne postoji takav realan broj čiji je kvadrat jednak -9.

Zadatak 1.

Odredi:

1) $\sqrt{441}$; **2)** $\sqrt{1.44}$; **3)** $\sqrt{-256}$; **4)** $\sqrt{11}$.

Primjer 2. **Horizont**

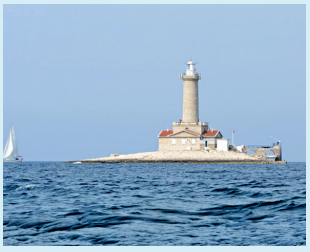
Horizont na moru prividna je crta koja razdvaja more i nebo. Ako su oči promatrača na visini h, tada je horizont od promatrača približno udaljen

$$d \approx 3.856\sqrt{h}.$$

Pritom je visina h izražena u metrima, a udaljenost d u kilometrima.

Primjerice, ako je promatrač visok 1.70 m i promatra horizont sa same morske obale, onda horizont vidi na udaljenosti

$$d = 3.856 \cdot \sqrt{1.70} \approx 5 \text{ km}.$$



Svjetionik Porer na morskoj hridi oko 2.5 km ispred najjužnijeg rta Istre visok je 35 m. Koliko je daleko horizont promatran s vrha ovog svjetionika?

Zadatak 2. Vojak, najviši vrh Učke visok je 1400 m. Neki tvrde da se za lijepog vremena s Vojaka vidi sve do Venecije. Je li to moguće? Zračna udaljenost Vojaka i Venecije iznosi 170 km.

Primjer 3. **Brzina broda**

Čvor (čv) je jedinica za mjerenje brzine. Jedan čvor je brzina od jedne nautičke milje po satu. Prevedeno na standardne jedinice to je brzina od 1.852 km/h. Ovom se jedinicom uglavnom koristimo u meteorologiji i pomorstvu te ponekad i u zračnom prometu.

Ogromni turistički brodovi (kruzeri) plove brzinom od oko 20 čvorova. Naš trajekt "Marko Polo" može razviti maksimalnu brzinu od 17.7 čv, a na putu između Rijeke i Dubrovnika (približno 590 km) njegova je prosječna brzina 15.1 čv.

Pri projektiranju broda njegova optimalna brzina $v(d)$ (u čvorovima) računa se po formuli

$$v(d) = k \cdot \sqrt{3.28d}$$

gdje je $k \approx 1.34$ konstanta, a d duljina broda (u metrima) na vodenoj površini. Ako je je duljina broda 30 m, kolika bi trebala biti njegova optimalna brzina? Izrazi je u km/ h.

Drugi korijen negativnog broja

Drugi korijen pozitivnog realnog broja je pozitivan realan broj. Drugi korijen iz nule je nula. Drugi korijen negativnog broja nije realan broj. Ova činjenica povlači za sobom potrebu za proširenjem skupa realnih brojeva.

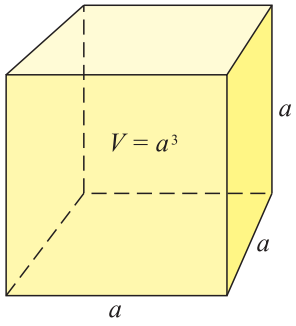
Uvodi se pojam **imaginarne jedinice**, broja i za koji vrijedi

$$i^2 = -1.$$

Tada ćemo, primjerice zapisati $\sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} = 2i$. Analogno tome je $\sqrt{-0.09} = 0.3i$, $\sqrt{-\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}i$ itd.

Brojevi oblika bi, gdje je b realan broj, a i imaginarna jedinica zovu se **imaginarni brojevi**.

Treći korijen



Problemi slični onima navedenima na početku ovog potpoglavlja, koji su nas potaknuli na uvođenje drugog korijena, navode na proširenje tog pojma. Primjerice: *kako odrediti duljinu brida kocke čiji je obujam* $125\ cm^3$? Obujam kocke s bridom duljine a je a^3 pa se traži takav broj a za koji je $a^3 = 125$. Očito je $a = 5$, jer je $5^3 = 125$. Pišemo:

$$\sqrt[3]{125} = 5.$$

No, teže je odgovoriti na pitanje kolika je duljina brida kocke čiji je obujam $100\ \text{cm}^3$. Tada imamo jednadžbu $a^3 = 100$ čije rješenje odmah ne vidimo. Pitamo se: *postoji li, i ako postoji, koji je to broj* a *za koji je* $a \cdot a \cdot a = 100$*?*

Da, takav broj postoji. To je broj veći od 4 i manji od 5. Ali koji?

Treći korijen

Treći korijen realnog broja a je broj $\sqrt[3]{a}$ za koji vrijedi

$$(\sqrt[3]{a})^3 = a.$$

Za svaki realni broj a vrijedi $\sqrt[3]{a^3} = a$.

Primjer 4. Izračunajmo:

1) $\sqrt[3]{1000} = 10$ jer je $10^3 = 1000$;

2) $\sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \frac{1}{5}$ jer je $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$;

3) $\sqrt[3]{0.008} = 0.2$ jer je $0.2^3 = 0.008$.

Zadatak 3. Koristeći se priloženom tablicom trećih potencija prvih 12 prirodnih brojeva odredi:

1) $\sqrt[3]{27}$; **2)** $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$; **3)** $\sqrt[3]{216}$; **4)** $\sqrt[3]{0.001}$.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000	1331	1728	2197

Zadatak 4. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza $\dfrac{\sqrt[3]{-0.001}+\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{0.125}+\sqrt[3]{-125}}$.

Primijetimo kako je treći korijen definiran za svaki realan broj. Možeš li to obrazložiti? Koliko je primjerice $\sqrt[3]{-8}$? Treći korijen kalkulatorom računamo s pomoću tipke $\sqrt[3]{x}$ ili $\sqrt[y]{x}$, a ako one ne postoje, onda s pomoću tipke x^y tako da se kao vrijednost varijable y upiše razlomak $\frac{1}{3}$.

Zadatak 5. Provjeri uporabom kalkulatora:

1) $\sqrt[3]{100}\approx 4.64$; **2)** $\sqrt[3]{55}\approx 3.8$; **3)** $\sqrt[3]{12\,000}\approx 22.89$; **4)** $\sqrt[3]{0.09}\approx 0.448$.

Zadatak 6. Procijeni sljedeće brojeve pa tu procjenu provjeri uporabom kalkulatora:

1) $\sqrt[3]{7}$; **2)** $\sqrt[3]{330}$; **3)** $\sqrt[3]{91}$; **4)** $\sqrt[3]{1100}$.

OZNAKE KORIJENA

Znak na prvoj slici desno potječe od Leonarda iz Pise (1220. g.), poznatijeg kao Fibonacci (od *filius Bonacii*, 'Bonacijev sin'), koji ga je upotrebljavao pri zapisivanju drugog korijena realnog broja. Vjerojatno je odabran zbog riječi *radix* koja na latinskom jeziku znači 'korijen'.

Današnja oznaka $\sqrt{\ }$ za drugi korijen nastala je u Njemačkoj u 16. stoljeću.

Simbol za treći korijen na drugoj slici desno uveo je njemački matematičar Christoff Rudolf.

Današnja oznaka $\sqrt[3]{\ }$ vuče podrijetlo iz Francuske (17. st.).

PALINDROMNI BROJEVI

Palindromi su brojevi ili rečenice koji su jednaki čitaju li se od početka prema kraju ili obrnuto. Palindromni (ili palindromski) brojevi imaju više zanimljivih svojstava. Jedno od tih svojstava otkrit ćeš ako izračunaš

$$\sqrt{121},\ \sqrt{12321},\ \sqrt{1234321},\ \sqrt{123454321}.$$

Nastavi ovaj niz s još nekoliko članova. Što zaključuješ?
Ima palidromnih brojeva koji su treće potencije određenih prirodnih brojeva. Takvi su primjerice 1331, 1030301, 1003003001, 1000300030001. Provjeri!

Zadatci 1.1.

1. Izračunaj bez uporabe džepnog računala:

1) $0.5 \cdot \sqrt{0.04} + \frac{1}{6}\sqrt{144}$;

2) $\frac{1}{2}\sqrt{196} + 1.5 \cdot \sqrt{0.36}$;

3) $\frac{3}{4}\sqrt{2.56} - 1.2 \cdot \sqrt{2\frac{1}{4}}$;

4) $\frac{2}{3}\sqrt{0.81} + 4 \cdot \sqrt{1.21}$.

2. Između koja se dva uzastopna cijela broja nalazi broj

1) $\sqrt{15}$; **2)** $\sqrt{200}$; **3)** $\sqrt{0.8}$; **4)** $\sqrt{990}$?

3. Provjeri jednakosti:

1) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$;

2) $\sqrt{2}-1 = \sqrt{3-2\sqrt{2}}$;

3) $2-\sqrt{3} = \sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

4. Izračunaj:

1) $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$;

2) $\sqrt{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2} + \sqrt{(2\sqrt{2}-3\sqrt{3})^2}$.

5. Za koje realne brojeve x vrijedi:

1) $\sqrt{(2x-1)^2} = 2x-1$;

2) $\sqrt{(x+2)^2} = -x-2$;

3) $\sqrt{(3-4x)^2} = 4x-3$;

4) $\sqrt{x^2-6x+9} = 3-x$;

5) $\sqrt{9x^2-12x+16} = 3x-4$;

6) $\sqrt{4x^2-4x+1} = 1-2x$?

6. Koliko je:

1) $\sqrt{x^2-2x+1} - \sqrt{x^2+4x+4}$, za $-2 \leqslant x \leqslant 1$;

2) $\sqrt{4x^2-4x+1} - \sqrt{x^2+2x+1}$, za $-1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$;

3) $\sqrt{x^2-6x+9} - \sqrt{x^2-4x+4} - \sqrt{x^2-2x+1}$, za $2 \leqslant x \leqslant 3$?

7. Duljine kateta pravokutnog trokuta jednake su 11 cm i 19 cm. Kolika je duljina hipotenuze?

8. Duljine hipotenuze i jedne katete pravokutnog trokuta jednake su 27 cm i 17 cm. Kolika je duljina druge katete?

9. Nožište visine na hipotenuzu pravokutnog trokuta dijeli hipotenuzu na dva dijela duljina 18 cm i 8 cm. Kolika je duljina visine?

10. Površina kruga iznosi 330π cm^2. Koliki je opseg ovog kruga?

11. Koliko će vremena trajati slobodni pad kamenčića ispuštenog s visine 50 metara?

12. Površina trokuta kojem su duljine stranica jednake a, b i c računa se po Heronovoj formuli $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje je s polovina opsega trokuta. Izračunaj površinu trokuta kojem su duljine stranica jednake

1) $a = 13$ cm, $b = 14$ cm, $c = 15$ cm;

2) $a = 1.1$ dm, $b = 1.3$ dm, $c = 2$ dm.

13. Skok s visoke litice (engl. *cliff diving*) jedan je od adrenalinskih sportova. Među popularnijim natjecanjima u ovom sportu je i skok sa starog mosta u Mostaru.

Skače se s visine od 27 metara. Na internetu nalazimo podatak da skok traje 3 sekunde te da skakač pri ulasku u vodu doseže brzinu od 90 km/ h. Jesu li ti podatci vjerodostojni?

14. U meteorologiji se rabe baloni kako bi se pratile razne pojave u troposferi. Takvi baloni uzdižu se do visine od 30 km. Koliki je polumjer kružnice koja je granica područja koje "pokriva" jedan takav balon s visine 25 km?

15. Prva kozmička brzina je brzina kojom se giba satelit po kružnoj stazi oko nekog nebeskog tijela. Računa se po formuli $v = \sqrt{\frac{G \cdot m}{r}}$, gdje je G gravitacijska konstanta, m masa tijela oko kojeg se satelit giba, r polumjer kružne staze. Za Zemlju je $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$, $m = 6 \cdot 10^{24}$ kg te $r = 6400$ km. Prva kozmička brzina za Zemlju iznosi približno 7.91 km/s. Provjeri ovaj podatak.

16. Provjeri i obrazloži:

1) $\sqrt[3]{1331} = 11$; **2)** $\sqrt[3]{512} = 8$;

3) $\sqrt[3]{0.125} = \frac{1}{2}$; **4)** $\sqrt[3]{\frac{125}{216}} = \frac{5}{6}$;

5) $\sqrt[3]{0.001} = 0.1$; **6)** $\sqrt[3]{3.375} = 1.5$.

17. Uz uporabu tablice trećih potencija odredi

1) $\sqrt[3]{729}$; **2)** $\sqrt[3]{8000}$; **3)** $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$;

4) $\sqrt[3]{\frac{1}{0.001}}$; **5)** $\sqrt[3]{1.728}$.

18. Između koja se dva uzastopna cijela broja nalazi broj

1) $\sqrt[3]{25}$; **2)** $\sqrt[3]{250}$; **3)** $\sqrt[3]{2500}$.

19. Izračunaj:

1) $\sqrt[3]{-27} + \sqrt[3]{27}$; **2)** $\sqrt[3]{-216} - \sqrt[3]{-343}$;

3) $\sqrt[3]{0.001} \cdot \sqrt[3]{-0.125}$; **4)** $\frac{\sqrt[3]{729}}{\sqrt[3]{-1331}}$.

20. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza

$$\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{8x}} + \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{4x}}$$

za $x = 2$.

21. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza

$$\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{9x}} - \sqrt[3]{9 \cdot \sqrt{3x}}$$

za $x = 3$.

22. Izračunaj vrijednost brojevnog izraza

$$\sqrt[3]{0.01 \cdot \sqrt{0.1x}} + \sqrt{0.01 \cdot \sqrt[3]{10x}}$$

za $x = 0.1$.

23. Obujam kugle čiji je polumjer jednak R računa se po formuli $V = \frac{4}{3}R^3\pi$. Gustoća zlata je 19.3 g/cm^3. Ako je masa zlatne kuglice 10 g, koliki je njezin polumjer?

24. Stotinu olovnih kuglica promjera 1 mm pretopimo i oblikujemo u jednu veću kuglu. Koliki je polumjer te veće kugle?

25. Ako je površina jedne strane kocke 20 cm^2, koliki je obujam kocke?

26. Ako je obujam kocke 20 cm^3, koliko je njezino oplošje?

27. Sve strane trostrane piramide sukladni su jednakostranični trokuti. Obujam V takve piramide jednak je $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ gdje je a duljina njezina brida. Ako je obujam piramide 1 dm^3, kolika je duljina njezina brida?

TOČNO-NETOČNO PITALICE

Koje su od sljedećih tvrdnji točne, a koje netočne? Odgovori, a odgovor obrazloži.

1. Drugi korijen iz negativnog broja negativan je broj.
2. Treći korijen iz negativnog broja negativan je broj.
3. $\sqrt[3]{2^3 + 3^3 + 5^3} = 10$.
4. $\sqrt[3]{-0.001} = -0.1$.
5. Ako je $\sqrt[3]{a} = b^2$, onda je $\sqrt{a} = b^3$.
6. Ako je $\sqrt{x} = 8$, onda je $\sqrt[3]{x} = 4$.
7. Ako je $a^3 = b$, onda je $b = \sqrt[3]{a}$.
8. Ako je broj x iz intervala $\langle 0, 1 \rangle$, onda je $\sqrt{x} < \sqrt[3]{x}$.
9. Broj $\sqrt{0.1}$ veći je od broja $\sqrt[3]{0.1}$.
10. Ako je $\sqrt[3]{a} = b^2$, onda je $\sqrt{a} = b^3$.

1.2. Računanje s korijenima

U osnovnoj školi učili smo o pravilima koja se primjenjuju pri računanju s drugim korijenima. Ponovimo ta pravila za množenje i dijeljenje.

Množenje i dijeljenje drugih korijena

Za svaka dva pozitivna broja a i b vrijedi:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \qquad \text{i} \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Primjer 1. Primjenom pravila za množenje i dijeljenje drugih korijena izračunajmo

1) $\sqrt{0.1}\cdot\sqrt{0.9}$; **2)** $\sqrt{125}:\sqrt{5}$; **3)** $\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\sqrt{\frac{1}{15}}$.

1) $\sqrt{0.1}\cdot\sqrt{0.9}=\sqrt{0.1\cdot 0.9}=\sqrt{0.09}=0.3$;

2) $\sqrt{125}:\sqrt{5}=\sqrt{125:5}=\sqrt{25}=5$;

3) $\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\sqrt{\frac{1}{15}}=\sqrt{\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{15}}=\sqrt{\frac{1}{25}}=\frac{1}{5}$.

Zadatak 1. Primjenom pravila množenja i dijeljenja izračunaj:

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$; **2)** $\sqrt{50}\cdot\sqrt{12}\cdot\sqrt{6}$; **3)** $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{200}}$; **4)** $\sqrt{14}\cdot\sqrt{\frac{1}{21}}\cdot\sqrt{24}$.

Pravila koja smo primjenjivali pri računanju s drugim, proširujemo i na računanje s trećim korijenima.

Množenje i dijeljenje trećih korijena

Za svaka dva realna broja a i b vrijedi:

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a\cdot b} \qquad \text{i} \qquad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

Primjer 2. Primijenjujući pravila za račun s trećim korijenima, računamo:

1) $\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{16 \cdot 4} = \sqrt[3]{64} = 4\,;$

2) $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{12 \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2\,;$

3) $\sqrt[3]{25} : \sqrt[3]{5.4} = \sqrt[3]{\frac{25}{5.4}} = \sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{5}{3}\,.$

Zadatak 2. Izračunaj:

1) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}\,;$ **2)** $\sqrt[3]{0.45} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{0.3}\,;$ **3)** $\sqrt[3]{\frac{5}{16}} : \sqrt[3]{0.16}\,.$

Pri računanju s algebarskim izrazima u kojima se pojavljuju drugi i treći korijeni primjenjujemo algebarske identitete obrađene u 1. razredu te slijedimo pravila računanja s korijenima.

Primjer 3. Provedimo sljedeće računske operacije kvadriranja i kubiranja:

1) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2\,;$ **2)** $(\sqrt{3} - 1)^3\,.$

◆ **1)** $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{2 \cdot 3} + 3$
$= 5 + 2\sqrt{6}\,;$

2) $(\sqrt{3} - 1)^3 = (\sqrt{3})^3 - 3 \cdot (\sqrt{3})^2 + 3 \cdot \sqrt{3} - 1 = 3\sqrt{3} - 9 + 3 \cdot \sqrt{3} - 1$
$= -10 + 6\sqrt{3}\,.$

Zadatak 3. Provedi naznačene računske operacije:

1) $(\sqrt{2} - 1)^2\,;$ **2)** $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^3\,;$ **3)** $(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{8})^2\,;$ **4)** $(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4})^3\,.$

Primijetimo kako za svaki realni broj a vrijedi:

$$\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{a \cdot a} = \sqrt[3]{a^2}.$$

U skupinu osnovnih algebarskih identiteta svrstavamo razliku kvadrata te razliku i zbroj kubova. Drugi i treći korijen omogućuju nam proširenje tih identiteta. Tako primjerice razliku $a - b$ dvaju brojeva možemo shvatiti kao razliku kvadrata.

Zapisat ćemo

$$a - b = (\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2$$

pa je onda

$$a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b}) \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b}).$$

Istu razliku možemo tumačiti i kao razliku kubova pa imamo:

$$a - b = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 - \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right).$$

Jednako tako možemo zapisati:

$$a + b = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}\right).$$

Primjer 4. Rastavimo na faktore sljedeće izraze:

1) $x - 4y$; **2)** $8x - 27y$; **3)** $2x + 3y$.

Pritom izraz pod 1) shvatimo kao razliku kvadrata, izraz pod 2) kao razliku kubova, a izraz pod 3) kao zbroj kubova.

◆ **1)** $x - 4y = (\sqrt{x})^2 - (2\sqrt{y})^2 = (\sqrt{x} - 2\sqrt{y}) \cdot (\sqrt{x} + 2\sqrt{y})$;

2) $8x - 27y = (2\sqrt[3]{x})^3 - (3\sqrt[3]{y})^3 = (2\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}) \cdot (4\sqrt[3]{x^2} + 6\sqrt[3]{xy} + 9\sqrt[3]{y^2})$;

3) $2x + 3y = (\sqrt[3]{2x})^3 + (\sqrt[3]{3y})^3 = (\sqrt[3]{2x} + \sqrt[3]{3y}) \cdot (\sqrt[3]{4x^2} - \sqrt[3]{6xy} + \sqrt[3]{9y^2})$.

Zadatak 4. Dvočlani izraz $x - 64$ rastavi na faktore kao razliku kvadrata. Potom isti izraz rastavi kao razliku kubova.

Primjer 5. Oslanjajući se na osnovne identitete, provedimo množenja:

1) $(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})$; **2)** $(\sqrt{10} - 1) \cdot (11 + \sqrt{10})$;

3) $(1 + \sqrt[3]{5}) \cdot (1 - \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{25})$.

◆ **1)** U umnošku prepoznajemo razliku kvadrata pa računamo:
$(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 = 3 - 2 = 1$.

2) Zapišemo li $(\sqrt{10} - 1) \cdot (11 + \sqrt{10}) = (\sqrt{10} - 1) \cdot (10 + \sqrt{10} + 1)$, uočit ćemo kako je riječ o razlici kubova $(\sqrt{10})^3 - 1 = 10\sqrt{10} - 1$.

3) Ovaj umnožak možemo kraće zapisati kao zbroj kubova $1^3 + (\sqrt[3]{5})^3$, a taj iznosi $1 + 5 = 6$.