6 Trigonometrija trokuta

Što ću naučiti?

- kako iz tri poznata elementa kosokutnog trokuta odrediti ostale njegove elemente
- rabiti džepno računalo pri određivanju vrijednosti trigonometrijskih funkcija šiljastih i tupih kutova
- primjenjivati poučak o sinusima i poučak o kosinusu u raznim zadatcima iz geometrije
- primjenjivati poučak o sinusima i poučak o kosinusu na problem iz svakodnevnog života
- rabiti program dinamičke geometrije

Dodatni sadržaji

Pripremi se za gradivo koje slijedi, riješi pripremne zadatke koji se nalaze u digitalnoj inačici.

Projektiranje raznih niskogradnji i visokogradnji zahtijeva istraživanje terena na kojem će se gradnja izvoditi. Mjerenje terena potrebno je i iz brojnih drugih razloga. Provode ga geodeti, a jedan od neophodnih instrumenata kojim se pritom koriste je teodolit – sprava za mjerenje kutova u triangulacijskoj mreži. U raznim drugim strukama, kao što su primjerice pomorstvo ili astronomija, za mjerenje kutova rabe se i neki drugi instrumenti. Na jednoj staroj slici vidimo jedan od njih – sekstant služi za mjerenje tzv. kutne visine nebeskih tijela, prije svega Sunca i Mjeseca.

Određivanje kutova ponekad je samo dio posla iza kojega slijedi računanje udaljenosti između dviju danih točaka. Pritom se sav taj račun uglavnom svodi na "rješavanje trokuta".

Riješiti trokut znači 'iz zadanih podataka odrediti njegove nepoznate elemente'. Osnovni su elementi trokuta njegove stranice i kutovi. Da bismo mogli odrediti nepoznate elemente, najprije moramo otkriti kakve veze postoje između tih elemenata. Temeljne veze između stranica i kutova u trokutu iskazane su dvama **poučcima***: poučkom o sinusima i poučkom o kosinusu, koje ćemo proučiti u ovom poglavlju.*

U uvodnom ćemo se dijelu prisjetiti definicije trigonometrijskih funkcija šiljastih kutova u pravokutnom trokutu i poopćiti te definicije na bilo koje kutove po volji odabranog trokuta.

6.1. Trigonometrijske funkcije kutova u trokutu

Trigonometrijske funkcije kuta u pravokutnom trokutu

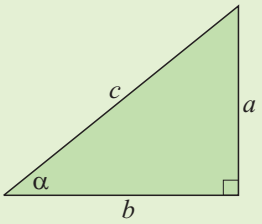
U pravokutnom trokutu jedan kut ima mjeru $90°$, a dva preostala kuta su *šiljasta*, njihova je mjera manja od $90°$. Označimo vrhove, stranice i kutove u trokutu na uobičajeni način. Definirali smo *trigonometrijske funkcije šiljastog kuta* u pravokutnom trokutu na sljedeći način.

Trigonometrijske funkcije šiljastog kuta u pravokutnom trokutu

Sinus, **kosinus**, **tangens** i **kotangens** kuta α definirani su omjerima duljina stranica u pravokutnom trokutu:

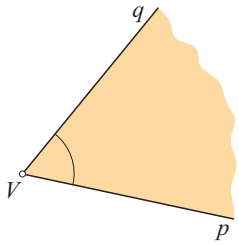
$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \cos\alpha = \frac{b}{c},$$

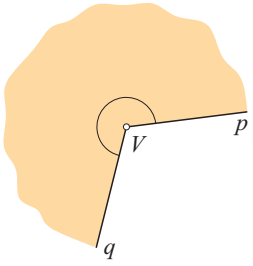
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}.$$



Zadatak 1. Odredi vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova α i β u pravokutnom trokutu kojemu su katete $a = 2$ cm i $b = 3$ cm.

Želimo definirati trigonometrijske funkcije za kutove po volji odabranog trokuta. Oni mogu imati mjere od $0°$ do $180°$. Stoga je korisno pojam kuta i trigonometrijske funkcije tog kuta promotriti u općenitijoj situaciji.

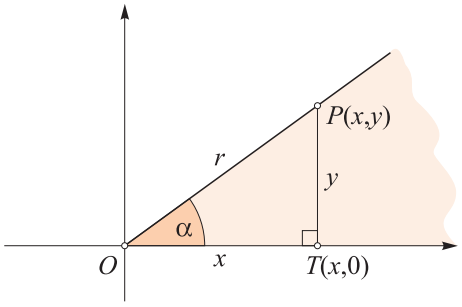




Kut je dio ravnine određen dvjema zrakama (polupravcima) sa zajedničnim početkom. Pritom označavamo (lukom ili na koji drugi način) na koji dio ravnine određen tim parom zraka mislimo.

Mjera kuta je pozitivan broj, između $0°$ i $360°$. Ovisno o tome kolika im je mjera, za neke smo kutove govorili da su šiljasti, pravi, tupi, ispruženi, izbočeni i puni.

Promatrat ćemo kutove s mjerom od $0°$ do $180°$ pa ćemo radi toga od dvaju kutova određenih polupravcima uvijek uzimati onaj manje mjere.



Neka je α bilo koji šiljasti kut. Nacrtajmo ga u gornjoj poluravnini tako da mu vrh bude u ishodištu koordinatnog sustava, a os Ox jedan od polupravaca koji određuju kut. Na drugom polupravcu uzmimo bilo koju točku P. Njezine koordinate označimo sa x i y.

Udaljenost točke P do ishodišta označimo sa r.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

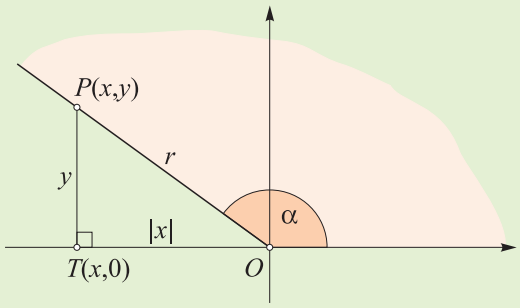
Iz pravokutnog trokuta OTP čitamo:

$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}.$$

Neka je sad α tupi kut. Onda se točka P nalazi u drugom kvadrantu. Sinus i kosinus ovog kuta definirat ćemo na identičan način.

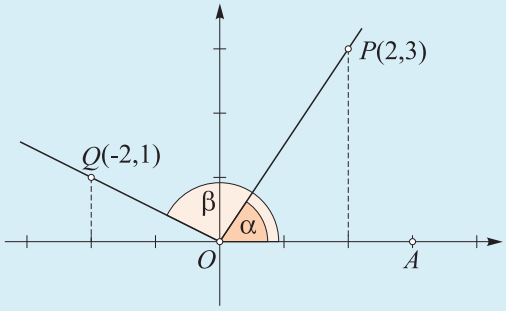
Sinus i kosinus kuta

Neka je točka $P(x, y)$ na drugom polupravcu kuta α i r udaljenost te točke do ishodišta. Onda definiramo



$$\sin\alpha = \frac{y}{r}, \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r}.$$

Primjer 1. Zadane su točke $P(2, 3)$ i $Q(-2, 1)$. Odredimo sinus i kosinus kutova α i β prema slici



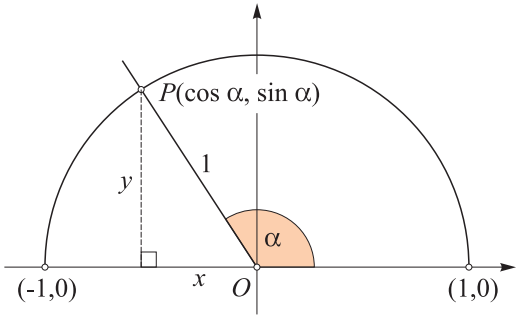
Za kut $\alpha = \sphericalangle AOP$ imamo $r = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$ pa je

$$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \qquad \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Za kut $\beta = \sphericalangle AOQ$ imamo $r = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ pa vrijedi

$$\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{5}}.$$

Kut β je tup. Apscisa točke Q je negativna, pa je i kosinus ovog kuta također negativan.



Nacrtajmo polukružnicu polumjera 1 sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava. Neka je $P(x, y)$ bilo koja točka te polukružnice. Ta točka određuje kut α.

Udaljenost točke P od ishodišta je 1 pa prema definicijama trigonometrijskih funkcija vrijedi

$$x = \cos\alpha, \qquad y = \sin\alpha.$$

Dakle, koordinate točke P su vrijednosti kosinusa i sinusa kuta α pa je $P(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Budući da je $x^2 + y^2 = 1$, za svaki je kut α

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Primjer 2. Odredimo sinus i kosinus sljedećih kutova: $\alpha = 45°$, $\beta = 80°$, $\gamma = 160°$.

Računanje sinusa i kosinusa s pomoću definicije nije uvijek moguće učiniti. Razlog tome je što ne znamo uvijek izračunati koordinate točke P koja određuje zadani kut. U ovom primjeru to možemo učiniti za kut α. Krak ovog kuta je simetrala prvog kvadranta pa mu je jednadžba $y = x$. To znači da će svaka točka s jednakim koordinatama ležati na tom pravcu. Uzmemo li primjer točku $P(1, 1)$, onda je

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Koordinate točke koja određuje kut β nije moguće odrediti na ovakav način. Sinus kuta možemo odrediti isključivo uporabom računala. Postupak smo naučili u prvom razredu.

Računamo sinus kuta $80°$.

1. Provjerimo je li računalo u modu za računanje sa stupnjevima. Ako nije, pritisnemo tipku DEG ili njezin ekvivalent.
2. Unesemo podatak 80: 8 0 .
3. Pritisnemo tipku SIN . Na zaslonu džepnog računala pojavit će se broj 0.984807753 koji uobičajeno zaokružujemo na četiri značajne znamenke: $\sin 80° = 0.9848$.

Na novijim računalima sa simboličkim zapisom poredak računanja može biti obrnut: najprije se odabere tipka za funkciju, a onda unese podatak o kutu. Provjerite na svom računalu i izračunajte sljedeće dvije vrijednosti:

$$\sin 45° = 0.7071, \qquad \sin 160° = 0.3420.$$

Na isti način određujemo vrijednosti kosinusa:

$$\cos 45° = 0.7071, \qquad \cos 80° = 0.1736, \qquad \cos 160° = -0.9397.$$

Kosinus tupog kuta je, naravno, negativan.

Džepna računala posjeduju tri tipke za računanje sinusa, kosinusa i tangensa zadanog kuta. Vrijednost kotangensa računa se s pomoću tangensa jer je

$$\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Dakle, kotangens računamo tako da najprije odredimo tangens, a onda pritisnemo tipku $1/x$ za računanje recipročne vrijednosti.

Zadatak 2. Prepiši u bilježnicu i popuni sljedeću tablicu vrijednosti trigonometrijskih funkcija. Rezultate zapisuj s četirima decimalama. Radi kontrole unesene su neke točne vrijednosti:

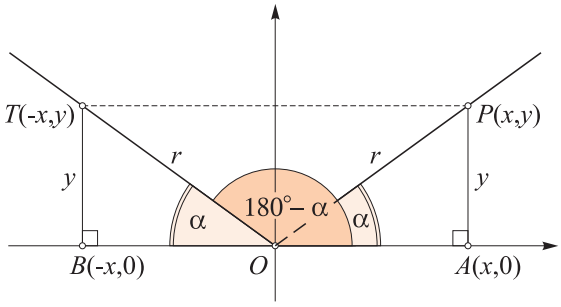
	sin	cos	tg	ctg
20°		0.9397		
50°			1.1918	
80°				
110°				−0.3640
140°				
170°				

Suplementarni kutovi

Dva su kuta α i β **suplementarna** ako zajedno čine ispruženi kut:

$$\alpha + \beta = 180°.$$

Dakle, suplementaran kut kutu α je $(180° - \alpha)$. Pri tom α može biti bilo koji, šiljasti ili tupi kut.



sinus i kosinus suplementarnih kutova.

Na slici su nacrtana dva suplementarna kuta. Neka je $\alpha = \sphericalangle AOP$ i neka su (x, y) koordinate točke P. Označimo na drugom kraku kuta $180° - \alpha$ točku T s ordinatom y i neka je B njezina projekcija na os apscisa. Trokuti AOP i BOT su sukladni jer se podudaraju u kutovima i stranici duljine y. To znači da je $|OB| = |OA| = x$ pa su $(-x, y)$ koordinate točke T. Sad imamo

$$\sin(180° - \alpha) = \frac{y}{r} = \sin\alpha,$$

$$\cos(180° - \alpha) = \frac{-x}{r} = -\cos\alpha.$$

Za tangens i kotangens suplementarnih kutova imamo

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = \frac{\sin(180° - \alpha)}{\cos(180° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = \frac{\cos(180° - \alpha)}{\sin(180° - \alpha)} = \frac{-\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

Trigonometrijske funkcije nekih posebnih kutova

U prvom smo razredu naučili određivati točne vrijednosti sinusa, kosinusa, tangensa i kotangensa za kutove $30°$, $45°$ i $60°$. Primjerice

$$\sin 30° = \frac{1}{2}, \qquad \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ako je to prikladno, ove se vrijednosti ne pretvaraju u decimalni broj već ih pišemo u ovom obliku.

Koristeći svojstvo suplementarnih kutova, tablicu istaknutih vrijednosti proširujemo i na kutove $120°$, $135°$, $150°$:

$$\sin 120° = \sin(180° - 120°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin 135° = \sin(180° - 135°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$\sin 150° = \sin(180° - 150°) = \sin 30° = \frac{1}{2}.$$

Slično određujemo i vrijednosti kosinusa, a onda iz sinusa i kosinusa računamo tangens i kotangens. Primjerice:

$$\cos 120° = -\cos(180° - 120°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2},$$
$$\operatorname{tg} 120° = \frac{\sin 120°}{\cos 120°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$$

Često će nam trebati vrijednosti u sljedećoj tablici:

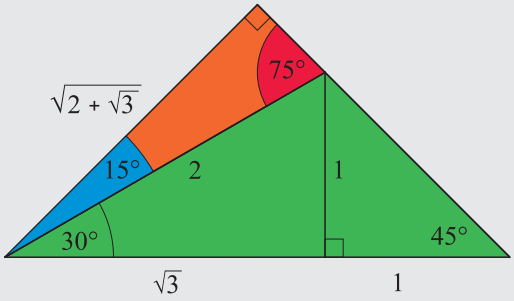
	$30°$	$45°$	$60°$	$120°$	$135°$	$150°$
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
ctg	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$

Desna polovica gornje tablice može se zapamtiti iz lijeve i svojstva suplementnih kutova.

Ovoj tablici dodat ćemo i vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova $0°$, $90°$ i $180°$. Sinus i kosinus bilo kojeg kuta uvijek su dobro definirane vrijednosti, što nije slučaj s tangensom i kotangensom.

	$0°$	$90°$	$180°$
sin	0	1	0
cos	1	0	-1
tg	0	ne postoji	0
ctg	ne postoji	0	ne postoji

TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE KUTOVA OD $15°$ i $75°$



Računanje s minutama i sekundama

Prisjetimo se i računanja kutova zadanih u stupnjevima, minutama i sekundama.

S obzirom na to da džepno računalo računa vrijednosti trigonometrijskih funkcija koje su unesene **u stupnjevima**, prije računa potrebno je pretvoriti minute i sekunde u odgovarajući dio stupnja. Taj postupak provodimo uporabom džepnog računala.

Primjer 3. Odredimo sinus i kosinus sljedećih kutova: $15°23'31''$, $72°1'50''$, $130°12'5''$.

Podatke treba unijeti na ovaj način:

stupnjevi . minute sekunde .

Minute i sekunde uvijek se unose s dvjema decimalama. U ovom ćemo primjeru napisati:

1 5 . 2 3 3 1

7 2 . 0 1 5 0

1 3 0 . 1 2 0 5

Tipka za pretvaranje ovih vrijednosti u stupnjeve na različitim je računalima označena na različite načine. Obično je to →HR ili ° ′ ″ → ili →DEG . Provjerite usporedbom s ovim vrijednostima:

$$15°23'31'' = 15.39194444°$$
$$72°1'50'' = 72.03055556°$$
$$130°12'5'' = 130.20138889°$$

Dobivene rezultate ne zapisujemo, već odmah nastavljamo s računanjem vrijednosti trigonometrijskih funkcija (zapamtivši rezultat u spremnik računala):

$$\sin(15°23'31'') = 0.265421 \qquad \cos(15°23'31'') = 0.964133$$
$$\sin(72°1'50'') = 0.951221 \qquad \cos(72°1'50'') = 0.308510$$
$$\sin(130°12'5'') = 0.763780 \qquad \cos(130°12'5'') = -0.645476$$

Rezultat moramo zapisivati sa šest znamenaka jer se primjerice vrijednost sinusa kuta $15°23'32''$ razlikuje od vrijednost sinusa kuta $15°23'31''$ u šestoj decimali.

Određivanje kuta

Poznata nam je vrijednost trigonometrijske funkcije nekog kuta α. Kolika je mjera tog kuta?

Pri određivanju kuta svaka od trigonometrijskih funkcija ima svoje posebnosti pa ćemo opisati račun detaljno, za svaku pojedinu funkciju.

Određivanje kuta iz poznatog kosinusa

U ovom se slučaju možemo pouzdati u vrijednost koju će nam dati računalo. Ako je kosinus pozitivan, dobit ćemo kut s mjerom $0° < \alpha < 90°$. Ako je kosinus negativan, mjera kuta nalazit će se u granicama $90° < \alpha < 180°$.

Primjer 4. Odredimo kutove α i β ako vrijedi $\cos\alpha = 0.2$, $\cos\beta = -0.4323$.

Broj 0.2 uzimamo kao *točnu vrijednost* kosinusa pa ćemo rezultat potražiti do na sekunde kuta. Unesemo vrijednost u računalo i pritisnemo tipku označenu sa $\boxed{\text{COS}^{-1}}$ ili $\boxed{\text{ACOS}}$ ili pak kombinaciju $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{COS}}$, ovisno o vrsti računala:

$$0.2 \ \boxed{\text{COS}^{-1}} = 78.463041.$$

Dobivena je vrijednost kuta *u stupnjevima*. Uobičajeno je pretvoriti taj broj u seksagezimalni sustav s pomoću tipke označene sa $\boxed{\rightarrow \text{DMS}}$, $\boxed{\rightarrow {}^\circ\,{}'\,{}''}$ ili sličnom oznakom:

$$\boxed{\rightarrow \text{DMS}} = 78^\circ 27' 47''.$$

Dakle, $\alpha = 78^\circ 27' 47''$. Provjeri ovaj račun na svom računalu.

U drugom slučaju dobivamo

$$-0.4323 \ \boxed{\text{COS}^{-1}} = 115.613613 \ \boxed{\rightarrow \text{DMS}} = 115^\circ 37'.$$

Vrijednost -0.4323 nalikuje na približnu vrijednost kosinusa (danu tima četirima decimalama) pa u rezultatu ne zapisujemo sekunde. Za određivanje sekunda vrijednost funkcije mora biti ili točna ili dana s točnošću od barem šest decimala. Dakle, $\beta = 115^\circ 37'$.

Određivanje kuta iz poznatog sinusa

Sinus šiljastog i tupog kuta uvijek je pozitivan pa će jednadžba

$$\sin\alpha = p$$

imati dva rješenja, za $0 < p < 1$. Računalo će dati mjeru kuta koja se nalazi unutar intervala $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Tražimo li tupi kut, onda je riječ o suplementu ovog kuta.

Primjer 5. Odredimo kut α ako je poznato $\sin\alpha = 0.323412$.

Račun izgleda ovako:

$$0.323412 \ \boxed{\text{SIN}^{-1}} = 18.869394 \ \boxed{\rightarrow \text{DMS}} = 18^\circ 52' 10''.$$

Dobiveni je kut šiljast. Ako rješenje koje tražimo odgovara tupom kutu, onda trebamo računati suplement:

$$180^\circ - 18^\circ 52' 10'' = 161^\circ 7' 50''.$$

Rješenje je jedan od sljedećih dvaju kutova, $\alpha_1 = 18^\circ 52' 10''$, $\alpha_2 = 161^\circ 7' 50''$.

Suplement se treba računati prije pretvorbe u segzadecimalni sustav. U ovom bi primjeru završetak računa bio:

$$18.869394 \ \boxed{+/-} \ \boxed{+} \ 180 \ \boxed{=} \ \boxed{\rightarrow \text{DMS}} \ = 161°7'50''$$

Ovdje je $\boxed{+/-}$ tipka za promjenu predznaka.

Određivanje kuta iz poznatog tangensa

Ako je vrijednost tangensa pozitivna, onda je kut šiljast i računalo će dati njegovu mjeru. Ako je vrijednost tangensa negativna, onda je kosinus negativan pa je traženi kut tup. Međutim. rezultat na računalu neće biti mjera tog kuta, već će računalo dati kao rezultat *negativnu* mjeru nekog kuta. Stoga taj rezultat trebamo prevesti u traženi, kako je pokazano u sljedećem primjeru.

Primjer 6. Odredimo kut α ako je poznato $\operatorname{tg}\alpha = -2.13425$.

Kut α je tup jer je tangens negativan. Neka je $\beta = 180° - \alpha$ njegov suplement. Onda je $\operatorname{tg}\beta = -\operatorname{tg}\alpha = 2.13425$. Sad možemo odrediti kut β pa onda i njegov suplement α:

$$2.13425 \ \boxed{\text{TG}^{-1}} \ = 64.89462 \ \boxed{+/-} \ \boxed{+} \ 180 \ \boxed{=} \ \boxed{\rightarrow \text{DMS}} \ = 115°6'19'' = \alpha.$$

Možemo postupati i ovako. Upišemo li početnu negativnu vrijednost u računalo i pritisnemo $\boxed{\text{TG}^{-1}}$, dobit ćemo rezultat $-\beta$ pa ne moramo koristiti tipku za promjenu predznaka. Toj vrijednosti treba dodati $180°$:

$$-2.13425 \ \boxed{\text{TG}^{-1}} \ = -64.89462 \ \boxed{+} \ 180 \ \boxed{=} \ \boxed{\rightarrow \text{DMS}} \ = 115°6'19'' = \alpha.$$

Određivanje kuta iz poznatog kotangensa

Kotangens se u računalu računa preko tangensa. Zato moramo najprije odrediti vrijednost tangensa, a potom traženi kut.

Primjer 7. Odredimo kut α ako je zadano $\operatorname{ctg}\alpha = -0.1$.

Traženi kut je tup. Vrijednost tangensa je $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ pa račun izgleda ovako:

$$-0.1 \ \boxed{1/x} \ \boxed{\text{TG}^{-1}} \ = -84.289407 \ \boxed{+} \ 180 \ \boxed{=} \ \boxed{\rightarrow \text{DMS}} \ = 95°42'38'' = \alpha.$$