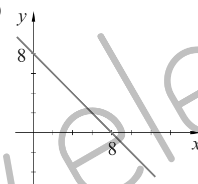
6 Linearna funkcija. Sustavi jednadžbi

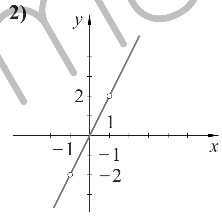
6.1. Graf linearne jednadžbe

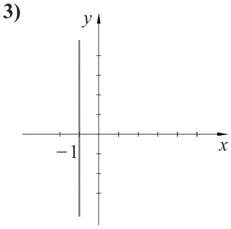
Zadatak 1. Nacrtaj grafove sljedećih jednadžbi:

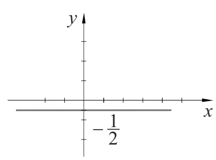
1) $x+y=8$; **2)** $2x-y=0$; **3)** $x=-1$;
4) $2y+1=0$. **5)** $3x+4y=6$; **6)** $x+y=0$;
7) $3x=-9$; **8)** $-2y=1$. **9)** $3x+2y=0$;
10) $2y=5$; **11)** $x+4=0$; **12)** $4x-6y=15$.

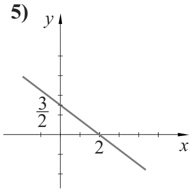
Rješenje.

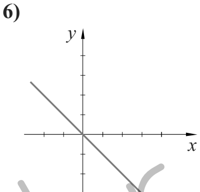
1)


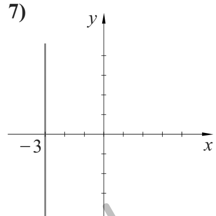
2)


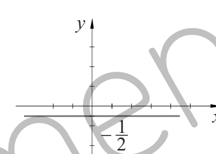
3)


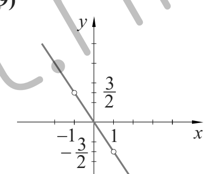
4)


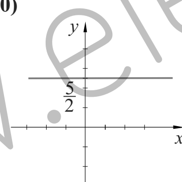
5)


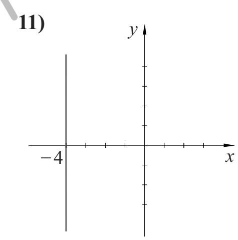
6)


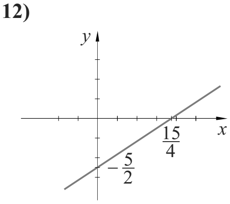
7)


8)


9)


10)


11)


12)


Zadatak 2. Dane su točke A i B. Napiši jednadžbu pravca određenog tim dvjema točkama ako je:

1) $A(2,-1)$, $B(5,2)$; **2)** $A(-4,-4)$, $B(2,5)$; **3)** $A(-1,0)$, $B(5,-4)$.

Rješenje. **1)** Uvrštavanjem koordinata točaka A i B u jednadžbu $y = ax + b$, dobijemo sustav:

$$-1 = 2a + b,$$
$$2 = 5a + b.$$

Ako iz prve jednadžbe izrazimo $b = -2a - 1$ i to uvrstimo u drugu jednadžbu, dobit ćemo $2 = 5a - 2a - 1$. Odatle je $a = 1$ i potom $b = -3$. Jednadžba pravca glasi $y = x - 3$;
2) Uvrštavanjem koordinata točaka A i B u jednadžbu $y = ax + b$, dobijemo sustav:

$$-4 = -4a + b,$$
$$5 = 2a + b.$$

Ako iz prve jednadžbe izrazimo $b = 4a - 4$ i to uvrstimo u drugu jednadžbu, dobit ćemo $5 = 2a + 4a - 4$. Odatle je $a = \frac{3}{2}$ i potom $b = 2$. Jednadžba pravca glasi $y = \frac{3}{2}x + 2$;
3) Uvrštavanjem koordinata točaka A i B u jednadžbu $y = ax + b$, dobijemo sustav:

$$0 = -a + b,$$
$$-4 = 5a + b.$$

Ako iz prve jednadžbe izrazimo $b = a$ i to uvrstimo u drugu jednadžbu, dobit ćemo $-4 = 5a + a$. Odatle je $a = -\frac{2}{3}$, pa je i $b = -\frac{2}{3}$. Jednadžba pravca glasi $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$.

Zadatak 3. Odredi jednadžbu pravca koji je određen dvjema točkama:

1) $A(-3, -3)$, $B(5, -3)$;
2) $A(-4, 2)$, $B(-4, -5)$;
3) $A(-1, 1)$, $B(5, -5)$.

Rješenje. **1)** Uvrštavanjem koordinata točaka A i B u jednadžbu $y = ax + b$, dobijemo sustav:

$$-3 = -3a + b,$$
$$-3 = -a + b.$$

Ako iz prve jednadžbe izrazimo $b = 3a - 3$ i to uvrstimo u drugu jednadžbu, dobit ćemo $-3 = -a + 3a - 3$. Odatle je $a = 0$, a $b = -3$. Jednadžba pravca glasi $y = -3$.
Uočimo li odmah da točke A i B imaju istu y koordinatu i stoga određuju pravac paralelan s x-osi, i bez računanja zaključujemo da jednadžba tog pravca glasi $y = -3$;
2) Obje točke imaju istu x koordinatu koja iznosi -4 pa određuju pravac paralelan s y-osi zadan jednadžbom $x = -4$;
3) Uvrštavanjem koordinata točaka A i B u jednadžbu $y = ax + b$, dobijemo sustav:

$$1 = -a + b,$$
$$-5 = 5a + b.$$

Ako iz prve jednadžbe izrazimo $b = a + 1$ i to uvrstimo u drugu jednadžbu, dobit ćemo $-5 = 5a + a + 1$. Odatle je $a = -1$, a $b = 0$. Jednadžba pravca glasi $y = -x$.

Zadatak 4. Dokaži da točka $B(-2, 0)$ pripada pravcu AC, $A(-3, 2)$, $C(1, -6)$ te da je $|BC| = 3 \cdot |AB|$.

Rješenje. Jednadžba pravca AC glasi:

$$y - 2 = \frac{-6-2}{1+3} \cdot (x+3) \implies y - 2 = -2x - 6 \implies y = -2x - 4;$$

$$B(-2, 0) \in AC \iff 0 = -2 \cdot (-2) - 4 \iff 0 = 0$$

$\implies$ točka B pripada pravcu AC

$$|AB| = \sqrt{(-2+3)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|BC| = \sqrt{(1+2)^2 + (-6-0)^2} = \sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$$

$\implies |BC| = 3 \cdot |AB|$

Zadatak 5. Dokaži da točke $P(2, 1)$ i $Q(5, 0)$ pripadaju pravcu AB, $A(-1, 2)$, $B(8, -1)$, te da dužinu $\overline{AB}$ dijele na tri jednaka dijela.

Rješenje. Jednadžba pravca AB glasi:

$$y - 2 = \frac{-1-2}{8+1}(x+1) \implies y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}.$$

U dobivenu jednadžbu pravca uvrstimo koordinate točke P:

$$1 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + \frac{5}{3} \implies 1 = 1.$$

Dakle, točka P pripada tom pravcu. Na isti način provjerimo da i toča Q pripada tom pravcu:

$$0 = -\frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{5}{3} \implies 0 = 0.$$

Pogledajmo sada duljine dužina $\overline{AP}$, $\overline{PQ}$ i $\overline{QB}$:

$$|AP| = \sqrt{(2+1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10};$$

$$|PQ| = \sqrt{(5-2)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10};$$

$$|QB| = \sqrt{(8-5)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}.$$

$$\implies |AP| = |PQ| = |QB| = \sqrt{10}.$$

Dakle, točke P i Q dijele dužinu $\overline{AB}$ na tri jednaka dijela.

Zadatak 6. Točke $A(-3, -2)$, $B(-1, y)$ i $C(1, 6)$ pripadaju jednom pravcu.

1) Odredi nepoznatu koordinatu točke B.

2) Odredi jednadžbu pravca koji je simetričan pravcu AC prema osi apscisa.

3) Kolika je površina trokuta što ga taj pravac zatvara s koordinatnim osima?

Rješenje. Jednadžba pravca AC glasi:

$$y + 2 = \frac{6+2}{1+3}(x+3), \quad y + 2 = 2(x+3) \implies y = 2x + 4.$$

1) Uvrstimo koordinate točke B u dobivenu jednadžbu pravca i slijedi da je:

$$y = 2 \cdot (-1) + 4 = 2 \implies B(-1, 2);$$

2) Pravac simetričan pravcu AC prema osi apscisa prolazi točkama $A'(-3, 2)$ i $C'(1, -6)$ pa je njegova jednadžba:

$$y - 2 = \frac{-6-2}{1+3}(x-3), \quad y - 2 = -2(x-3) \implies y = -2x - 4;$$

3) Pravac siječe koordinatne osi u točkama $(0, 4)$ i $(-2, 0)$ te je:

$$P = \frac{|-2| \cdot |4|}{2} = 4 \text{ kv. jed.}$$

Zadatak 7. Točke $A(-4, 0)$, $B(0, -2)$ i $C(x, -5)$ pripadaju jednom pravcu.

1) Odredi nepoznatu koordinatu točke C.

2) Odredi jednadžbu pravca koji je simetričan pravcu AC prema osi ordinata.

3) Kolika je površina trokuta što ga taj pravac zatvara s koordinatnim osima?

Rješenje. Jednadžba pravca AB glasi:

$$y - 0 = \frac{-2-0}{0+4}(x+4), \quad \implies y = -\frac{1}{2}x - 2.$$

1) Uvrstimo koordinate točke C u dobivenu jednadžbu pravca i slijedi da je

$$-5 = -\frac{1}{2} \cdot x - 2, \quad \frac{1}{2}x = 3, \quad x = 6 \implies C(6, -5);$$

2) Pravac simetričan pravcu AB prema osi ordinata prolazi točkama $A'(4, 0)$ i $B'(0, -2)$ pa je njegova jednadžba: A(-4, 0) , B(0, -2)

$$y - 0 = \frac{-2-0}{0-4}(x-4), \quad y = \frac{1}{2}x - 2;$$

3) Pravac siječe koordinatne osi u točkama $(-4, 0)$ i $(0, -2)$, te je:

$$P = \frac{|-4| \cdot |-2|}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ kv. jed.}$$

Zadatak 8. Točke $A(-3, -2)$ i $B(-1, 4)$ leže na pravcu p.

1) Nacrtaj pravac p u koordinatnom sustavu.

2) U kojim točkama pravac p siječe koordinatne osi?

3) Odredi jednadžbu pravca koji je simetričan pravcu p prema osi apscisa.

Rješenje. **1)** Jednadžba pravca AB glasi:

$$y + 2 = \frac{4+2}{-1+3}(x+3), \quad y + 2 = 3(x+3) \implies y = 3x + 7.$$