

1 Kut i brojevna kružnica



1.1. Kut

Zadatak 1. Dva kuta, α i β , $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$ komplementarna su ako je $\alpha + \beta = 90^\circ$. Odredi komplement kuta α ako je:

- | | |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $\alpha = 38^\circ$; | 2) $\alpha = 47^\circ 15'$; |
| 3) $\alpha = 82^\circ 49' 33''$; | 4) $\alpha = 11^\circ 11' 11''$; |
| 5) $\alpha = 75^\circ 43' 45''$; | 6) $\alpha = 10^\circ 59' 01''$. |

Rješenje. 1) Iz $\alpha + \beta = 90^\circ$ slijedi da je $\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 38^\circ = 52^\circ$;
 2) $1^\circ = 60'$, pa 90° možemo zapisati kao 89° i $60'$. Slijedi: $\beta = 90^\circ - \alpha = 89^\circ 60' - 47^\circ 15' = 42^\circ 45'$;
 3) $1^\circ = 60'$, a $1' = 60''$ pa 90° možemo zapisati kao $89^\circ 59' 60''$. Sada je $\beta = 90^\circ - \alpha = 89^\circ 59' 60'' - 82^\circ 49' 33'' = 7^\circ 10' 27''$;
 4) $\beta = 90^\circ - \alpha = 89^\circ 59' 60'' - 11^\circ 11' 11'' = 78^\circ 48' 49''$;
 5) $\beta = 90^\circ - \alpha = 89^\circ 59' 60'' - 75^\circ 43' 45'' = 14^\circ 16' 15''$;
 6) $\beta = 90^\circ - \alpha = 89^\circ 59' 60'' - 10^\circ 59' 01'' = 79^\circ 00' 59''$.

Zadatak 2. Dva kuta, α i β , $0^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$ suplementarna su ako je $\alpha + \beta = 180^\circ$. Odredi suplement kuta α ako je:

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| 1) $\alpha = 33^\circ$; | 2) $\alpha = 48^\circ 25'$; |
| 3) $\alpha = 121^\circ 44' 33''$; | 4) $\alpha = 111^\circ 11' 11''$; |
| 5) $\alpha = 79^\circ 59' 59''$; | 6) $\alpha = 100^\circ 01' 01''$. |

Rješenje. 1) $\alpha + \beta = 180^\circ$, $\alpha = 33^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - 33^\circ = 147^\circ$;
 2) $\alpha + \beta = 180^\circ$, $\alpha = 48^\circ 25' \Rightarrow \beta = 180^\circ - 48^\circ 25' = 179^\circ 60' - 48^\circ 25' = 131^\circ 35'$;
 3) $\alpha + \beta = 180^\circ$, $\alpha = 121^\circ 44' 33'' \Rightarrow \beta = 180^\circ - 121^\circ 44' 33'' = 179^\circ 59' 60'' - 121^\circ 44' 33'' = 58^\circ 15' 27''$;
 4) $\alpha + \beta = 180^\circ$, $\alpha = 111^\circ 11' 11'' \Rightarrow \beta = 180^\circ - 111^\circ 11' 11'' = 179^\circ 59' 60'' - 111^\circ 11' 11'' = 68^\circ 48' 49''$;
 5) $\alpha + \beta = 180^\circ$, $\alpha = 79^\circ 59' 59'' \Rightarrow \beta = 180^\circ - 79^\circ 59' 59'' = 179^\circ 59' 60'' - 79^\circ 59' 59'' = 100^\circ 0' 1''$;
 6) $\alpha + \beta = 180^\circ$, $\alpha = 100^\circ 01' 01'' \Rightarrow \beta = 180^\circ - 100^\circ 01' 01'' = 179^\circ 59' 60'' - 100^\circ 01' 01'' = 79^\circ 58' 59''$.

Zadatak 3. Koliki su vanjski kutovi trokuta ako su dva unutarnja kuta $112^\circ 44' 38''$ i $28^\circ 52' 13''$?

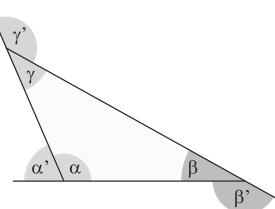
Rješenje.

$$\begin{aligned} \alpha &= 112^\circ 44' 38'' \\ \beta &= 28^\circ 52' 13'' \end{aligned}$$

$$\alpha', \beta', \gamma' = ?$$

$$\alpha' + \beta' = 180^\circ$$

$$\alpha' = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 112^\circ 44' 38'' = 179^\circ 59' 60'' - 112^\circ 44' 38'' = 67^\circ 15' 22'';$$



$$\begin{aligned}\beta + \beta; &= 180^\circ \\ \beta' &= 180^\circ - \beta = 180^\circ - 28^\circ 52' 13'' = 179^\circ 59' 60'' - 28^\circ 52' 13'' = 151^\circ 7' 47''; \\ \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ \\ \gamma' + \gamma &= 180^\circ\end{aligned}\right\} \Rightarrow \gamma' = \alpha + \beta$$

$$\gamma' = 112^\circ 44' 38'' + 28^\circ 52' 13'' = 140^\circ 90' 41'' = 141^\circ 30' 41''$$

Zadatak 4.Odredi kut β za koji je $\alpha + \beta = 360^\circ$ ako je:

- 1) $\alpha = 220^\circ 35'$; 2) $\alpha = 115^\circ 47'$; 3) $\alpha = 299^\circ 40' 55''$;
 4) $\alpha = 11^\circ 22' 33''$; 5) $\alpha = 89^\circ 59' 59''$.

Rješenje.

- 1) $\alpha = 220^\circ 35'$, $\alpha + \beta = 360^\circ \Rightarrow \beta = 360^\circ - 220^\circ 35' = 359^\circ 60' - 220^\circ 35' = 139^\circ 25'$;
 2) $\alpha = 115^\circ 47'$, $\alpha + \beta = 360^\circ \Rightarrow \beta = 360^\circ - 115^\circ 47' = 359^\circ 60' - 115^\circ 47' = 244^\circ 13'$;
 3) $\alpha = 299^\circ 40' 55''$, $\alpha + \beta = 360^\circ \Rightarrow \beta = 360^\circ - 299^\circ 40' 55'' = 359^\circ 59' 60'' - 299^\circ 40' 55'' = 60^\circ 19' 5''$;
 4) $\alpha = 11^\circ 22' 33''$, $\alpha + \beta = 360^\circ \Rightarrow \beta = 360^\circ - 11^\circ 22' 33'' = 359^\circ 59' 60'' - 11^\circ 22' 33'' = 348^\circ 37' 27''$;
 5) $\alpha = 89^\circ 59' 59''$, $\alpha + \beta = 360^\circ \Rightarrow \beta = 360^\circ - 89^\circ 59' 59'' = 359^\circ 59' 60'' - 89^\circ 59' 59'' = 270^\circ 1''$.

Zadatak 5.Mjere unutarnjih kutova trokuta u omjeru su $4 : 5 : 6$. Koliki su ti kutovi? Odredi mjere vanjskih kutova tog trokuta.*Rješenje.*

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha : \beta : \gamma = 4 : 5 : 6 \Rightarrow \alpha = 4x, \beta = 5x, \gamma = 6x$$

$$\underline{4x + 5x + 6x = 180^\circ}$$

$$15x = 180^\circ / : 15$$

$$x = 12^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = 48^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 72^\circ$$

$$\alpha' = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 48^\circ = 132^\circ$$

$$\beta' = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\gamma' = 180^\circ - \gamma = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$$

$$\alpha' : \beta' : \gamma' = 132 : 120 : 108 / : 12$$

$$\alpha' : \beta' : \gamma' = 11 : 10 : 9.$$

Zadatak 6.Omjer veličina unutarnjih kutova je $3 : 4 : 5$. Koliki su ti kutovi?*Rješenje.*

$$\alpha = 3k$$

$$\beta = 4k$$

$$\underline{\gamma = 5k}$$

$$\alpha, \beta, \gamma = ?$$

$$\begin{aligned}
 \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ \\
 3k + 4k + 5k &= 180^\circ \\
 12k &= 180^\circ \\
 k &= 15^\circ \\
 \Rightarrow \alpha &= 45^\circ, \quad \beta = 60^\circ, \quad \gamma = 75^\circ.
 \end{aligned}$$

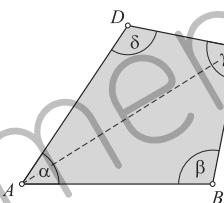
Zadatak 7. Omjer veličina vanjskih kutova trokuta je $4 : 5 : 6$. Koliki su unutarnji kutovi tog trokuta?

Rješenje.

$$\begin{aligned}
 \alpha' &= 4k \\
 \beta' &= 5k \\
 \gamma' &= 6k \\
 \hline
 \alpha', \beta', \gamma' &=? \\
 \alpha, \beta, \gamma &=? \\
 \alpha' + \beta' + \gamma' &= 360^\circ \\
 4k + 5k + 6k &= 360^\circ \\
 15k &= 360^\circ \\
 k &= 24^\circ \\
 \Rightarrow \alpha' &= 96^\circ, \quad \alpha = 84^\circ; \\
 \beta' &= 120^\circ, \quad \beta = 60^\circ; \\
 \gamma' &= 144^\circ, \quad \gamma = 36^\circ.
 \end{aligned}$$

Zadatak 8. Mjere unutarnjih kutova konveksnog četverokuta u omjeru su $5 : 7 : 8 : 12$. Koliki su ti kutovi?

Rješenje.



$$\begin{aligned}
 \alpha + \beta + \gamma + \delta &= 360^\circ \\
 \alpha : \beta : \gamma : \delta = 5 : 7 : 8 : 12 &\Rightarrow \alpha = 5x, \beta = 7x, \gamma = 8x, \delta = 12x
 \end{aligned}$$

$$5x + 7x + 8x + 12x = 360^\circ$$

$$32x = 360^\circ / : 32$$

$$x = 11.25^\circ$$

$$\alpha = 5 \cdot 11.25^\circ = 56.25^\circ = 56^\circ + 0.25 \cdot 60' = 56^\circ 15'$$

$$\beta = 7 \cdot 11.25^\circ = 78.75^\circ = 78^\circ + 0.75 \cdot 60' = 78^\circ 45'$$

$$\gamma = 8 \cdot 11.25^\circ = 90^\circ$$

$$\delta = 12 \cdot 11.25^\circ = 135^\circ$$

Zadatak 9. Ako je mjera kuta α , izrazi tu mjeru u stupnjevima, minutama i sekundama:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------|
| 1) $\alpha = 13.715^\circ$; | 2) $\alpha = 73.87^\circ$; |
| 3) $\alpha = 44.3358^\circ$; | 4) $\alpha = -122.4445^\circ$; |
| 5) $\alpha = 133.2345^\circ$; | 6) $\alpha = -47.6534^\circ$. |

Rješenje.

- 1) $\alpha = 13.715^\circ = 13^\circ + 0.715 \cdot 60' = 13^\circ 42.9' = 13^\circ 42 + 0.9 \cdot 60'' = 13^\circ 42'54''$;
- 2) $\alpha = 73.87^\circ = 73^\circ + 0.87 \cdot 60' = 73^\circ 52.2' = 73^\circ 52' + 0.2 \cdot 60'' = 73^\circ 52'12''$;
- 3) $\alpha = 44.3358^\circ = 44^\circ + 0.3358 \cdot 60' = 44^\circ 20' + 0.148 \cdot 60'' = 44^\circ 20'9''$;
- 4) $\alpha = -122.4445^\circ = -122^\circ - 0.4445 \cdot 60' = -122^\circ 26' - 0.67 \cdot 60'' = -122^\circ 26'40''$;
- 5) $\alpha = 133.2345^\circ = 133^\circ + 0.2345 \cdot 60' = 133^\circ 14' + 0.07 \cdot 60'' = 133^\circ 14'4''$;
- 6) $\alpha = -47.6534^\circ = -47^\circ - 0.6534 \cdot 60' = -47^\circ 39' - 0.204 \cdot 60'' = -47^\circ 39'12''$.

Zadatak 10.

Zapiši u decimalnom obliku mjeru kuta:

- | | |
|-------------------------|--------------------------|
| 1) $45^\circ 15'33''$; | 2) $95^\circ 27'18''$; |
| 3) $75^\circ 24'48''$; | 4) $101^\circ 11'10''$. |

Rješenje.

- 1) $45^\circ 15'33'' = 45^\circ 15' + 33 : 60' = 45^\circ 15.55' = 45^\circ + 15.55 : 60^\circ = 45.2592^\circ$;
- 2) $95^\circ 27'18'' = 95^\circ 27' + 18 : 60' = 95^\circ 27.3' = 95^\circ + 27.3 : 60^\circ = 95.455^\circ$;
- 3) $75^\circ 24'48'' = 75^\circ 24' + 48 : 60' = 75^\circ 24.8' = 75^\circ + 24.8 : 60^\circ = 75.413^\circ$;
- 4) $101^\circ 11'10'' = 101^\circ 11' + 10 : 60' = 101^\circ 11.1666667' = 101^\circ + 11.16 : 60^\circ = 101.1861^\circ$.

Zadatak 11.

Koliki kut opiše velika kazaljka sata u vremenu od 7 h 10 min do 13 h 45 min?

Rješenje.

Od 7 h 10 min do 13 h 10 min je šest sati i u tom vremenu kazaljka opiše šest punih krugova, odnosno kut od $6 \cdot 360^\circ = 2160^\circ$.

Za 5 minuta kazaljka opiše kut od 30° , a za 35 minuta onda opiše kut od $7 \cdot 30^\circ = 210^\circ$. Ukupno je to 2370° .

Zadatak 12.

Odredi mjeru i glavnu mjeru kuta što ga opiše velika kazaljka sata u vremenu od 8 h 52' do 15 h 13'.

Rješenje.

Od 8 h 52 min do 14 h 73 min je šest sati i u tom vremenu kazaljka opiše šest punih krugova, odnosno kut od $6 \cdot 360^\circ = 2160^\circ$.

Za 1 minutu kazaljka opiše kut od 6° , a za $73 - 52 = 21$ minuta onda opiše kut od $6 \cdot 21^\circ = 126^\circ$. Ukupno je to 2286° .

Zadatak 13.

Odredi mjeru i glavnu mjeru kuta što ga opiše velika kazaljka sata u vremenu od 19 h 31' do 6 h 56' sljedećeg dana.

Rješenje.

Od 19 h 31 min do 6 h 56 min je jedanaest sati i u tom vremenu kazaljka opiše jedanaest punih krugova, odnosno kut od $11 \cdot 360^\circ = 3960^\circ$.