

7 Vektori

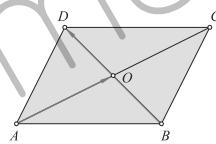


7.1. Osnovni pojmovi o vektorima

Zadatak 1. Koje su od sljedećih veličina vektorske, a koje skalarne: temperatura, obujam, brzina, masa, ubrzanje, sila, električni napon?

Rješenje. Vektorske veličine su brzina, ubrzanje i sila, a skalarne temperatura, obujam, masa i električni napon.

Zadatak 2. Dan je paralelogram $ABCD$. Točka O sjecište je njegovih dijagonala. Promatramo skup vektora kojima su početna i završna točka vrh paralelograma ili točka O .



1) Ispiši sve vektore koji imaju jednak smjer kao i vektor \vec{AO} . Ispiši sve vektore koji imaju jednaku orijentaciju kao i vektor \vec{AO} .

2) Ispiši sve vektore koji imaju jednak smjer kao i vektor \vec{BD} . Ispiši sve vektore koji imaju jednaku orijentaciju kao i vektor \vec{BD} .

Rješenje. 1) Vektori koji imaju jednak smjer kao i vektor \vec{AO} su \vec{OA} , \vec{AC} , \vec{CA} , \vec{OC} i \vec{CO} .

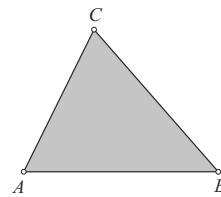
Vektori koji imaju jednaku orijentaciju kao i vektor \vec{AO} su \vec{AC} i \vec{OC} .

2) Vektori koji imaju jednak smjer kao i vektor \vec{BD} su \vec{DB} , \vec{BO} , \vec{OB} , \vec{DO} i \vec{OD} .

Vektori koji imaju jednaku orijentaciju kao i vektor \vec{BD} su \vec{BO} i \vec{OD} .

Zadatak 3. Koliko postoji vektora kojima su početna i završna točka neka dva vrha trokuta ABC ?

Rješenje. Iz svakog vrha se mogu povući 2 vektora, a obzirom da $\vec{AB} \neq \vec{BA}$ postoji $2 \cdot 3 = 6$.



Koliko postoji vektora kojima su početna i završna točka vrhovi četverokuta $ABCD$ ako je taj četverokut paralelogram, a koliko ako nije paralelogram?

Iz svakog vrha se mogu povući 3 vektora (u bilo kojem četverokutu), a obzirom da $\vec{AB} \neq \vec{BA}$ postoji $3 \cdot 4 = 12$ vektora.

Zadatak 5. Ako je $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, onda je $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$. Dokaži!

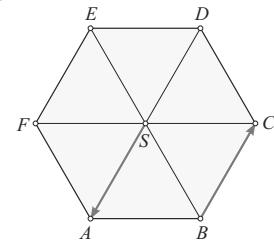
Rješenje. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \implies AB \parallel CD$ i $|AB| = |CD|$ te su A, B, C i D vrhovi paralelograma iz čega sljedi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Zadatak 6. Nacrtaj pravilan šesterokut $ABCDEF$. Neka je S sjecište dijagonala tog šesterokuta. Ispiši sve vektore kojima su početna i završna točka neki vrh šesterokuta ili točka S , a koji su

- 1) jednaki vektoru \overrightarrow{BC} ; 2) suprotni vektoru \overrightarrow{SA} .

Rješenje. 1) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AS}, \overrightarrow{SD}, \overrightarrow{FE}$;

2) \overrightarrow{SA} suprotni $\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{SD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{FE}$.



7.2. Zbrajanje vektora

Zadatak 1. Dan je paralelogram $ABCD$. Neka je točka S sjecište njegovih dijagonala. Izračunaj:

- 1) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS}$; 3) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$;
 4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SD}$; 5) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS}$; 6) $\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS}$.

Rješenje. 1) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$;

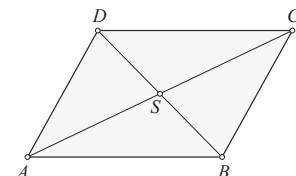
2) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{AD}$;

3) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$;

4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AS}$;

5) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} = \overrightarrow{AS}$;

6) $\overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{BA}$.

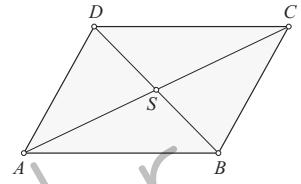


Zadatak 2. Točka S sjecište je dijagonala paralelograma $ABCD$. Izračunaj:

- 1) $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{BD}$;
 3) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} + \overrightarrow{SD}$.

Rješenje.

- 1) $\vec{AS} + \vec{BS} + \vec{CS} = (\vec{AS} + \vec{SD}) + \vec{CS}$
 $= \vec{AD} + \vec{CS} = \vec{BC} + \vec{CS} = \vec{BS};$
- 2) $\vec{AB} + \vec{CS} + \vec{BD} = (\vec{AB} + \vec{SA}) + \vec{BD}$
 $= (\vec{SA} + \vec{AB}) + \vec{BD} = \vec{SB} + \vec{BD} = \vec{BD} + \vec{DS} = \vec{BS};$
- 3) $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = (\vec{AB} + \vec{AD}) + \vec{AC} = (\text{po pravilu paralelograma}) =$
 $\vec{AC} + \vec{AC} = 2\vec{AC}$
- 4) $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = (\vec{SA} + \vec{SC}) + (\vec{SB} + \vec{SD}) = (\vec{SA} - \vec{SA}) +$
 $(\vec{SB} - \vec{SB}) = \vec{0}.$



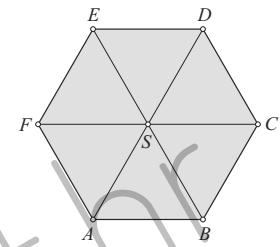
Zadatak 3.

Neka je $ABCDEF$ pravilni šesterokut i neka je S sjecište njegovih dijagonala. Izračunaj:

- 1) $\vec{AB} + \vec{EF};$
- 2) $\vec{AB} + \vec{SD};$
- 3) $\vec{BC} + \vec{ES};$
- 4) $\vec{CS} + \vec{EF};$
- 5) $\vec{DE} + \vec{SC};$
- 6) $\vec{CF} + \vec{AS}.$

Rješenje.

- 1) $\vec{AB} + \vec{EF} = \vec{AB} + \vec{SA} = \vec{SA} + \vec{AB} = \vec{SB};$
- 2) $\vec{AB} + \vec{SD} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC};$
- 3) $\vec{BC} + \vec{ES} = \vec{ES} + \vec{BC} = \vec{ES} + \vec{SD} = \vec{ED};$
- 4) $\vec{CS} + \vec{EF} = \vec{CS} + \vec{SA} = \vec{CA};$
- 5) $\vec{DE} + \vec{SC} = \vec{DE} + \vec{ED} = \vec{DE} - \vec{DE} = \vec{0};$
- 6) $\vec{CF} + \vec{AS} = \vec{CF} + \vec{FE} = \vec{CE}.$



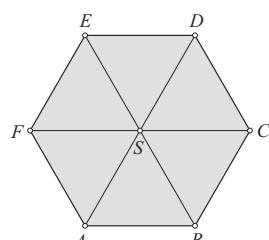
Zadatak 4.

Točka S sjecište je dijagonala pravilnog šesterokuta $ABCDEF$. Izračunaj:

- 1) $\vec{AB} + \vec{SD} + \vec{SF};$
- 2) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF};$
- 3) $\vec{AB} + \vec{AS} + \vec{AF};$
- 4) $\vec{SB} + \vec{SD} + \vec{SF}.$

Rješenje.

- 1) $\vec{AB} + \vec{SD} + \vec{SF} = (\vec{AB} + \vec{AS}) + \vec{SF}$
 $= (\text{po pravilu paralelograma}) = \vec{AC} + \vec{SF}$
 $= \vec{AC} + \vec{CS} = \vec{AS};$
- 2) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{EF} = \vec{AB} + \vec{BS} + \vec{EF}$
 $= \vec{AS} + (-\vec{AS}) = \vec{0};$
- 3) $\vec{AB} + \vec{AS} + \vec{AF} = (\vec{AB} + \vec{AF}) + \vec{AS} = \vec{AS} + \vec{AS} = 2\vec{AS} = \vec{AD};$
- 4) $\vec{SB} + \vec{SD} + \vec{SF} = (\vec{SB} + \vec{SF}) + \vec{SD} = \vec{SA} + \vec{SD} = \vec{SA} + (-\vec{SA}) = \vec{0}.$

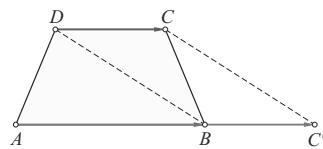


Zadatak 5. Dan je trapez $ABCD$. Konstruiraj vektore:

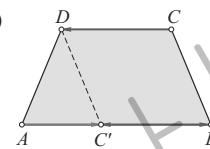
- 1) $\vec{AB} + \vec{DC}$; 2) $\vec{AB} + \vec{CD}$; 3) $\vec{AD} + \vec{CB}$; 4) $\vec{AD} + \vec{BC}$.

Rješenje.

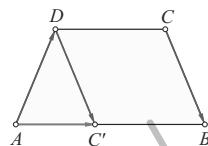
1)



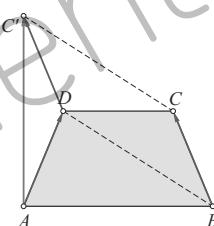
2)



3)



4)



Zadatak 6.

Odredi zbroj vektora:

- 1) $\vec{AC} + \vec{DB} + \vec{CD} + \vec{BA}$; 2) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} + \vec{DE}$.
 3) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}$; 4) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{DA}$;
 5) $\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{BC} + \vec{DB}$.

Rješenje.

1) $\vec{AC} + \vec{DB} + \vec{CD} + \vec{BA} = (\vec{AC} + \vec{CD}) + \vec{DB} + \vec{BA} = \vec{AD} + \vec{DB} + \vec{BA} = \vec{AB} + \vec{BA} = \vec{0}$;

2) $\vec{AB} + \vec{CD} + \vec{BC} + \vec{DE} = (\vec{AB} + \vec{BC}) + (\vec{CD} + \vec{DE}) = \vec{AC} + \vec{CE} = \vec{AE}$.

3) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{AC} + \vec{CA} = \vec{0}$

4) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{DA} = \vec{AC} + \vec{DA} = \vec{DA} + \vec{AC} = \vec{DC}$

5) $\vec{AB} + \vec{BD} + \vec{BC} + \vec{DB} = \vec{AB} + \vec{BD} + \vec{DB} + \vec{BC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

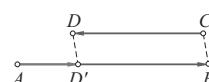
Zadatak 7.

Može li zbroj vektora biti vektor manje duljine nego što je duljina svakog pojedinog pribrojnika? Može li razlika vektora biti manje duljine od njihova zbroja?

Rješenje.

Zbroj vektora može biti vektor manje duljine nego što je duljina svakog pojedinog pribrojnika:

$$\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{AD}'$$



Razlika vektora može biti manje duljine od njihova zbroja: