4 Derivacija

4.1. Problem tangente i brzine

Zadatak 1. Neka je $f(x) = \ln x$.

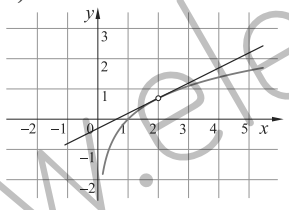
1) Nacrtaj precizno graf te funkcije i njezinu tangentu u točki $A(2, \ln 2)$.

2) Procijeni sa slike nagib te tangente.

3) S pomoću kalkulatora odredi nagib sekante AB ako je B točka na grafu te funkcije s apscisom 1.5; 1.9; 1.99; 1.999 a zatim 2.5; 2.1; 2.01; 2.001;

4) Na temelju tih rezultata procijeni nagib tangente u točki A.

Rješenje. **1)**



2) 30°

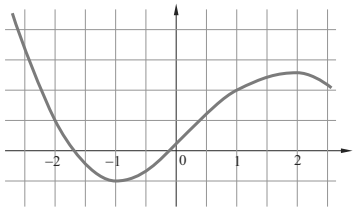
3)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\ln 1.5 - \ln 2}{1.5 - 2} = 0.575 \implies \alpha = 29.91^\circ$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\ln 1.9 - \ln 2}{1.9 - 2} = 0.512 \implies \alpha = 27.15^\circ$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\ln 1.99 - \ln 2}{1.99 - 2} = 0.501 \implies \alpha = 26.62^\circ$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\ln 1.999 - \ln 2}{1.999 - 2} = 0.5 \implies \alpha = 26.57^\circ$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\ln 2.5 - \ln 2}{2.5 - 2} = 0.446 \implies \alpha = 24.05^\circ$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\ln 2.1 - \ln 2}{2.1 - 2} = 0.488 \implies \alpha = 26^\circ$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\ln 2.01 - \ln 2}{2.01 - 2} = 0.499 \implies \alpha = 26.62^\circ$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\ln 2.001 - \ln 2}{2.999 - 2} = 0.5 \implies \alpha = 26.57^\circ$$

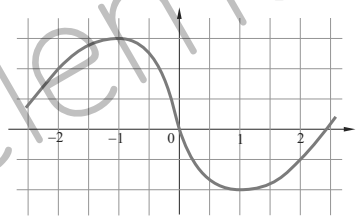
4) $\alpha = 26.68^\circ$

Zadatak 2. Derivacija funkcije u nekoj točki jednaka je nagibu tangente na graf funkcije u toj točki. S grafa funkcije f na slici očitaj približne vrijednosti derivacije: $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$.



Rješenje. (Vrijednosti su približne) $f'(-2) = -2$, $f'(-1) = 0$, $f'(0) = 1$, $f'(1) = \frac{1}{2}$, $f'(2) = 0$.

Zadatak 3. S grafa funkcije f na slici očitaj približne vrijednosti derivacije: $f'(-2)$, $f'(-1)$, $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$.



Rješenje. (Vrijednosti su približne) $f'(-2) = 1$, $f'(-1) = 0$, $f'(0) = -3$, $f'(1) = 0$, $f'(2) = 1$.

Zadatak 4. Izračunaj kvocijent $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ za funkciju f u zadanoj točki x_0:

1) $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathcal{D}_f$;

2) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojoj točki $x_0 \in \mathcal{D}_f$;

3) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojojtočki $x_0 \in \mathcal{D}_f$;

4) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojojtočki $x_0 \in \mathcal{D}_f$;

5) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojojtočki $x_0 \in \mathcal{D}_f$.

Rješenje. **1)** $f(x) = x^2 - 3x + 1$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, $x_0 \in \mathcal{D}_f$;

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 1 - x_0^2 + 3x_0 - 1\\ &= x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - 3x_0 - 3\Delta x + 3x_0 - x_0^2 = \Delta x^2 + (2x_0 - 3)\Delta x\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x + 2x_0 - 3, \quad \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x_0=1} = \Delta x - 1, \quad \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x_0=2} = \Delta x + 1;$$

2) $f(x) = ax^2 + bx + c$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, $x_0 \in \mathcal{D}_f$;

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_0 + \Delta x) + C - ax_0^2 - bx_0 - C\\ &= a(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) + bx_0 + b\Delta x - ax_0^2 - bx_0\\ &= ax_0^2 + 2ax_0\Delta x + a\Delta x^2 + b\Delta x - ax_0^2 = a\Delta x^2 + (2ax_0 + b)\Delta x\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = a\Delta x + 2ax_0 + b, \quad \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x_0=1} = a\Delta x + 2a + b, \quad \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x_0=2} = a\Delta x + 4a + b;$$

3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, $x_0 \in \mathcal{D}_f$;

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

$$\Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x_0^2 + x_0 \Delta x},$$

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x_0=1} = -\frac{1}{1 + \Delta x}, \qquad \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x_0=2} = -\frac{1}{4 + 2\Delta x};$$

4) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, $x_0 \in \mathcal{D}_f$;

$$\begin{aligned}
\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0} \\
&= \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \\
&= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} \\
&\Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}},
\end{aligned}$$

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=1} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Delta x} + 1}, \qquad \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=2} = \frac{1}{\sqrt{2 + \Delta x} + 4};$$

5) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, $x_0 \in \mathcal{D}_f$;

$$\begin{aligned}
\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= \frac{x_0 + \Delta x - 1}{x_0 + \Delta x + 1} - \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \\
&= \frac{x_0^2 + x_0 \Delta x - x_0 + x_0 + \Delta x - 1 - (x_0^2 + x_0 \Delta x + x_0 - x_0 - \Delta x - 1)}{(x_0 + 1)(x_0 + \Delta x + 1)} \\
&= \frac{x_0^2 + x_0 \Delta x + \Delta x - 1 - x_0^2 - x_0 \Delta x + \Delta x + 1}{(x_0 + 1)(x_0 + \Delta x + 1)} = \frac{2\Delta x}{(x_0 + 1)(x_0 + \Delta x + 1)} \\
&\Longrightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{(x_0 + 1)(x_0 + \Delta x + 1)},
\end{aligned}$$

$$\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x_0=1} = \frac{1}{2 + \Delta x}, \qquad \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x_0=2} = \frac{1}{2(3 + \Delta x)}.$$

Zadatak 5. Izračunaj $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ za funkciju f u zadanoj točki x_0.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojojtočki $x_0 \in \mathcal{D}_f$;

2) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojojtočki $x_0 \in \mathcal{D}_f$;

3) $f(x) = x^3$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, u bilo kojojtočki $x_0 \in \mathcal{D}_f$.

Rješenje. **1)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$;

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x_0(x_0 + \Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x_0(x_0 + \Delta x)}, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x_0^2}, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\Big|_{x_0=1} = -1,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\Big|_{x_0=2} = -\frac{1}{4};$$

2) $f(x) = \sqrt{x}$;

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$$

$$= \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\Big|_{x_0=1} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\Big|_{x_0=2} = \frac{1}{2\sqrt{2}};$$

3) $f(x) = x^3$;

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3 - x_0^3$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2$$

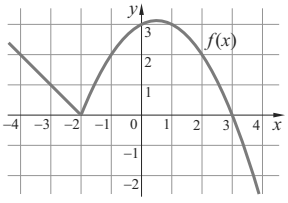
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\Big|_{x_0=1} = 3, \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\Big|_{x=2} = 12.$$

Zadatak 6. Pokaži da je nagib tangente u točki (x_0, y_0) na grafu funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ jednak $2ax_0 + b$.

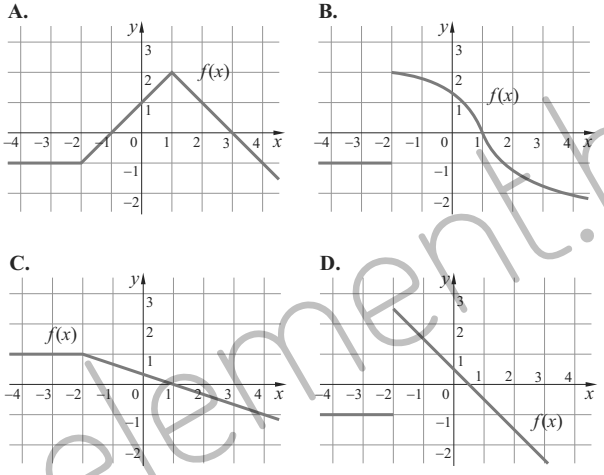
Rješenje. $f(x) = ax^2 + bx + c$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \frac{1}{\Delta x}[a(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) + b(x_0 + \Delta x) + c$$
$$- ax_0^2 - bx_0 - c]$$
$$= \frac{1}{\Delta x}[ax_0^2 + 2ax_0\Delta x + a\Delta x^2 + bx_0 + b\Delta x - ax_0^2 - bx_0]$$
$$= \frac{1}{\Delta x}[a\Delta x^2 + (2ax_0 + b)\Delta x] = a\Delta x + 2ax_0 + b$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax_b + b.$$

Zadatak 7. Na slici je nacrtan graf funkcije f :

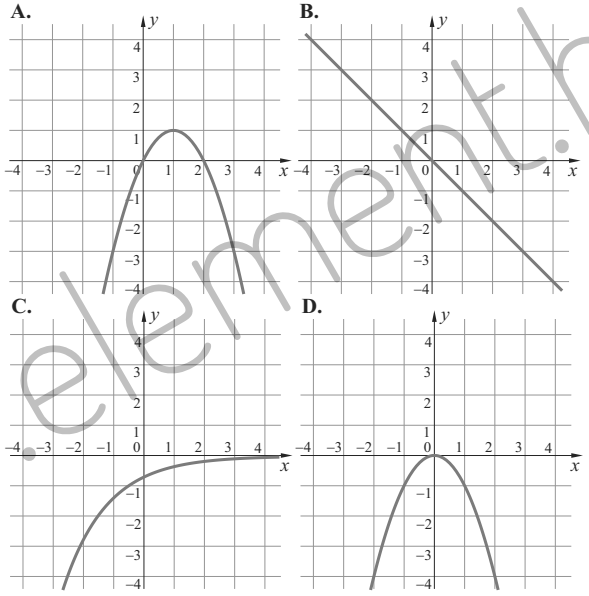


Na kojoj je od sljedećih slika nacrtan graf njezine derivacije $f'(x)$?

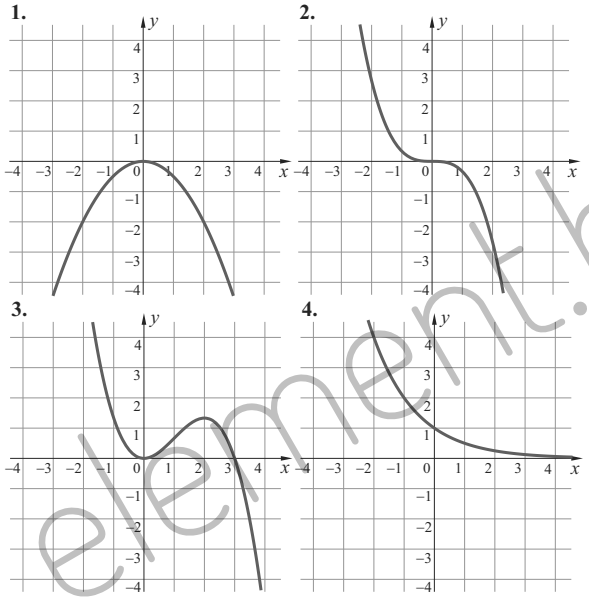


Rješenje. Na slici D. Derivacija funkcije jednaka je -1 ako je $x < -2$. Taj uvjet zadovoljavaju funkcije sa slika B i D. Derivacija ima nultočku unutar intervala $\langle 0, 1 \rangle$. Usporedbom između B i D zaključujemio da je D točan odgovor.

Zadatak 8. Na slici su nacrtane derivacije nekih funkcija:

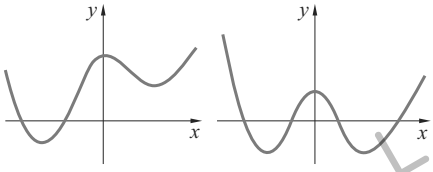


a na slici dolje su grafovi odgovarajućih funkcija u nekom drugom poretku. Poveži funkcije i njihove derivacije!

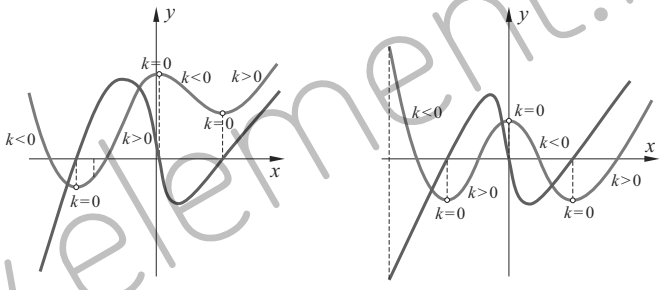


Rješenje. A $\leftrightarrow$ 3, B $\leftrightarrow$ 1, C $\leftrightarrow$ 4, D $\leftrightarrow$ 2.

Zadatak 9. Precrtaj grafove ovih funkcija i skiciraj grafove njihovih derivacija.



Rješenje.



Zadatak 10. Neko se tijelo giba po zakonu $s(t) = 4t - t^2$. Koliki put ovo tijelo prijeđe u vremenu od $t = 1$ s do $t = 1.5$ s? Odredi srednju brzinu gibanja u tom intervalu.

Rješenje. $s(1) = 4 \cdot 1 - 1^2 = 3$ m, $s(1.5) = 4 \cdot 1.5 - (1.5)^2 = 6 - 2.25 = 3.75$ m. Tijelo u vremenu od $t = 1$ s do $t = 1.5$ s prijeđe $s(1.5) - s(1) = 3.75 - 3 = 0.75$ m.

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{4t + 4\Delta t - t^2 - 2t\Delta t - (\Delta t)^2}{\Delta t} = 4 - 2t - \Delta t =$$
$4 - 2 \cdot 1 - 0.5 = 1.5$ m/ s.

Zadatak 11. Tijelo se giba jednoliko po pravcu prema zakonu **a)** $s = 20 + 3t$; **b)** $s = 10 + 2t + 0.2t^2$, gdje je t vrijeme izraženo u sekundama, a s put u metrima. Kolika je:

1) srednja brzina u vremenskom intervalu [2,5];

2) srednja brzina u vremenskom intervalu [2,3];

3) trenutna brzina u trenutku $t = 2$?

Rješenje. **a)**

1) $\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \dfrac{20 + 3t + 3\Delta t - 20 - 3t - 3\Delta t}{\Delta t} = 3$ m/ s.

2) $\overline{v} = 3$ m/ s.

3) $v = 3$ m/ s.

b)

1) $\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \dfrac{10 + 2t + 2\Delta t + 0.2(t+\Delta t)^2 - 10 - 2t - 0.2t^2}{\Delta t} = \dfrac{2\Delta t + 0.2(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - 0.2t^2}{\Delta t} = \dfrac{2\Delta + 0.4t\Delta t + 0.2(\Delta t)^2}{\Delta t} = 2 + 0.4t + 0.2\Delta t = 2 + 0.4 \cdot 2 + 0.2 \cdot 3 = 3.4$ m/ s.

2) $\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \dfrac{10 + 2t + 2\Delta t + 0.2(t+\Delta t)^2 - 10 - 2t - 0.2t^2}{\Delta t} = \dfrac{2\Delta t + 0.2(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - 0.2t^2}{\Delta t} = \dfrac{2\Delta + 0.4t\Delta t + 0.2(\Delta t)^2}{\Delta t} = 2 + 0.4t + 0.2\Delta t = 2 + 0.4 \cdot 2 + 0.2 \cdot 1 = 3$ m/ s.

3) $\Delta t \to 0$, $v = 2 + 0.4t = 2 + 0.4 \cdot 2 = 2.8$ m/ s.

Zadatak 12. Tijelo bačeno uvis brzinom $v_0 = 5$ m/s kreće se po zakonu $s(t) = v_0 t - \dfrac{1}{2}gt^2$. U kojem je trenutku njegova brzina jednaka 2 m/s? U kojem je trenutku ona jednaka nuli? Kolikom će brzinom tijelo pasti na tlo?

Rješenje.

$$\lim_{\Delta t \to 0} v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 t + v_0 \Delta t - \frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 - v_0 t + \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 \Delta t - \frac{1}{2}g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) + \frac{1}{2}gt^2}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_0 \Delta - gt\Delta t - \frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v_0 - gt - \frac{1}{2}g\Delta t = v_0 - gt\,.$$

$$v_0 - gt = 2 \implies 5 - gt = 2 \implies 3 = gt \implies t = \frac{3}{g} \text{ s.}$$

$$v_0 - gt = 0 \implies 5 - gt = 0 \implies 5 = gt \implies t = \frac{5}{g} \text{ s.}$$

Vrijeme leta tijela uvis jednako je vremenu pada pa je $v_{pada} = v_0 - g \cdot \dfrac{2 \cdot 5}{g} = 5 - 10 = -5$ m/ s. Tijelo padne brzinom kojom je i izbačeno ali suprotnog smjera.

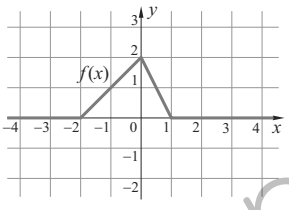
Zadatak 13. Dizalo se nakon pokretanja giba po zakonu $s(t) = 1.5t^2 + 2t + 12$. Nađi trenutačnu brzinu dizala.

Rješenje.

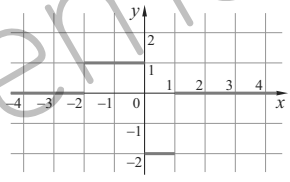
$$\lim_{\Delta t \to \infty} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1.5(t+\Delta t)^2 + 2t + 2\Delta t + 12 - 1.5t^2 - 2t - 12}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{1.5t^2 + 3t\Delta t + (\Delta t)^2 + 2t + 2\Delta t - 1.5t^2 - 2t}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to \infty} 3t\Delta t + (\Delta t)^2 + 2\Delta t\Delta t$$
$$= \lim_{\Delta t \to \infty} (3t + \Delta t + 2) = 3t + 2. \quad v_0 = 3t_0 + 2.$$

4.2. Derivacija funkcije. Pravila deriviranja

Zadatak 1. Na slici je nacrtan graf funkcije f. Ne određujući njezinu formulu, nacrtaj graf funkcije f'.



Rješenje.



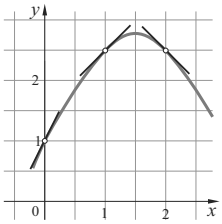
Zadatak 2. Nacrtaj graf funkcije f za koju je

1) $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$, $f'(1) = 1$, $f'(2) = -1$;

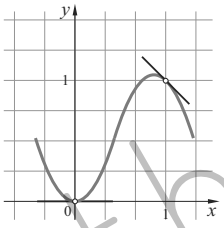
2) $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(1) = -1$.

Rješenje. Postoji po volji mnogo funkcija koje zadovoljavaju ove uvjete. Jedan odabir je nacrtan na slici.

1)



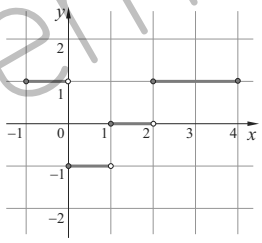
2)



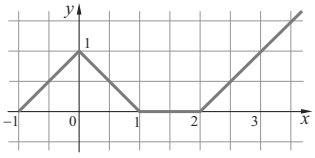
Zadatak 3. Na slici je nacrtan graf funkcije f'. Poznato je da vrijedi $f(0) = 1$ i da je f neprekinuta.

1) Nacrtaj njezin graf.

2) Koliko je $f(3)$?



Rješenje.



$f(3) = 1$.

Zadatak 4. U tablici su unesene dnevne temperature $T = f(t)$ mjerene za ljetnog dana u Splitu:

t	6	8	10	12	14	16	18	20
T	20	21	24	28	30	30	29	27

Koje je značenje podatka $f'(12)$? Odredi približnu vrijednost te derivacije.

Rješenje. Nagib sekante je $\dfrac{f(12) - f(10)}{12 - 10} = 2$ u intervalu $[10, 12]$, a $\dfrac{f(14) - f(12)}{14 - 12} = 1$, u intervalu $[12, 14]$. Vrijednost derivacije u točki 12 leži unutar tih raspona.

Ako se u koordinatni sustav unesu vrijednosti i nacrta graf, vrijednost drivacije se može točnije ocijeniti, $f'(12) \approx 1.5$. (Složeni izračuni na temelju zadanih podataka daju $f'(12) \approx 1.625$. Tu se koristi polinom koji aproksimira traženu funkciju.)

$f'(12)$ označava brzinu promjene temperature u 12 sati. Dobiveni podatak $f'(12) \approx 1.5$ znači da se temperatura u 12 sati mijenja tako da se svaki minut poveća za približno $1.5/60$ °C.