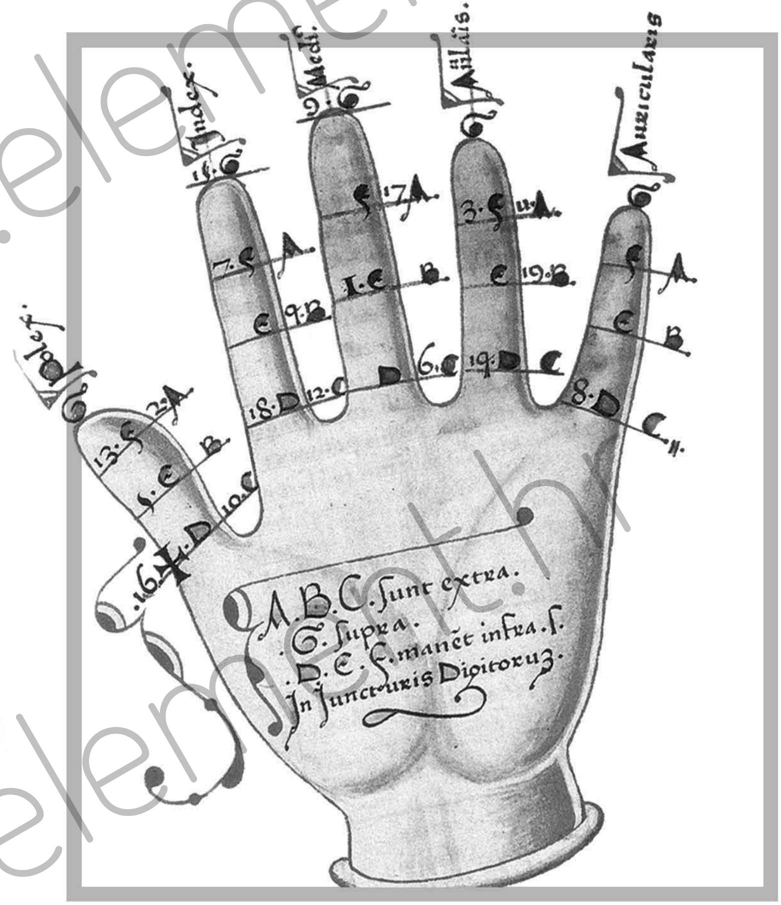
1 Brojevi



slika iz jednog priručnika o računanju na prste (15.st.)

1.1. Prirodni i cijeli brojevi

Zadatak 1.

1) Zapiši prirodni broj koji neposredno slijedi iza prirodnog broja n.

2) Zapiši prirodni broj koji neposredno prethodi prirodnom broju $n-2$. Kad zadatak ima rješenje?

3) Zapiši broj koji je za 2 veći od zbroja brojeva m i n.

4) Zapiši broj koji je dvostruko veći od razlike brojeva a i b.

5) Zapiši broj koji je tri puta manji od umnoška brojeva a i b.

Rješenje.

1) Sljedbenik broja n je broj $n+1$.

2) Prethodnik broja $n-2$ je $(n-2)-1=n-3$. Zadatak ima rješenje kad je $n>3$.

3) To je broj $m+n+2$.

4) To je broj $2(a-b)$.

5) To je broj $\dfrac{ab}{3}$.

Zadatak 2.

1) Zapiši parni broj koji slijedi iza broja $2n$.

2) Zapiši neparni broj koji prethodi broju $2n-1$. Kada zadatak ima rješenje?

3) Zapiši broj koji neposredno slijedi iza broja $2n+5$. Je li taj broj paran ili neparan?

4) Zapiši broj koji neposredno prethodi broju $n+3$. Je li taj broj paran ili neparan?

Rješenje.

1) $2n+2$;

2) $2n-3$. Zadatak ima rješenje za $n>1$.

3) $2n+6$, paran je.

4) $n+2$, broj je iste parnosti kao i n.

Zadatak 3. Odredi najveći zajednički djelitelj brojeva:

1) 36 i 45; **2)** 105 i 42; **3)** 39 i 52;
4) 18 i 126; **5)** 125, 400 i 375; **6)** 44, 242 i 132.

Rješenje.

1)
$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 5 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad M(36,45)=3\cdot 3=9;$$

2)
$$\begin{array}{r|r} 105 & 5 \\ 21 & 21 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 42 & 2 \\ 21 & 21 \\ 1 & \end{array} \qquad M(105,42)=21;$$

3)
$$\begin{array}{r|r} 39 & 3 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 52 & 2 \\ 26 & 2 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad M(39,52)=13;$$

4) $\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$ $\quad M(18, 126) = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18\,;$

5) $\begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 400 & 2 \\ 200 & 2 \\ 100 & 2 \\ 50 & 2 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & 0 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 375 & 5 \\ 75 & 5 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & 0 \end{array}$ $\quad M(125, 400, 375) = 5 \cdot 5 = 25\,;$

6) $\begin{array}{r|r} 44 & 2 \\ 22 & 2 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|r} 242 & 2 \\ 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & 0 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|r} 132 & 2 \\ 66 & 2 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & 0 \end{array}$ $\quad M(44, 242, 132) = 2 \cdot 11 = 22\,.$

Zadatak 4. Odredi najmanji zajednički višekratnik brojeva:

1) 36 i 24; **2)** 22 i 4; **3)** 42 i 120;
4) 84 i 105; **5)** 16, 24 i 40; **6)** 18, 30 i 45.

Rješenje.

1) $\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$ $\quad V(36, 24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72\,;$

2) $\begin{array}{r|l} 22 & 2 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$ $\quad V(22, 4) = 2 \cdot 2 \cdot 11 = 44\,;$

3) $\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 120 & 2 \\ 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $\quad V(42, 120) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840\,;$

4) $\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$ $\quad V(84, 105) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420\,;$

5) $\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$ $\quad V(16, 24, 40) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 240\,;$

6)
$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad V(18,30,45) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90\,.$$

Zadatak 5. Jana je ubrala 6 bijelih i 15 crvenih ruža. Koliko najviše može složiti jednakih buketa, a da pritom iskoristi sve ruže?

Rješenje. $6 = 2 \cdot 3\,, \quad 15 = 5 \cdot 3\,, \quad M(6,15) = 3$
Najviše može složiti 3 jednaka buketa.

Zadatak 6. Stanko kupuje naranče i limune u trgovini. Naranče su pakirane po 9 komada, a limuni po 4 komada. Ako želi kupiti jednaki broj limuna i naranči, koliko paketa mora kupiti?

Rješenje. $4 = 2 \cdot 2\,, \quad 9 = 3 \cdot 3\,, \quad V(9,4) = 36\,.$
Limuna i naranči mora biti po 36 komada, te treba kupiti 9 paketa limuna i 4 paketa naranči.

Zadatak 7. S autobusne stanice autobus za Mikuliće kreće svakih 35 minuta, a autobus za Zaprešić svakih 20 minuta. Oba autobusa polaze svako jutro u 5 sati.

1) Nakon koliko će minuta opet zajedno krenuti sa stanice?

2) U koliko će to biti sati?

Rješenje. **1)** $35 = 5 \cdot 7\,, \quad 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5\,, \quad V(35,20) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 140\,;$
Opet će zajedno krenuti sa stanice za 140 min;
2) Zajedno će krenuti sa stanice za 140 min = 2 sata i 20 min, tj. u 5 sati + 2 sata 20 min = 7 sati i 20 min.

Zadatak 8.

1) Zapiši sve cijele brojeve koji su između cijelih brojeva $k-1$ i $k+5$.

2) Zapiši sve neparne cijele brojeve koji su veći od $2k-1$ i manji od $2k+7$, gdje je k cijeli broj.

3) Zapiši sve parne cijele brojeve veće od $2k-5$ i manje od $2k+1$, gdje je k cijeli broj.

Rješenje. **1)** To su brojevi k, $k+1$, $k+2$, $k+3$, $k+4$.
2) To su brojevi $2k+1$, $2k+3$ i $2k+5$.
3) To su brojevi $2k-4$, $2k-2$, $2k$.

Zadatak 9. Marko je dvostruko stariji od Filipa, a Filip je 3 godine stariji od Luke. Ako je Luki n godina, koliko ukupno godina imaju sva trojica?

Rješenje. Ako je Luki n godina, a Filip je 3 godine stariji, onda Filip ima $n+3$ godina. Marko je dvostruko stariji od Filipa pa ima $2 \cdot (n+3) = 2n+6$ godina. Sva trojica ukupno imaju $n+n+3+2n+6 = 4n+9$ godina.

Zadatak 10. Zamisli neki broj. Dodaj mu 1 pa zbroj pomnoži s 4. Zatim oduzmi 4 pa dobiveni rezultat podijeli s 4. Koji je broj rezultat?
Ponovi ovaj postupak nekoliko puta. Što primjećuješ? Obrazloži!

Rješenje. $[(n+1) \cdot 4 - 4] : 4 = (4n+4-4) : 4 = 4n : 4 = n.$ Tako ovim računom uvijek dobijemo broj od kojega smo krenuli.

Zadatak 11. Na polici se nalazi šest svezaka *Opće enciklopedije*, poredanih slijeva u desno, jedan do drugog. Svaki svezak ima 515 stranica ne računajući korice.

1) Koliko ukupno stranica ima *Opća enciklopedija*?

2) Koliko stranica ima između 313. stranice drugog sveska i 127. stranice petog?

3) Brojimo li stranice enciklopedije redom te izbrojimo 1784, u kojem svesku i na kojoj stranici smo se zaustavili?

4) Brojimo li stranice enciklopedije redom, ali otraga prema naprijed te se zaustavimo na broju 3000, u kojem svesku i na kojoj stranici smo se zaustavili?

Rješenje. **1)** $6 \cdot 515 = 3090$ **2)** $(515 - 313 + 1) + 2 \cdot 515 + 127 = 1360$ **3)** $1784 - 3 \cdot 515 = 239$ **4)** $3090 - 3000 + 1 = 91$, zaustavili smo se na 91. stranici prvog sveska.

Zadatak 12. Broj 100 zapiši povezujući računskim operacijama:

1) pet jedinica; **2)** pet trojki;

3) pet petica.

Rješenje. Primjerice: $111 - 11$, $33 \cdot 3 + 3/3$, $(5 + 5 + 5 + 5) \cdot 5$.

Zadatak 13. Ispiši redom brojeve 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Poveži te brojeve znakovima $+$ i $-$ (koristeći ih ukupno triput) tako da dobiješ 100.

Rješenje. Primjerice: $123 - 45 - 67 + 89$.

Zadatak 14. Zapiši broj 100 uporabom svih 10 znamenki i uporabom četiriju osnovnih računskih operacija.

Rješenje. Primjerice: $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 \cdot 9$.

Zadatak 15. Riješi rebus:

$$\begin{array}{cccccc} & O & H & O & H & O \\ + & A & H & A & H & A \\ \hline A & H & A & H & A & H \end{array}$$

Rješenje. A je na mjestu stotisućica u zadnjem retku prenesen od desettisućica pa očigledno mora bit $A = 1$. Sada imamo:

$$\begin{array}{cccccc} & O & H & O & H & O \\ + & 1 & H & 1 & H & 1 \\ \hline 1 & H & 1 & H & 1 & H \end{array}$$

Gledajući opet zbroj desettisućica zaključujemo da O mora biti ili 8 ili 9 da bi došlo do prenosa u stotisućice. Ako je $O = 8$ imamo:

$$\begin{array}{cccccc} & 8 & H & 8 & H & 8 \\ + & 1 & H & 1 & H & 1 \\ \hline 1 & H & 1 & H & 1 & H \end{array}$$

dakle H mora biti 9, pa imamo

$$\begin{array}{cccccc} & 8 & 9 & 8 & 9 & 8 \\ + & 1 & 9 & 1 & 9 & 1 \\ \hline 1 & 9 & 1 & 9 & 1 & 9 \end{array}$$

što nije istinit račun. Dakle $O = 9$ pa je

$$\begin{array}{cccccc} & 9 & H & 9 & H & 9 \\ + & 1 & H & 1 & H & 1 \\ \hline 1 & H & 1 & H & 1 & H \end{array}$$

iz čega slijedi da je $H = 0$ pa je rješenje rebusa

$$\begin{array}{cccccc} & 9 & 0 & 9 & 0 & 9 \\ + & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$90909 + 10101 = 101010$.

Zadatak 16. Odredi četiri uzastopna prirodna broja kojima je zbroj jednak $1\,258$.

Rješenje. Neka je n najmanji od tražena četiri broja. Onda mora biti

$$n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 1258,$$
$$4n + 6 = 1258.$$

Odatle je $n = 313$, te su traženi uzastopni brojevi 313, 314, 315, 316.

Zadatak 17. Zbroj pet uzastopnih parnih prirodnih brojeva je $6\,080$. Koji su to brojevi?

Rješenje. Označimo treći po redu broj s n. Onda su ostala četiri jednaka $n - 4$, $n - 2$, $n + 2$ i $n + 4$ pa mora biti

$$(n - 4) + (n - 2) + n + (n + 2) + (n + 4) = 6080$$
$$5n = 6080$$

te je $n = 1216$. Riječ je o brojevima $1\,212$, $1\,214$, $1\,216$, $1\,218$, $1\,220$.

Zadatak 18. Koja je posljednja znamenka umnoška $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 99$?

Rješenje. Riječ je o umnošku uzastopnih neparnih prirodnih brojeva od kojih neki završavaju s 5, te stoga i cijeli umnožak završava s 5.

Zadatak 19. S koliko nula završava umnožak $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 33$?

Rješenje. Broj je djeljiv s 10 ako je djeljiv s 2 i s 5. Kad bismo zadani umnožak rastavili na proste faktore, zanima nas koliko u tom rastavu ima petica (dvojki očigledno ima više nego petica). Među zadanim brojevima imamo tri koji završavaju s 5 (5, 15 i 25 – njihov je umnožak djeljiv s 5 četiri puta), te tri koja završavaju s nulom (10, 20 i 30 – umnožak je djeljiv s 5 tri puta). Stoga cijeli umnožak završava sa sedam ništica.

Zadatak 20. Koja je posljednja znamenka umnoška prvih stotinu prostih brojeva?

Rješenje. Broj 2 jedini je paran prost broj. Svi su ostali prosti brojevi, a među njima je i broj 5, neparni. Zbog toga umnožak završava nulom.

Zadatak 21. Prepiši, pa umjesto kvadratića upiši broj tako da dobiješ točne jednakosti:

1) $-11 + \square = -24$; **2)** $\square - (-45) = 13$;

3) $23 + \square = -1$; **4)** $\square + (-17) = -34$;