6 Sukladnost i sličnost

6.2. Sukladnost trokuta

Zadatak 1. Točke A i B s raznih su strana pravca p i od njega su jednako udaljene. Dokaži da pravac p raspolavlja dužinu $\overline{AB}$.

Rješenje. Neka su A' i B' nožišta visina spuštenih iz točaka A i B na pravac p, P presjek dužine $\overline{AB}$ i pravca. Trokuti $AA'P$ i $BB'P$ su pravokutni, podudaraju se u jednoj kateti i kutu kod vrha P (vršni kutovi). Zato su sukladni pa je $|AP| = |BP|$.

Zadatak 2. Dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ imaju zajedničko polovište. Dokaži: $\triangle ACD \cong \triangle CBD$ i $\triangle ABD \cong \triangle ACB$.

Rješenje. Neka je P sjecište tih dužina. Trokuti APD i BPC podudaraju se u dvjema stranicama i kutu među njima pa su sukladni. Zato se podudaraju u trećoj stranici, dakle $|AD| = |BC|$. Na isti način pokažemo da je $|AC| = |BD|$.
Trokuti ACD i CBD sada se podudaraju u svim trima stranicama, pa su sukladni. Isto vrijedi i za trokute ABD i ACB.

Zadatak 3. **1)** Dokaži da su visine spuštene na krakove jednakokračnog trokuta sukladne.
2) Ako trokut ima dvije sukladne visine, dokaži da je on jednakokračan.

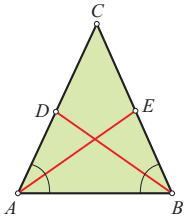
Rješenje. **1)** Trokuti $AA'B$ i $BB'A$ su pravokutni. Podudaraju se u hipotenuzi i kutu (kutovi uz katetu jednakokračnog trokuta). Zato su sukladni pa je $|AA'| = |BB'|$.
Drugi dokaz ove tvrdnje slijedi iz formule za površinu trokuta: $P = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}bv_b$. Ako je $a = b$, onda mora biti $v_a = v_b$.
2) Trokuti ABB' i BAA' su pravokutni, podudaraju se u hipotenuzi i jednoj kateti, pa su sukladni. Zato se podudaraju i u kutovima: $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B$. Nasuprot jednakim kutovima leže jednake stranice. Zato je trokut jednakokračan.

Zadatak 4. Na visini $\overline{CD}$ spuštenoj na osnovicu $\overline{AB}$ jednakokračnog trokuta ABC odabrana je točka E. Dokaži da je trokut ABE jednakokračan.

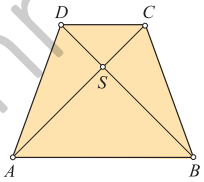
Rješenje. Trokuti ADC i BDC su pravokutni, podudaraju se u hipotenuzi i kateti pa su sukladni. Zato je $|AD| = |DB|$. Sada su ADE i BDE pravokutni, podudaraju se u dvjema katetama, pa su i oni sukladni. Znači, $|AE| = |BE|$ pa je ABE jednakokračan.

Zadatak 5. Na kracima $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ jednakokračnog trokuta ABC nalaze se točke D i E takve da je $|AD| = |BE|$. Dokaži da je $|AE| = |BD|$.

Rješenje. Trokuti ABD i ABE su sukladni: stranica $\overline{AB}$ im je zajednička, prema pretpostavci je $|AD| = |BE|$, a $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABE$, jer je trokut ABC jednakokračan. Dužine $\overline{AE}$ i $\overline{BD}$ odgovarajuće su stranice u tim sukladnim trokutima te su jednake duljine.

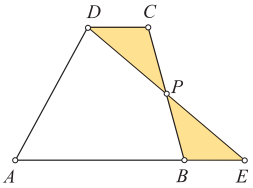


Zadatak 6. Trapez $ABCD$ je jednakokračan, $|AD| = |BC|$. Točka S sjecište je dijagonala trapeza. Dokaži da je $\triangle ASD \cong \triangle BSC$.



Rješenje. Iz $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ slijedi $\sphericalangle ACB = \sphericalangle BDA$. Sada se trokuti ADS i BCS podudaraju u dvama kutovima i stranici pa su sukladni.

Zadatak 7. Točka P polovište je kraka $\overline{BC}$ trapeza $ABCD$ (vidi sliku). Dokaži: $\triangle CDP \cong \triangle BEP$. Koristeći se ovom činjenicom izvedi poznatu formulu za površinu trapeza, $P = \dfrac{a+c}{2} \cdot v$, gdje su a i c duljine osnovica, a v duljina visine trapeza.



Rješenje. Trokuti BEP i CDP su sukladni (vidi sliku uz zadatak), jer je $|PB| = |PC|$ (P je polovište), $\sphericalangle BPE = \sphericalangle CPD$ i $\sphericalangle PDC = \sphericalangle PEB$ (kutovi uz presječnicu).

Zadatak 8. Na dužini $\overline{AB}$ odabere se točka C te se nad dužinama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ s različitih strana pravca AB konstruiraju jednakostranični trokuti ACD i CEB. Dokaži da je $|AE| = |BD|$.

Rješenje. Treba prvo dokazati da su trokuti CDB i AEC sukladni. $\sphericalangle ACE = \sphericalangle DCB$ jer su to kutovi uz presječnicu. $|AC| = |CD|$ jer je trokut ACD jednakostraničan. $|CE| = |CB|$ jer je trokut CEB jednakostraničan. Dakle, imamo dva trokuta koja se podudaraju u dvije stranice i kutu između njih. Ta su dva trokuta sukladna. Odatle slijedi da je $|AE| = |DB|$.

Zadatak 9. Na dužini $\overline{AB}$ odabere se točka M te se nad dužinama $\overline{AM}$ i $\overline{MB}$ s različitih strana pravca AB konstruiraju kvadrati $AMCD$ i $MEFB$. Dokaži da je trokut AFC jednakokračan.

Rješenje. Treba prvo pokazati da su trokuti AFB i CEF sukladni. $\sphericalangle CEF = \sphericalangle FBA = 90°$. $|EF| = |FB|$ jer su to stranice istog kvadrata. $|AB| = |EC|$ ($|AB| = |AM| + |MB|$ i $|EC| = |EM| + |MC|$) jer je $|AM| = |MC|$ (stranice istog kvadrata) i $|MB| = |ME|$ (stranice istog kvadrata). Dakle, imamo dva trokuta koji se podudaraju u dvjema stranicama i kutu između njih. Ta su dva trokuta sukladna, pa slijedi da je $|AF| = |CF|$.

Zadatak 10. Vrhovima konveksnog četverokuta položeni su pravci paralelno dijagonalama četverokuta i ti pravci zatvaraju novi četverokut. Odredi omjer površina ovih dvaju četverokuta.

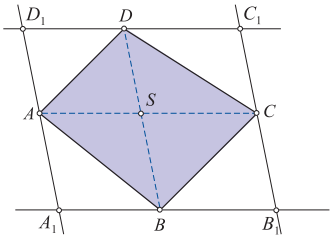
Rješenje. Neka je $ABCD$ dani četverokut, a $A_1B_1C_1D_1$ četverokut koji dobijemo opisanom konstrukcijom. Očito je

$\triangle ADD_1 \cong \triangle ASD$,

$\triangle AA_1B \cong \triangle ABS$,

$\triangle BB_1C \cong \triangle CSB$,

$\triangle CC_1D \cong \triangle DSC$.

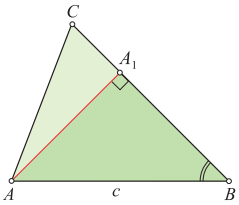


Površina četverokuta $A_1B_1C_1D_1$ dvostruko je veća od površine četverokuta $ABCD$.

Zadatak 11. Dokaži da su trokuti ABC i $A'B'C'$ sukladni ako je:

1) $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $v_a = v'_a$;
2) $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $v_b = v'_b$;
3) $a = a'$, $b = b'$, $v_b = v'_b$;
4) $a = a'$, $b = b'$, $v_c = v'_c$;
5) $v_a = v'_a$, $v_b = v'_b$, $\gamma = \gamma'$.

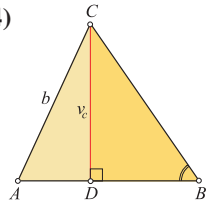
Rješenje. **1)** Trokut ABA_1 sukladan je trokutu $A'B'A'_1$. Ti trokuti imaju jednake sve odgovarajuće kutove, te je $v_a = v'_a$. No, onda je i $c = c'$. Dalje je lako, jer je $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $c = c'$, trokuti ABC i $A'B'C'$ su sukladni.



2) Trokut ABB_1 sukladan je trokutu $A'B'B'_1$. Ti trokuti imaju jednake dvije stranice ($a' = a$ i $v'_b = v_b$) i kut nasuprot većoj stranici (pravi kut pri vrhu B_1, odnosno B'_1. No, onda je i $c = c'$. Dalje je lako, jer je $a = a'$, $b = b'$ i $c = c'$, trokuti ABC i $A'B'C'$ su sukladni.

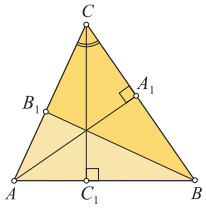
3) Trokut ABB_1 sukladan je trokutu $A'B'B'_1$. Ti trokuti imaju jednake sve odgovarajuće kutove, te je $v_a = v'_a$. No, onda je i $c = c'$. Dalje je lako, jer je $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $c = c'$, trokuti ABC i $A'B'C'$ su sukladni.

4)

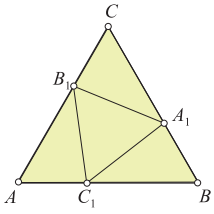


Iz $\triangle DBC \cong \triangle D'B'C'$, slijedi $\beta = \beta'$, a iz $\triangle ADC \cong \triangle A'D'C'$ slijedi $\alpha = \alpha'$. No, onda je i $\gamma = \gamma'$. Budući da je $a = a'$, $b = b'$ i $\gamma = \gamma'$, trokuti ABC i $A'B'C'$ su sukladni.

5) $\triangle BCB_1 \cong \triangle B'C'B'_1$, jer ti trokuti imaju jednake odgovarajuće kutove i jednu stranicu zajedničku. Iz istih je razloga $\triangle AA_1C \cong \triangle A'A'_1C'$. Zbog prve je sukladnosti $a = a'$, a zbog druge $b = b'$. Kako je još i $\gamma = \gamma'$, slijedi $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.



Zadatak 12. Na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ jednakostraničnog trokuta ABC nalaze se točke C_1, A_1 i B_1, pri čemu je $|AC_1| = |BA_1| = |CB_1|$ (vidi sliku). Dokaži da je trokut $A_1B_1C_1$ jednakostraničan.



Rješenje. Iz $|AC_1| = |BA_1| \implies |C_1B| = |A_1C|$, iz $|AC_1| = |CB_1| \implies |AB_1| = |C_1B|$ i iz $|BA_1| = |CB_1| \implies |CA_1| = |AB_1|$.

Trokuti AC_1B_1 i C_1BA_1 su sukladni jer se podudaraju u dvjema stranicama ($|AC_1| = |BA_1|$ i $|A_1C| = |C_1B|$) i kutu između njih ($\sphericalangle AC_1B_1 = \sphericalangle C_1BA_1 = 60°$). To znači da je $|C_1B_1| = |C_1A_1|$.

Trokuti AC_1B_1 i B_1A_1C su sukladni jer se podudaraju u dvjema stranicama ($|AC_1| = |CB_1|$ i $|AB_1| = |CB_1|$) i kutu između njih ($\sphericalangle B_1AC_1 = \sphericalangle A_1CB_1 = 60°$). To znači da je $|C_1B_1| = |B_1A_1|$.

Trokuti A_1C_1B i B_1A_1C su sukladni jer se podudaraju u dvjema stranicama ($|BA_1| = |CB_1|$ i $|C_1B| = |A_1C|$) i kutu između njih ($\sphericalangle C_1BA_1 = \sphericalangle A_1CB_1 = 60°$). To znači da je $|A_1C_1| = |B_1A_1|$.

Iz toga slijedi da je $|A_1C_1| = |B_1A_1| = |C_1B_1|$, tj. trokut $A_1B_1C_1$ je jednakostraničan.

Zadatak 13. Stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ jednakostraničnog trokuta ABC produžimo redom preko vrhova B, C i A za dužine jednake duljine. Tako dobijemo točke C_1, A_1 i B_1. Dokaži da je trokut $A_1B_1C_1$ jednakostraničan.

Rješenje. Trokuti BC_1A_1 i B_1CA_1 su sukladni jer se podudaraju u dvjema stranicama ($|BC_1| = |CA_1|$ i $|BA_1| = |B_1C|$) i kutu između njih ($\sphericalangle A_1BC_1 = \sphericalangle B_1CA_1 = 120°$). To znači da je $|C_1A_1| = |B_1A_1|$.

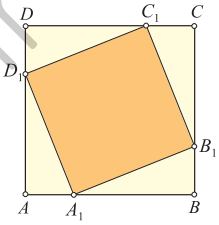
Trokuti BC_1A_1 i B_1AC_1 su sukladni jer se podudaraju u dvjema stranicama ($|BC_1| = |AB_1|$ i $|BA_1| = |AC_1|$) i kutu između njih ($\sphericalangle A_1BC_1 = \sphericalangle B_1AC_1 = 120°$). To znači da je $|C_1A_1| = |B_1C_1|$.

Trokuti B_1CA_1 i B_1AC_1 su sukladni jer se podudaraju u dvjema stranicama ($|CA_1| = |AB_1|$ i $|B_1C| = |AC_1|$) i kutu između njih ($\sphericalangle A_1CB_1 = \sphericalangle B_1AC_1 = 120°$). To znači da je $|B_1A_1| = |B_1C_1|$.

Iz toga slijedi da je $|C_1A_1| = |B_1A_1| = |B_1C_1|$, tj. trokut $A_1B_1C_1$ je jednakostraničan.

Zadatak 14. Na stranicama $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$ kvadrata $ABCD$ nalaze se točke A_1, B_1, C_1 i D_1 takve da je $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1| = |DD_1|$. Dokaži da je četverokut $A_1B_1C_1D_1$ kvadrat.

Rješenje. Treba dokazati da je $\triangle AA_1D_1 \cong \triangle BB_1A_1 \cong \triangle CC_1B_1 \cong \triangle DD_1C_1$, jer onda se odatle zaključuje da je $|A_1B_1| = |B_1C_1| = |C_1D_1| = |D_1A_1|$. Osim toga, zbog jednakosti odgovarajućih šiljastih kutova u tim pravokutnim trokutima slijedi $\sphericalangle D_1A_1B_1 = \sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle B_1C_1D_1 = \sphericalangle C_1D_1A_1 = 90°$ (vidi sl. dolje).

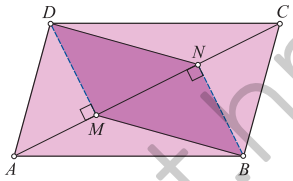


Zadatak 15. Stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{DA}$ kvadrata $ABCD$ produžimo redom preko vrhova B, C, D i A za dužinu jednake duljine. Tako dobijemo točke A_1, B_1, C_1 i D_1. Dokaži da je četverokut $A_1B_1C_1D_1$ kvadrat.

Rješenje. Trokuti AD_1A_1, BA_1B_1, CB_1C_1 i DC_1D_1 su sukladni. Stranice $|DD_1| = |AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$, $|AD_1| = |BA_1| = |CB_1| = |DC_1|$ i kutovi $\sphericalangle D_1AA_1 = \sphericalangle B_1BA_1 = \sphericalangle B_1CC_2 = \sphericalangle C_1CB_1$. Slijedi da je $|C_1D_1| = C_1B_1| = |B_1A_1| = |A_1D_1|$, tj. četverokut $A_1B_1C_1D_1$ je kvadrat.

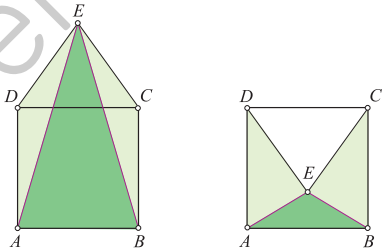
Zadatak 16. Nacrtaj paralelogram $ABCD$. Neka je točka N nožište okomice iz vrha B, a točka M nožište okomice iz vrha D na dijagonalu $\overline{AC}$. Dokaži da je četverokut $MBND$ paralelogram.

Rješenje. Uočavamo (vidi sliku) da je $\triangle AMD \cong \triangle CNB$. Zato je $|MD| = |BN|$ i $DM \parallel BN$ pa je četverokut $MBND$ paralelogram.



Zadatak 17. Nad stranicom $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ konstruiran je jednakostranični trokut DCE. Dokaži da je trokut ABE jednakokračan.

Rješenje. Trokut nad $\overline{CD}$ možemo konstruirati na dva načina. U oba je slučaja dovoljno dokazati da je $\triangle AED \cong \triangle BCE$. Jer onda je i $|AE| = |BE|$, pa je trokut ABE jednakokračan.

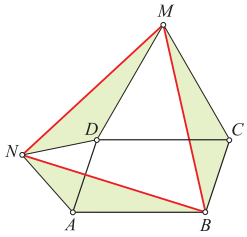


Zadatak 18. Nad stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ kvadrata $ABCD$ konstruirani su s vanjske strane jednakostranični trokuti BPC i DCQ. Dokaži da je trokut APQ jednakostraničan.

Rješenje. Trokuti ADQ, ABP i PCQ su jednakokračni s krakovima jednake duljine. Kut $\sphericalangle ABP = \sphericalangle PCQ = \sphericalangle ADQ = 150°$. Ti su trokuti sukladni pa je $|AP| = |PQ| = |AQ|$. Slijedi da je trokut APQ jednakostraničan.

Zadatak 19. Nad stranicama $\overline{AD}$ i $\overline{CD}$ paralelograma $ABCD$ konstruirani su s vanjske strane jednakostranični trokuti ADN i DCM. Dokaži da je trokut BMN jednakostraničan.

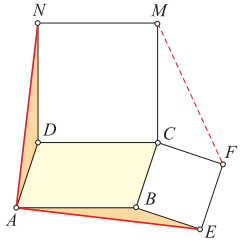
Rješenje. Dovoljno je dokazati $\triangle ABN \cong \triangle BCM \cong \triangle NDM$. Lako je vidjeti da sva tri trokuta imaju jednake po dvije odgovarajuće stranice $|AN| = |BC| = |ND|$, te $|AB| = |CM| = |DM|$. Osim toga je $\sphericalangle NAB = \sphericalangle BCM = \sphericalangle NDM = 60° + \alpha$, gdje je $\alpha = \sphericalangle DAB$.



Zadatak 20. Nad stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{CD}$ paralelograma $ABCD$ konstruirani su s vanjske strane kvadrati $BEFC$ i $DCMN$. Dokaži da je $|AN| = |AE|$. Je li $|FM| = |AN| = |AE|$?

Rješenje. Pokažimo da je $\triangle ADN \cong \triangle AEB$. Ti trokuti imaju par jednakih stranica ($|AD| = |BE|$ i $|AB| = |DN|$) te je osim toga i $\sphericalangle ADN = \sphericalangle EBA$. Dakle, $|AN| = |AE|$.

Općenito ne vrijedi $|FM| = |AN| = |AE|$. Te jednakosti vrijede u slučaju da su nad stranicama paralelograma konstruirani jednakostranični trokuti.



Zadatak 21. Nad stranicama $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ trokuta ABC konstruirani su s vanjske strane kvadrati $BMNC$ i $ACPQ$. Dokaži da je $|AN| = |BP|$.

Rješenje. Trokuti BCP i NCA su sukladni. Imaju dvije jednake stranice ($|BC| = |CN|$ i $|AC| = |PC|$) i kut između njih ($\sphericalangle NCA = \sphericalangle BCP = \gamma + 90°$). Slijedi da je $|AN| = |BP|$.

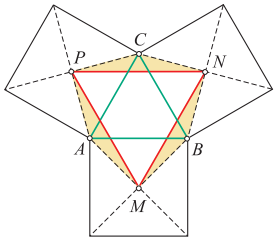
Zadatak 22. Dva jednakostranična trokuta ABC i BDE imaju zajednički vrh B. Dokaži da je $|AE| = |CD|$.

Rješenje. Treba pokazati da su trokuti CBD i ABE sukladni. $|AB| = |BC|$ i $|BE| = |BD|$. Označimo s β kut pri vrhu B trokuta CBE. $\sphericalangle CBD = \sphericalangle ABE = \beta + 60°$. Trokuti CBD i ABE su sukladni pa je prema tome $|AE| = |CD|$.

Zadatak 23. Nad stranicama jednakostraničnog trokuta ABC konstruirani su s vanjske strane kvadrati. Dokaži da su središta tih kvadrata vrhovi novog jednakostraničnog trokuta.

Rješenje. Valja dokazati da je $\triangle AMP \cong \triangle MBN \cong \triangle PNC$.

Zbog sukladnosti triju kvadrata (jer su im stranice jednake stranicama jednakostraničnog trokuta ABC) navedeni su trokuti jednakokračni s međusobno jednakim krakovima. No i kutovi pri vrhovima A, B i C u tim su trokutima jednaki, svaki iznosi $150°$. Onda su i treće stranice, osnovice triju jednakokračnih trokuta međusobno jednake, zbog čega je trokut MNP jednakostraničan.



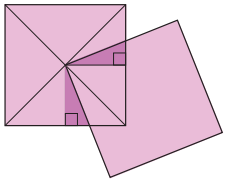
Zadatak 24. Nad stranicama kvadrata $ABCD$ konstruirani su jednakostranični trokuti ABM, CBN, DCP i DAQ. Dokaži da je četverokut $MNPQ$ kvadrat.

Rješenje. Uočavamo sukladne trokute: $\triangle AQM \cong \triangle BMN \cong \triangle CNP \cong \triangle DPQ$.

Obrazloženje. $|AQ| = |AM| = |BM| = |BN| = |CN| = |CP| = |DP| = |DQ| = |AB|$, te k tome $\sphericalangle MAQ = \sphericalangle MBN = \sphericalangle PCN = \sphericalangle QDP = 150°$. Dakle, $|MN| = |NP| = |PQ| = |QM|$, te $\sphericalangle QMN = \sphericalangle MNP = \sphericalangle NPQ = \sphericalangle PQM = 15° + 60° + 15° = 90°$.

Zadatak 25. Vrh jednog kvadrata nalazi se u središtu drugog, sukladnog kvadrata. Ako je duljina stranice svakog od tih dvaju kvadrata jednaka a, kolika je površina dijela ravnine koji im je zajednički?

Rješenje. Zbog sukladnosti dvaju osjenčanih trokuta (podudaraju se u stranici $\frac{a}{2}$ i kutovima uz tu stranicu $90°$ i $45° - \gamma$), možemo zaključiti da je površina zajedničkog dijela uvijek jednaka $\frac{1}{4}a^2$, tj. četvrtini površine jednog kvadrata.



⋆ ⋆ ⋆

U zadatcima u kojima duljine dužina i mjere kutova nisu zadane, zadajte ih sami crtežom. Nakon konstrukcije napravite raspravu o ovisnosti rješenja o tim podatcima. Za konstrukciju kutova kojima je mjera zadana smijete koristiti kutomjer.

Zadatak 26. Konstruiraj trokut ABC ako je zadano:

1) $a = 4$ cm, $b = 3$ cm, $c = 6$ cm; **2)** $\alpha = 75°$, $\beta = 45°$, $b = 5$ cm;
3) $a = 3.5$ cm, $c = 4.5$ cm, $\beta = 105°$; **4)** $b = 5$ cm, $c = 4$ cm, $\beta = 60°$.

Rješenje. **1)** Konstruiramo dužinu $\overline{AB}$ duljine 6 cm. Iz točke A zasijecimo kružni luk polumjera $b = 3$ cm, a iz točke B luk polumjera $a = 4$ cm. U sjecištu lukova nalazi se točka C. Ti se lukovi sijeku u dvjema točkama pa postoje dva rješenja.

2) Konstruiramo dužinu $\overline{AC}$ duljine $b = 5$ cm. U vrhu A konstruiramo kut $\alpha = 75°$, a u vrhu C kut $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 120° = 60°$. U sjecištu krakova tih kutova nalazi se točka B.

3) Konstruiramo dužinu $\overline{AB}$ duljine $c = 4.5$ cm. U vrhu B konstruiramo kut $\beta = 105°$. Iz točke B nanesemo na krak tog kuta dužinu $\overline{BC}$ duljine $a = 3.5$ cm. Spojimo vrhove C i A i dobijemo traženi trokut.

4) Konstruiramo dužinu $\overline{AB}$ duljine $c = 4$ cm. U vrhu B konstruiramo kut $\beta = 60°$. Iz vrha A zasiječemo kružni luk polumjera $b = 5$ cm. U sjecištu kružnog luka i kraka kuta β nalazi se točka C.

Zadatak 27. Konstruiraj trokut ABC ako je:

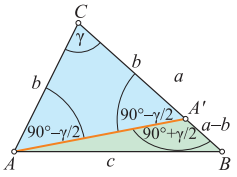
1) $a = 3.5$ cm, $b = 2.5$ cm, $c = 6$ cm;
2) $a = 7$ cm, $c = 5.5$ cm, $\gamma = 60°$.

Rješenje. **1)** Ne postoji trokut sa zadanim duljinama stranica. Nije, naime, ispunjena nejednakost $a + b > c$.
2) S danim podatcima trokut nije jednoznačno određen već se konstrukcijom dobiju dva rješenja. Razlog tome je što je zadan kut nasuprot kraćoj od stranica a i c.

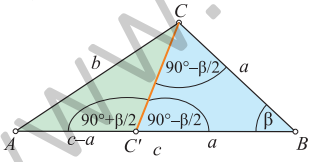
Zadatak 28. Konstruiraj trokut kojem je zadano

1) c, $a - b$, γ; **2)** $c - a$, b, β; **3)** $a - b$, α, β; **4)** $a + b$, α, β.

Rješenje. **1)** Konstruiramo kut $90° + \frac{\gamma}{2}$. Na jedan njegov krak nanesemo dužinu $\overline{A'B}$ duljine $a - b$. Iz vrha B zasiječemo kružni luk polumjera c. Drugi krak kuta iz vrha A' i kružni luk sijeku se u točki A. Zatim, u točki A konstruiramo kut $90° - \frac{\gamma}{2}$ tako da mu jedan krak leži na pravcu na kojem leži i dužina AA'. Drugi krak i produljena stranica $\overline{AB}$ sijeku se u točki C.

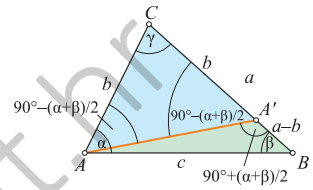


2)

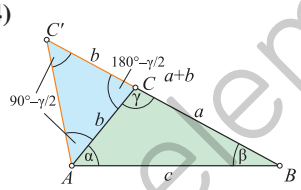


Konstruiramo dužinu $\overline{AC'}$ duljine $c - a$. Iz vrha A zasiječemo kružni luk polumjera b. U vrhu C' konstruiramo kut $90° + \frac{\beta}{2}$. Krak tog kuta i kružni luk sijeku se u točki C. U toj točki konstruiramo kut $90° - \frac{\beta}{2}$ tako da mu jedan krak leži na pravcu na kojem leži dužina $\overline{CC'}$. Drugi krak i produljena stranica $\overline{AC'}$ sijeku se u točki B.

3) Konstruiramo dužinu $\overline{BA'}$ duljine $a-b$. U vrhu B konstruiramo kut β tako da mu jedan krak leži na pravcu na kojem leži i dužina $\overline{BA'}$. U vrhu A' konstruiramo kut $90^\circ + \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ tako da mu jedan krak leži na pravcu na kojem leži i dužina $\overline{BA'}$. Krakovih tih kutova sijeku se u točki A. U vrhu A konstruiramo kut α tako da mu jedan krak leži na pravcu na kojem leži i dužina $\overline{AB}$. Drugi krak tog kuta i produljena stranica BA' sijeku se u točki C.



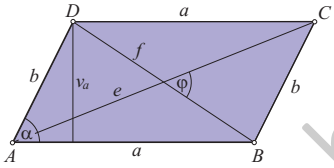
4)



Konstruiramo kut β u vrhu B. Na jedan krak nanesemo dužinu $\overline{BC'}$ duljine $a+b$. U vrhu C' konstriuramo kut $90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$ tako da mu jedan krak leži na pravcu na kojem leži i dužina $\overline{BC'}$. Drugi krak tog kuta i krak kuta β sijeku se u točki A. Zatim u točki A konstruiramo kut α tako da jedan krak tog kuta leži na stranici $\overline{AB}$. Sjecište drugog kraka i dužine $\overline{BC'}$ dat će točku C.

⋆⋆⋆

Elemente paralelograma označavamo kao na slici.



standardne oznake za paralelogram

Zadatak 29. Konstruiraj paralelogram ako je zadano:

1) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 45^\circ$; **2)** $a = 6$ cm, $e = 6$ cm, $f = 8$ cm;
3) $e = 5$ cm, $f = 4$ cm, $v_a = 3$ cm; **4)** $a = 5$ cm, $f = 7$ cm, $\varphi = 75^\circ$.

Rješenje. **1)** Konstruiramo dužinu $\overline{AB}$ duljine $a = 6$ cm. U točki A konstruiramo kut $\alpha = 45^\circ$. Na krak kuta nanesemo dužinu $\overline{AD}$ duljine $b = 4$ cm. U točki D konstruiramo kut $\beta = \dfrac{1}{2}(360^\circ - 2\cdot 45^\circ) = 135^\circ$. Na krak tog kuta nanesemo dužinu $\overline{DC}$ duljine $a = 6$ cm. Spojimo točke C i B.

2) Konstruiramo trokut ABS duljina stranica $a = 6$ cm, $\dfrac{e}{2} = 3$ cm i $\dfrac{f}{2} = 4$ cm. Produljimo stranicu $\overline{BS}$ preko vrha S za $\dfrac{f}{2}$ i dobijemo točku D. Produljimo stranicu $\overline{AS}$ preko vrha S za $\dfrac{e}{2}$ i dobijemo točku C. Spojimo Točke D i A, B i C, C i D i dobijemo traženi paralelogram.

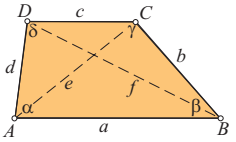
3) Konstruiramo pravokutnik duljina stranica $v_a = 3$ cm i $a + x\sqrt{e^2 - v_a^2} = \sqrt{25-9} = 4$ cm. Dijagonala tog pravokutnika je ujedno i dijagonala traženog paralelograma $e = 5$ cm. U polovištu dijagonale konstruiramo kružnicu

polumjera $\frac{f}{2} = 2$ cm. Kružnica siječe stranice pravokutnika u četiri točke: B i B' te D i D'. Imamo dva rješenja, paralelogram $ABCD$ i $AB'CD'$.

4) Konstruiramo dužinu $\overline{BS}$ duljine $\frac{f}{2} = 3.5$ cm. U vrhu S konstruiramo kut $180° - \varphi = 105°$. Iz vrha B opišemo kružnicu polumjera $a = 5$ cm. Sjecište kružnice i kraka kuta je točka A. Produljimo stranicu $\overline{BS}$ preko vrha S za $\frac{f}{2}$ i dobijemo točku D. Produljimo stranicu $\overline{AS}$ preko vrha S za $\frac{e}{2}$ i dobijemo točku C. Spojimo točke B i C, C i D, D i A i dobijemo traženi paralelogram.

⋆⋆⋆

Elemente trapeza označavamo kao na slici.



standardne oznake za trapez

Zadatak 30. Konstruiraj jednakokračni trapez ako je zadano:

1) $a = 6$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm; **2)** $a = 5$ cm, $c = 3$ cm, $\alpha = 60°$;
3) $a = 6$ cm, $b = 3$ cm, $v = 2.5$ cm; **4)** $a = 6$ cm, $c = 3$ cm, $v = 4$ cm.

Rješenje. **1)** Konstruiramo dužinu $\overline{AD'}$ duljine $x = \frac{a-c}{2} = 1.5$ cm. Iz vrha D' povučemo okomicu na dužinu $\overline{AD'}$. Iz vrha A opišemo kružnicu polumjera $b = 4$ cm. Sjecište okomice i kružnice je točka D. Iz točke D povučemo okomicu na dužinu $\overline{D'D}$ duljine $c = 3$ cm i dobijemo točku C. Produljimo stranicu $\overline{AD'}$ preko točke D' za $a - x = 4.5$ cm i dobijemo točku B. Spojimo točke B i C.

2) Konstruiramo dužinu $\overline{AD'}$ duljine $x = \frac{a-c}{2} = 1$ cm. Iz točke D' povučemo okomicu na dužinu $\overline{AD'}$. U točki A konstruiramo kut $\alpha = 60°$ tako da mu jedan krak leži na pravcu na kojem leži i dužina $\overline{AD'}$. Sjecište drugog kraka i okomice iz D' je točka D. Produljimo stranicu $\overline{AD'}$ preko vrha D' za $a - x = 4$ cm i dobijemo točku B. Iz vrha D povučemo okomicu na dužinu $\overline{D'D}$ duljine $c = 3$ cm i dobijemo točku C. Spojimo točke B i C.

3) Konstruiramo dužinu $\overline{AB}$ duljine $a = 6$ cm. Na visini $v = 2.5$ cm konstruiramo pomoćni pravac paralelan dužini $\overline{AB}$. Iz vrhova A i B opišemo kružnice polumjera $b = 3$ cm. Sjecišta kružnice i pomoćnog pravca su točke C', C, D i D'. Imamo dva rješenja.

4) Konstruiramo dužinu $\overline{AD'}$ duljine $x = \frac{a-c}{2} = 1.5$ cm. Iz vrha D' povučemo okomicu duljine $v = 4$ cm i dobijemo točku D. Spojimo točke A i D. Produljimo stranicu $\overline{AD'}$ preko točke D' za $a - x = 4.5$ cm i dobijemo točku B. Iz točke D povučemo okomicu na dužinu $\overline{D'D}$ duljine $c = 3$ cm i dobijemo točku C. Spojimo točke B i C.