

1

Brojevi



Što će naučiti?

- razlikovati i opisivati skupove brojeva i njihove odnose
- računati u izrazima s više računskih operacija i sa zagradama te primjenjivati pravilo o zaokruživanju decimalnih brojeva
- primjenjivati račun proporcionalnosti i postotaka u problemima iz svakodnevice
- usvojiti pojam skupa te provoditi operacije unije, presjeka i razlike skupova



Dodatni sadržaji





Pripremi se za gradivo koje slijedi, rješi pripremne zadatke koji se nalaze u elektroničkom dijelu udžbenika.



Upitate li nekoga, kome matematika i nije osobito bliska, čime se matematičari bave, možete očekivati odgovor: **brojevima!** I premda baš i nije točan, odgovor nije neobičan. Jer, prva iskustva s matematikom u svakog su čovjeka vezana uz brojeve i računanje. A još ne tako davno, prvoškolski su se udžbenici iz matematike zvali **Računice**. Kada su ljudi počeli rabiti brojeve? Na ovo pitanje nemoguće je dati odgovor. Brojevi i njihovo zapisivanje nastajali su i razvijali se u dugotraјnom povijesnom procesu.

U ovom poglavlju dat ćemo pregled skupova brojeva koje smo do sada upoznali.



1.1. Prirodni i cijeli brojevi

Prirodni brojevi su brojevi 1, 2, 3, 4, 5... Njima se služimo pri brojenju ili prebrajanju. Prirodnim brojem iskazujemo brojnost nekog skupa, odgovaramo na pitanje **koliko** je u skupu članova.

Postoji najmanji prirodni broj, to je broj 1. Ne postoji najveći prirodni broj. Iza ma kako velikog prirodnog broja n slijedi veći ($n + 1$) što znači da je skup prirodnih brojeva **beskonačan**.

Skup prirodnih brojeva

Skup **prirodnih brojeva** označavamo s \mathbb{N} .

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n \dots\}.$$



PROSTI BROJEVI

Prirodni broj koji osim samoga sebe i broja 1 nema drugih djelitelja zove se **prost** ili **primbroj**. Evo svih prostih brojeva koji su manji od 100:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Nastavi ovaj niz ispisujući sve proste brojeve manje od 200. Što misliš, ima li tom ispisivanju kraja? Je li skup prostih brojeva beskonačan?

Starogrčki matematičar i fizičar Eratosten "pronalazio" je proste brojeve postupkom *prosijavanja*. Istraži o kakvom je postupku riječ.





KAKO SU BROJEVE ZAPISIVALI NAŠI PREDCI?

Tijekom ljudske povijesti u raznim su se društvenim zajednicama razvili različiti zapisi prirodnih brojeva. Razlikujemo **pozicijski i nepozicijski sustav zapisa**.

U nepozicijskom svaká znamenka nosi istu brojevnú vrijednost bez obzira na njezino mjesto (poziciju) u zapisu broja. Jedan je takav primjer i rimski zapis. Primjerice, CCXXIX znači broj $100 + 100 + 10 + 10 + (10 - 1) = 229$. Znak C uvijek nosi brojevnú vrijednost 100, a znak X vrijednost 10.

U pozicijskim sustavima, kakav je i ovaj naš suvremenih, upravo je obrnuto. Znamenke nose brojevné vrijednosti koje ovise o njihovu položaju (poziciji) u zapisu. Tako primjerice, 333 znači $3 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 3$. Dakle, prva trojka znači 300, druga 30, a treća 3 jedinice.



Druga bitna karakteristika zapisa prirodnog broja jest njegova **osnovica** ili **baza**. Danas se u cijelom svijetu rabi **dekadski** brojevni sustav kojemu je osnovica 10. Vjerovatno razlog je taj što čovjek na obje ruke ima ukupno 10 prstiju. Postoje i brojevni sustavi s drugim osnovicama, primjerice, binarni na kojem počiva rad elektroničkih računala.

Pri zapisivanju brojeva nerijetko su se uzimala slova pisma. Tako je, primjerice, u rimskom i grčkom zapisivanju, ali i u staroslavenskoj glagoljici koja se u hrvatskim krajevima zadržala gotovo 10 stoljeća.

Istražite:

1. Kako su brojeve zapisivali i s njima računali stari Rimljani?
2. Kako su naši predci zapisivali brojeve koristeći se glagoljicom?
3. Navedite još neki primjer nedekadskog brojevnog sustava. Možete li opisati osnovne značajke binarnog brojevnog sustava?

Zbroj dvaju prirodnih brojeva uvijek je prirodan broj. Kažemo da je skup prirodnih brojeva **zatvoren** s obzirom na zbrajanje. A je li zatvoren s obzirom na oduzimanje? Drugim riječima, je li razlika $m - n$ dvaju prirodnih brojeva uvijek prirodni broj? Ne, razlika dvaju prirodnih brojeva od kojih je prvi manji ili jednak drugom nije prirodan broj. To je razlog za proširenje skupa \mathbb{N} negativnim cijelim brojevima i nulom.

Negativni cijeli brojevi su se "udomačili" u našoj svakodnevničkoj životnoj situaciji. Njima zapisujemo temperaturu ispod nišnice, visinu vodostaja rijeke koja je manja od one iskazane nulom, dubinu mora, stanje na tekućem ili nekom drugom bankovnom računu itd.

Prirodni brojevi zajedno s negativnim cijelim brojevima i nulom čine skup cijelih brojeva.

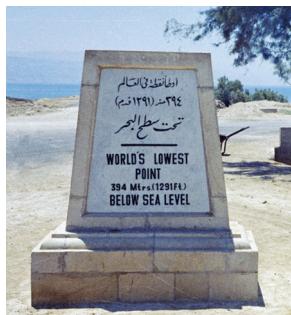
Skup cijelih brojeva

Skup cijelih brojeva označavamo sa \mathbb{Z} :

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Zadatak 1. Nadmorska visina

Mrtro more je jezero površine 600 km^2 . Nadmorska visina njegove površine iznosi -418 m . Dno jezera doseže -794 m . *The Challenger Deep* najniža je točka na Zemlji, a nalazi se u Tihom oceanu na južnom dijelu Marijanske brazde na nadmorskoj visini $-10\,971 \text{ m}$. Najviša točka iznad razine mora je *Mount Everest* na granici Tibeta i Nepala. Njezinu je nadmorska visina 8848 m .



Planinski vrh *Chimborazo* u Ekvadoru je najudaljenija točka od središta Zemlje. Ta udaljenost iznosi 6384.4 km što je za oko 2 km udaljenije nego *Mount Everest*. Posljedica je činjenice da Zemlja nije sfera već je spljoštena na polovima, a *Chimborazo* je u blizini ekvatora.

- 1) Kolika je najveća dubina Mrtvog mora?
- 2) Kolika je razlika između nadmorskih visina najniže i najviše točke na Zemlji?
- 3) Kolika je udaljenost *Mount Everesta* od središta Zemlje?



PRIČA O NULI

Nula, naoko ništa neobično, broj kao i svaki drugi! Je li uistinu tako? Pogledajmo ove jednakosti:

$$a + 0 = a, \quad a \cdot 0 = 0, \quad a - a = 0, \quad a^0 = 1.$$

S nulom se ne smije dijeliti, učimo još u osnovnoj školi. A zašto? Iz $\frac{a}{0} = b$ slijedi $a = b \cdot 0$, pa imamo ove dvije mogućnosti:

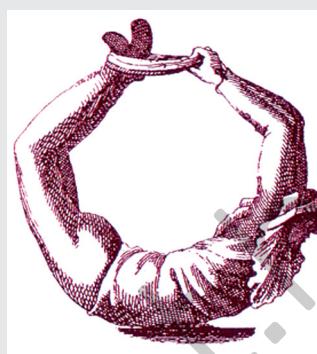
(1) Ako je $a = 0$, onda je $0 = b \cdot 0$ i ta je jednakost ispunjena za svaki broj b . Dakle, dijeljenje je tada **neodređeno**. Rezultat dijeljenja je bilo koji broj b .



(2) Ako je $a \neq 0$, jednakost $a = b \cdot 0$ nije ispunjena niti za jedan broj b . Naime, s njezine lijeve strane je broj različit od nule, a s desne nula. U ovom slučaju dijeljenje nije definirano, ono **nije moguće**.

Nula je cijeli broj. Ona nije prirodni broj **po definiciji**.

Prema nekim povjesničarima matematike nulu su uveli Kinezi. Neki drugi pripisuju njezinu pojavu indijskim matematičarima iz 6. st. od kojih potječe i njezina suvremena oznaka. Njezin je naziv latinskog podrijetla (lat. *nullus* = nijedan).





GAUSSOVA DOSJETKA



Gauss kao osmogodišnji dječak

Danas kad gotovo u svakom džepu imamo kalkulator (ne zaboravite da ga imate i na svojem mobilnom telefonu), manje je važno računanje "napamet", ali su dosjetke i snalažljivost u računanju vještine koje će uvijek biti na cijeni. Jedna je takva, osobito popularna dosjetka vezana uz ime njemačkog matematičara Carla Friedericha Gaussa (1777. – 1855.), često nazivanog *princeps mathematicorum* (lat. princem svih matematičara).

Kad je Gauss bio prvoškolac, njegov je učitelj zadao učenicima da izračunaju zbroj prvih 100 prirodnih brojeva. Želio ih je zaposliti na neko vrijeme kako bi imao malo mira, ali se nemalo iznenadio jer je već nakon minuti-dvije Gauss dojavio da ima rješenje.

Dobio ga je združivši brojeve u parove, prvi s posljednjim ($1 + 100$), drugi s pretposljednjim ($2 + 99$), treći s prepretposljednjim ($3 + 98$) itd. Takvih je parova 50, a zbroj dvaju pribrojnika u svakom je paru isti, iznosi 101. Konačan je rezultat $50 \cdot 101 = 5050$.

Opisani se Gaussov postupak može proširiti na zbroj ma koliko prvih prirodnih brojeva te se tako dobije:

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Provjeri ovu jednakost za neke brojeve n .

Na isti način možemo računati i zbroj prvih n parnih brojeva. No, kad već imamo izvedenu formulu za zbroj prvih n prirodnih brojeva, $S(n)$, možemo postupiti i na ovaj način:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1).$$

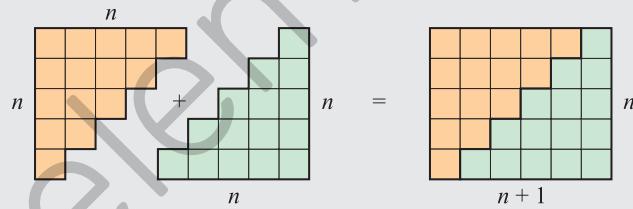
Riješi zadatke:

1. Izračunaj zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva.
2. Koliko je $1 + 4 + 7 + \dots + 100$?
3. Koliki je zbroj svih troznamenastih brojeva koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 3?
4. Zbroj prvih n prirodnih brojeva je 3003. Koliki je n ?
5. Broj $\frac{n(n+1)}{2}$ je prirodan broj za svaki prirodni broj n . Zašto? Kojom znamenkom može taj broj završavati? Postoji li takav n za koji je $1 + 2 + 3 + \dots + n = 5555$?

Bez rječi

Sljedeće sličice ilustriraju Gaussovnu dosjetku u geometrijskoj izvedbi. Možete li je protumačiti?

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



Zadatci 1.1.

1. 1) Zapiši prirodni broj koji neposredno slijedi iza prirodnog broja n .
 2) Zapiši prirodni broj koji neposredno prethodi prirodnom broju $n - 2$. Kad zadatak ima rješenje?
 3) Zapiši broj koji je za 2 veći od zbroja brojeva m i n .
 4) Zapiši broj koji je dvostruko veći od razlike brojeva a i b .
 5) Zapiši broj koji je tri puta manji od umnoška brojeva a i b .
2. Ispiši:
 - 1) sve cijele brojeve koji su između cijelih brojeva $k - 1$ i $k + 5$;
 - 2) sve neparne cijele brojeve koji su veći od $2k - 1$ i manji od $2k + 7$, gdje je k cijeli broj;
 - 3) sve parne cijele brojeve veće od $2k - 5$ i manje od $2k + 1$, gdje je k cijeli broj.
3. Marko je dvostruko stariji od Filipa, a Filip je 3 godine stariji od Luke. Ako je Luki n godina, koliko ukupno godina imaju sva trojica?
4. Zamisli neki broj. Dodaj mu 1 pa zbroj pomnoži s 4. Zatim oduzmi 4 pa dobiveni rezultat podijeli s 4. Koji je broj rezultat?
 Ponovi ovaj postupak nekoliko puta. Što primjećuješ? Obrazloži!
5. Neka je d dan, a m mjesec rođenja tvojeg prijatelja. Evo kako ćeš odrediti koji je dan njegov rođendan. Zadaj mu neka provede sljedeći račun:
 - Podvostruči broj d .
 - Pomnoži dobiveni rezultat s 10.
 - Dodaj 73.
 - Pomnoži s 5.
 - Dodaj broj m .
 Neka ti sada prijatelj kaže rezultat koji je dobio. Oduzmi krišom od tog rezultata broj 365 i dobit ćeš datum njegovog rođenja.
 Obrazloži matematičku pozadinu ovog općeg rješenja.
6. Neka tvoj prijatelj broj svojih godina starosti pomnoži s 4. Tom broju neka doda 10 pa rezultat pomnoži s 25. Neka potom od dobivenog rezultata oduzme broj dana u neprestupnoj godini.

Konačno, neka razlici doda iznos sitniša u lipama koji ima u svojem džepu (svakako neka je manji od 100). Nakon ovog računa zahtijevajte da vam kaže rezultat. Dodat ćemo tom rezultatu 115 i očitati: prve dvije znamenke su godine, a sljedeće dvije iznos sitniša u džepu vašeg prijatelja. Možete li razobličiti ovu "čaroliju"?

7. Na polici se nalazi šest svezaka *Opće enciklopédije*, poredanih slijeva u desno, jedan do drugog. Svaki svezak ima 515 stranica ne računajući korce.
 - 1) Koliko ukupno stranica ima *Opća enciklopédija*?
 - 2) Koliko stranica ima između 313. stranice drugog sveska i 127. stranice petog?
 - 3) Brojimo li stranice enciklopedije redom te izbrojimo 1784, u kojem svesku i na kojoj stranici smo se zaustavili?
 - 4) Brojimo li stranice enciklopedije redom, ali otraga prema naprijed te se zaustavimo na broju 3000, u kojem svesku i na kojoj stranici smo se zaustavili?
8. Među brojevima $1, 2, 3, \dots, 9$ odaberi dva međusobno različita broja. Ispiši sve dvoznamenkaste brojeve kojima su znamenke ti brojevi, te ih zbroji. Taj je zbroj uvijek djeljiv s 22. Zbog čega? Obrazloži! Možeš li provesti analogno zaključivanje za tri odabrana broja?
Napomena: Dvoznamenkast broj \overline{xy} zapisujemo u obliku $10x + y$. Jednako je tako $\overline{xyz} = 100x + 10y + z$.
9. Broj 100 zapiši povezujući računskim operacijama
 - 1) pet jedinica;
 - 2) pet trojki;
 - 3) pet petica.
10. Ispiši redom brojeve 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Poveži te brojeve znakovima + i - (koristeći ih ukupno triput) tako da dobiješ 100.
11. Zapiši broj 100 uporabom svih 10 znamenki i uporabom četiriju osnovnih računskih operacija.
12. Riješi rebus:

+	O H O H O
+	A H A H A H
	<hr/>
A H A H A H	

- 13.** Odredi četiri uzastopna prirodna broja kojima je zbroj jednak 1258.
- 14.** Zbroj pet uzastopnih parnih prirodnih brojeva jednak je 6080. Koji su to brojevi?
- 15.** Zbroj sedam uzastopnih neparnih prirodnih brojeva jednak je 581. Koliki je zbroj sedam narednih neparnih prirodnih brojeva?
- 16.** Umnožak triju uzastopnih prirodnih brojeva jednak je 4080. Koliki je zbroj tih triju brojeva?
- 17.** Koja je posljednja znamenka umnoška $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 99$?
- 18.** S koliko nula završava umnožak $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 33$?
- 19.** Koja je posljednja znamenka umnoška prvih stotinu prostih brojeva?
- 20.** Prepiši, pa umjesto kvadratiča upiši broj tako da dobiješ točne jednakosti:
- 1) $-11 + \square = -24$;
 - 2) $\square - (-45) = 13$;
 - 3) $23 + \square = -1$;
 - 4) $\square + (-17) = -34$;
 - 5) $33 - (-44) = \square$;
 - 6) $-75 - 28 = \square$;
 - 7) $-61 + \square = 77$;
 - 8) $\square - (-111) = -205$.

- 21.** Izračunaj:
- 1) $-5 \cdot (2 - 11) - 4 \cdot (3 - 12)$;
 - 2) $2 \cdot (-3) - 4 \cdot (-5) + (-6) \cdot (-7)$;
 - 3) $(-12) \cdot (-11) - (-10) \cdot (-15)$;
 - 4) $-12 \cdot (-3) - 5 \cdot 14 - 11$.
- 22.** Računamo: $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots$ Ako imamo konačan broj pribrojnika, recimo n , koliki je rezultat ovog zbrajanja?
- 23.** Najviša ikad izmjerena temperatura zraka na Zemlji zabilježena je u Libiji 13.9.1922. Iznosila je 57.8°C ili 136°F . Najniža je izmjerena na Antarktici (Vostok Station) 12.1.1983., kada je termometar pokazivao -89.2°C ili -128.6°F . Kolika je razlika između najniže i najviše temperature ikad izmjerene na Zemlji? U Hrvatskoj je do sada najviša izmjerena temperatura iznosila 42.8°C ili 109°F , a izmjerena je 5.8.1998. u Pločama. Najniža temperatura izmjerena je u Čakovcu 3.2.1929., a bilo je -35.5°C ili -31.5°F . Kolika je razlika između najviše i najniže izmjerene temperature u Hrvatskoj?
- 24.** Arhimed je živio od 287. g. pr. Kr. do 212. g. pr. Kr. To bismo jednostavnije mogli zapisati: Arhimed je živio od -287 do -212 g. Koliko je godina poživio Arhimed? Odgovori na isto pitanje za sljedeće matematičare:
Tales je živio od -620 do -540 godine.
Vitruvije je živio od -75 do 15 godine.
Heron je živio od 10 do 70 godine.



LEWIS CARROLL

Lewis Carroll, čuven po svojim knjigama o Alisi, pseudonim je Charlesa Dodgsona, engleskog matematičara, profesora na Christ Churchu, najvećem koledžu Sveučilišta u Oxfordu. Carroll je rado zabavljao svoje prijatelje raznim igrama s brojevima.

Evo jedne od njih:

Igru igraju dva igrača. Polazeći od broja 1 oni naizmjence dodaju prirodne brojeve po volji, ali svaki puta ne veći od 10. Pobjednik je onaj koji prvi dosegne broj 100. Kako treba igrati neki igrač kako bi pobijedio u ovoj igri?

U elektroničkom sadržaju možeš pokušati pobijediti računalno.



1.2. Racionalni brojevi

Zbroj i razlika svakih dvaju cijelih brojeva cijeli je broj. I umnožak svakih dvaju cijelih brojeva je cijeli broj. No količnik dvaju cijelih brojeva općenito nije cijeli broj. Skup cijelih brojeva nije zatvoren s obzirom na dijeljenje. Ta činjenica nameće potrebu za proširenjem skupa cijelih brojeva. Tako dobivamo skup **racionalnih brojeva**.

Racionalni su brojevi količnici cijelih brojeva. Možemo ih zapisivati u obliku razlomaka. Evo nekoliko primjera racionalnih brojeva:

$$1 : 2 = \frac{1}{2}, \quad -3 : 4 = \frac{-3}{4}, \quad 111 : 25 = \frac{111}{25}, \quad 7 : (-33) = \frac{7}{-33}.$$

Dijeljenje s nulom nije izvedivo pa u nazivniku razlomka ne smije biti nula.

Svaki je cijeli broj ujedno i racionalan. Obrazloži!

Skup racionalnih brojeva

Količnik $m : n$ dvaju cijelih brojeva m i n ($n \neq 0$) jest **racionalan broj**. Racionalan broj $m : n$ zapisujemo u obliku razlomka $\frac{m}{n}$. Broj m je brojnik, a broj n nazivnik razlomka.

Skup racionalnih brojeva označavamo s \mathbb{Q} .

Provedemo li razlomkom zadano dijeljenje cijelih brojeva, dobit ćemo racionalan broj zapisan u **decimalnom obliku**. Tako je primjerice

$$\frac{3}{10} = 0.3, \quad \frac{-17}{8} = -2.125, \quad \frac{315}{32} = 9.84375, \quad \frac{17}{-25} = -0.68.$$

Svi navedeni primjeri konačni su decimalni brojevi. Postoje i beskonačni decimalni racionalni brojevi;

$$\frac{3}{7} = 3 : 7 = 0.\overline{428571}$$



Valja uočiti kako se u decimalnom zapisu svakog od triju navedenih brojeva uzastopce ponavlja skupina znamenki. U prvom primjeru to su znamenke 428571, u drugom je to znamenka 3, a u trećem su to znamenke 90. Kažemo da su ovakvi brojevi **periodički**. Skupinu znamenki koja se uzastopce ponavlja zovemo **period**. Ovakve brojeve zapisujemo tako da navedemo sve znamenke jednog perioda,

a nad prvu i posljednju znamenku stavimo točku. To je, naravno, više načelno nego praktično izvedivo rješenje jer period može ponekad biti toliko velik da ga nema smisla navoditi. Brojeve koji su odabrani za primjere zapisujemo:

$$0.\dot{4}2857\ddot{1}, \quad 0.\dot{3}, \quad -0.\dot{9}\ddot{0}.$$



PONAVLJANJE SKUPINE ZNAMENAKA

Zbog čega pri decimalnom zapisu racionalnog broja dolazi do ponavljanja skupine znamenaka? Odgovor na ovo pitanje bit će sasvim jasan provedete li pisano dijeljenje (ne dijeljenje džepnim računalom ili bilo kakvim sličnim pomagalom) brojnika i nazivnika u danom razlomku:

$$\begin{array}{r} 26 : 111 = 0.234 \\ 260 \\ 380 \\ 470 \\ 26 \end{array}$$

U ovom trenutku došli smo do početne pozicije. Ako nastavimo dijeljenje, u količniku će se ponavljati niz znamenaka 234.



Primjer 1.

Koja je znamenka na 1001. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu broja $\frac{3}{7}$?

◆ Vidjeli smo da je $\frac{3}{7} = 0.\dot{4}2857\ddot{1}$, tj. uzastopce se ponavlja skupina od 6 znamenki.

Podijelimo li 1001 sa 6, dobit ćemo količnik 166 i ostatak 5. Stoga će se skupina od 6 navedenih znamenki izrediti 166 puta i potom će slijediti još pet znamenki. Zaključujemo da je 1001. po redu znamenka 7.

$$\frac{3}{7} = 0.\textcolor{red}{4}\textcolor{blue}{2}\textcolor{green}{8}\textcolor{red}{5}\textcolor{blue}{7}\textcolor{brown}{1}\textcolor{red}{4}\textcolor{blue}{2}\textcolor{green}{8}\textcolor{red}{5}\textcolor{blue}{7}\textcolor{brown}{1}\textcolor{red}{4}\textcolor{blue}{2}\textcolor{green}{8}\textcolor{red}{5}\textcolor{blue}{7}\textcolor{brown}{1}\dots$$

Zadatak 1.

Koja je znamenka u broju

$$0.123456789101112131415\dots$$

na 77. mjestu iza decimalne točke? Je li taj broj racionalan? Obrazloži!

Napiši program koji određuje znamenku na n -tom mjestu iza decimalne točke u zapisu istog ovog broja. Ograniči zadatok na prvih 1000 znamenki.

Riješi isti zadatok za broj $0.10110011100011110000\dots$

Jednakost racionalnih brojeva

Prirodno se nameće pitanje: Kad su dva racionalna broja (razlomka) jednakia?

Jednakost racionalnih brojeva

Racionalni brojevi (razlomci) $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ jednaki su ako i samo ako je umnožak $a \cdot d$ jednak umnošku $b \cdot c$:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \cdot d = b \cdot c$$

Primjer 2.

Obrazložimo jednakosti:

$$1) \frac{2}{3} = \frac{6}{9}; \quad 2) \frac{-45}{-108} = \frac{5}{12}; \quad 3) \frac{-4}{7} = \frac{-20}{35}.$$

1) $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, jer je $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$.

2) $\frac{-45}{-108} = \frac{5}{12}$, jer je $-45 \cdot 12 = 5 \cdot (-108)$.

3) $\frac{-4}{7} = \frac{-20}{35}$ jer je $(-4) \cdot 35 = (-20) \cdot 7$.

Zadatak 2.

Odredi broj x tako da vrijedi:

$$1) \frac{15}{x} = \frac{35}{42}; \quad 2) \frac{5}{12} = \frac{20}{x+1}; \quad 3) -\frac{3}{8} = \frac{12}{x}.$$

Primijetimo da vrijedi $\frac{-2}{5} = \frac{2}{-5}$ jer je $(-2) \cdot (-5) = 5 \cdot 2$. Za ova razlomka prihvaćen je zapis

$$\frac{-2}{5} = \frac{2}{-5} = -\frac{2}{5}.$$

Kraćenje i proširivanje razlomaka

Za svaki racionalni broj $\frac{a}{b}$ i svaki broj m različit od nule vrijedi:

$$\frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b}.$$

Ovu jednakost lako je provjeriti. Ona izravno slijedi iz definicije jednakosti razlomaka i svojstava množenja cijelih brojeva:

$$(a \cdot m) \cdot b = a \cdot (b \cdot m).$$

Proširivanje i kraćenje razlomka

proširivanje



$$\frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b}$$



kraćenje

Istaknutu jednakost možemo čitati dvostrano. Čitamo li je zdesna u lijevo, tada je riječ o **proširivanju razlomka**, a čitamo li je slijeva u desno, tada govorimo o **kraćenju razlomka**.

Primjer 3.

Svaki se racionalni broj može kraćenjem dovesti na oblik u kojem brojnik i nazivnik *nemaju zajedničkih djelitelja*.

$$\frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3}, \quad -\frac{21}{28} = -\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} = -\frac{3}{4}.$$

Od dvaju razlomaka, čiji su nazivnici jednaki prirodni brojevi, veći je onaj koji ima veći brojnik. Tako se proširivanje razlomaka može koristiti i za usporedbu razlomaka.

Primjer 4.

Koji je broj veći, $x = \frac{3}{8}$ ili $y = \frac{4}{11}$?

◆ Da bismo ih mogli usporediti, brojeve svodimo na zajednički nazivnik:

$$x = \frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 11}{8 \cdot 11} = \frac{33}{88}, \quad y = \frac{4}{11} = \frac{4 \cdot 8}{11 \cdot 8} = \frac{32}{88}.$$

Vidimo da je $x > y$.

Zadatak 3.

Poredaj po veličini brojeve: $\frac{4}{5}, \frac{14}{15}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{7}{10}, \frac{23}{30}$.

Operacije s racionalnim brojevima

Pri zbrajanju racionalnih brojeva razlomke svodimo na zajednički nazivnik. U tu svrhu možemo uzeti umnožak nazivnika kao zajednički nazivnik:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Računajući ovako uvekćemo dobiti ispravan rezultat, ali brojnik i nazivnik dobivenog razlomka vrlo često će se moći skratiti:

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{5 \cdot 8 + 3 \cdot 6}{6 \cdot 8} = \frac{58}{48} = \frac{29}{24}.$$

Jednostavniji se račun dobiva ako za zajednički nazivnik odaberemo *najmanji zajednički višekratnik* nazivnika. U ovom primjeru za zajednički nazivnik možemo uzeti $V(6, 8) = 24$:

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{5 \cdot 4 + 3 \cdot 3}{24} = \frac{29}{24}.$$

Oduzimanje racionalnih brojeva vršimo na analogan način.

Zbrajanje i oduzimanje racionalnih brojeva

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$$

Prisjetimo se još definicije umnoška i količnika racionalnih brojeva:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Posebno, primijetimo da vrijedi

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = 1.$$

Broj $\frac{b}{a}$ nazivamo **recipročnim brojem** broja $\frac{a}{b}$ i označavamo s

$$\frac{b}{a} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-1}.$$

Dakle, recipročni broj zadanoog racionalnog broja ima zamijenjen brojnik i nazivnik. Primijetimo da je

$$\frac{b}{a} = 1 : \frac{a}{b}.$$

Dijeljenje racionalnih brojeva zato se svodi na množenje recipročnim brojem:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Množenje i dijeljenje racionalnih brojeva

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Količnik dvaju razlomaka može se zapisati u obliku dvojnog razlomka:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Pritom a i d nazivamo vanjskim, a b i c unutarnjim članovima dvojnog razlomka. Ovo pamćimo kao pravilo: *razlomci se dijele tako da se prvi razlomak pomnoži recipročnim razlomkom drugog.*



Dvije su promjenjive veličine m i n **proporcionalne** ako je njihov omjer stalan broj k , $k \neq 0$. Dvije su promjenjive veličine **obrnuto proporcionalne** ako im je umnožak stalan broj.

Primjer 5.

Pri jednolikom pravocrtnom gibanju nekog tijela omjer prijeđenog puta (s) i vremena (t) stalan je broj. Taj je broj brzina (v) tijela.

Primjerice, ako se automobil kreće jednoliko brzinom 75 km/h, tada je omjer $\frac{s}{t} = 75$. Veličine s i t su proporcionalne, a broj 75 je konstanta proporcionalnosti.

Zadatak 4.

Brzina i vrijeme pri jednolikom pravocrtnom gibanju tijela obrnuto su proporcionalne veličine. Obrazloži. Jesu li vrijeme i put pri ovom gibanju proporcionalne ili obrnuto proporcionalne veličine? A brzina i put?

Primjer 6.

Opseg kruga promjera $2r$ jednak je $2r\pi$. Opseg kruga i njegov promjer proporcionalne su veličine. Konstanta proporcionalnosti je π .

Zadatak 5.

Dan je trokut površine P . Jesu li duljina stranice tog trokuta i duljina visine na tu stranicu proporcionalne ili su obrnuto proporcionalne veličine? Obrazloži.

Primjer 7.

Sjena dječaka visokog 1.2 m duga je 0.8 m. Koliko je visok čovjek čija je sjena duga 1.2 m?

- ◆ Omjer duljine visine (v) i sjene (s) jednak je $0.8 : 1.2$ i taj je omjer stalan. Tada treba biti

$$1.2 : x = 0.8 : 1.2 = 2 : 3.$$

Odatle je $x = 1.8$ m.

Primjer 8.

Za bojenje 10 m^2 zida potroši se 1 litra boje. Koliko se boje potroši za bojenje 18 m^2 zida?

- ◆ Za bojenje 1 m^2 potroši se 0.1 l, pa za 18 m^2 zida treba 1.8 litara boje.

Zadatak 6.

Tri radnika za 8 sati rada poprave neki kvar na vodovodnim instalacijama. Ako bi isti kvar otklanjala 4 radnika, koliko bi to trajalo?

Zadatak 7.

Fotografiju pravokutnog oblika dimenzija 9×13 želimo povećati tako da omjer duljina stranica ostane nepromijenjen, a da kraća stranica bude duga 15 cm. Kolika bi bila duljina dulje stranice?



ARITHMETIKA HORVATSKA – prvi udžbenik matematike na hrvatskom jeziku



Arithmetika horvatszka, svećenika Mihalja Šiloboda-Bolšića (Podgrađe pod Okićem 1724. – Sv. Nedelja 1787.), mali je priručnik pisani kajkavskim narječjem i tiskan u Zagrebu 1758. g. Od četiriju većih dijelova prva se tri bave brojevima i operacijama s njima dok četvrti sadrži praktične račune vezane uz trgovinu, dugovanja, troškove i sl. Knjižica je u puku bila vrlo popularna pa se u ono doba nevježi u računanju govorilo “neka se primi Šiloboda”, a ako je netko bio vješt u računu, pohvalili bi ga da “računa kao Šilobod”.

Knjižica je sadržavala i nekoliko zagonetki. Jednu od njih u izvornom obliku vidite na slici desno. Tu je odmah dano i rješenje. Pokušajte ovu zagonetku pročitati s razumijevanjem.

Od treb Zajczev.

D Vá Otczi, y dvá Szini vlovilisz negdà
trí zajczé, y vifzakogaje dopal jeden
zajecz. Povech: kák tó more biti ?

Moralje biti Otecž, Szin, y Szina Szín
tó jeszt vnuk. Tér tak dva Otczi, y dvá
szini, y vifzakomu jeden zajecz. Odkudà
velé diaki.

Dodajmo još kako je godine 1766. franjevac Mate Zoričić objavio svoju **Aritmetiku**, knjižicu vrlo sličnu Šilobodovoј. Obje aritmetike namijenjene su širokom puku koji je u računu bio potpuno neuk što je, kako piše Zoričić, glavno zlo i uzrok siromaštva i bijede u narodu.



Želiš li znati više o povijesti brojeva, pročitaj u elektroničkom dijelu udžbenika Povijesni kutak.



Zadatci 1.2.

1. Razlomke $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{15}{16}$ prikaži u obliku decimalnog broja.
2. Brojeve 0.5, 0.25, 0.125, 0.75, 0.625 prikaži u obliku razlomka.
3. Poredaj po veličini brojeve: $\frac{2}{3}$, 66 %, 0.666, 0. $\dot{6}$.
4. Ako je $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$, koliko je $\frac{1}{30}$?
Ako je $\frac{2}{7} = 0.\dot{2}8571\dot{4}$, koliko je $2\frac{6}{7}$?
5. Odredi period u decimalnom zapisu racionalnog broja:
1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{3}{11}$; 3) $\frac{5}{13}$; 4) $\frac{6}{7}$.
6. Koja se znamenka nalazi na 101. mjestu iza decimalne točke u decimalnom zapisu svakog od četiriju brojeva iz prethodnog zadatka?
7. Odredi 303. znamenku u dec. zapisu broja $\frac{15}{37}$.
8. Odredi 777. znamenku u dec. zapisu broja $-\frac{111}{11}$.
9. Odredi 1500. znamenku u dec. zapisu broja $\frac{3}{13}$.
10. Za koje su cijele brojeve a brojevi $\frac{1}{a}$, $\frac{a+2}{a(a-3)}$, $\frac{a}{2a-10}$, $\frac{a+2}{a^2-4}$ racionalni?
11. Odredi sve cijele brojeve n za koje je razlomak $\frac{6}{n+1}$ cijeli broj.
12. Za koje je cijele brojeve n razlomak $\frac{6}{n-1}$ cijeli broj?
13. Odredi sve cijele brojeve n za koje je razlomak $\frac{n+2}{n-2}$ cijeli broj.
14. Odredi prirodni broj x tako da vrijede jednakosti:
1) $\frac{x}{12} = \frac{2}{3}$; 2) $\frac{4}{x} = \frac{2}{5}$; 3) $\frac{3}{7} = \frac{x}{21}$.

15. Za koji cijeli broj x vrijedi:
1) $\frac{1}{5} = \frac{x}{20}$; 2) $\frac{x}{6} = -\frac{1}{3}$; 3) $-\frac{x}{24} = \frac{5}{6}$?
16. Za koji je broj x ispunjena jednakost $\frac{9+x}{15+x} = \frac{2}{3}$?
17. Za koji je broj x ispunjena jednakost $\frac{123-x}{101+x} = \frac{5}{9}$?
18. Ako od brojnika i nazivnika razlomka $\frac{15}{32}$ oduzmemmo isti broj x , dobit ćemo razlomak $\frac{4}{21}$. Koliki je x ?
19. Ako brojniku razlomka $\frac{113}{212}$ dodamo neki broj, a isti taj broj oduzmemmo od nazivnika, dobit ćemo razlomak $\frac{2}{3}$. O kojem se broju radi?
20. Skrati razlomke:
1) $\frac{105}{168}$; 2) $\frac{1155}{5775}$; 3) $\frac{6930}{12\,870}$;
4) $\frac{3\,333\,333}{5\,555\,555}$; 5) $\frac{135\,135}{234\,234}$.
21. Poredaj po veličini brojeve:
1) $\frac{3}{4}, \frac{11}{12}, \frac{19}{24}, \frac{17}{18}, \frac{67}{72}$;
2) $\frac{3}{4}, 0.\dot{7}, \frac{13}{16}, 0.7, \frac{29}{32}$;
3) $-\frac{3}{4}, -\frac{11}{12}, -\frac{19}{24}, -\frac{17}{18}, -\frac{67}{72}$.
22. Ako je $a = 0.\dot{3}$, $b = 0.25$, koliko je $\frac{1}{a}$, a^2 , $a+b$, $a \cdot b$, $\frac{a}{b}$?
23. Ako je $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$, $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} = 5$, koliko je $a+b+c$?
24. Primjenjujući jednakost $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n \cdot (n+1)}$ izračunaj:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}.$$