6 Uređaj na skupu realnih brojeva

Što ću naučiti?

- opisati relaciju nejednakosti u skupu realnih brojeva te uz ilustraciju primjerima navesti osnovna svojstva nejednakosti
- primjenjivati svojstva nejednakosti pri rješavanju linearnih nejednadžbi
- zapisivati rješenja nejednadžbi i sustava nejednadžbi s pomoću intervala
- opisati smisao uvođenja apsolutne vrijednosti uz potkrepu primjerima
- nacrtati graf apsolutne vrijednosti te na grafu opisati svojstva te funkcije

Dodatni sadržaji

Pripremi se za gradivo koje slijedi, riješi pripremne zadatke koji se nalaze u elektroničkom dijelu udžbenika.

- *Temperatura zraka danas će biti između* $14\,°C$ *i* $15\,°C$.
- *Dnevno valja popiti najmanje 2 litre tekućine.*
- *Petar ne može izdvojiti više od 50 kn za poklon Luciji.*
- *Taj će nas izlet stajat najmanje 200 kn.*

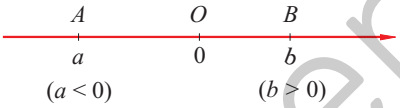
Često se mogu čuti ovakve i slične rečenice. Njima se iskazuju izvjesne usporedbe, neka ograničenja. Često se pitamo je li nešto od nečega kraće ili dulje, veće ili manje, teže ili lakše. Upravo je cilj ovog poglavlja baviti se problemima nejednakosti i nejednadžbi.

6.1. Svojstva relacije uređaja

Uspoređivanje veličina svakodnevna je potreba. Posebice je često uspoređivanje brojeva s nulom. Nula je na temperaturnoj ljestvici granica podnošljive hladnoće, nula je znak alarma u poslovanju, nula je visina morske površine itd. Za brojeve koji su manji od nule kažemo da su **negativni**, brojevi veći od nule su **pozitivni**.

Na brojevnom pravcu ishodište je točka koja odvaja negativne i pozitivne realne brojeve. Njoj je pridružen broj 0. Točki A s lijeve strane ishodišta pridružen je negativan broj a. Za njega kažemo da je *manji od nule* i pišemo $a < 0$.

Točki B zdesna ishodištu pridružen je pozitivan broj b. Za njega kažemo da je *veći od nule* i pišemo $b > 0$.



Ako je broj a na brojevnom pravcu smješten lijevo od broja b, onda je broj a **manji** od broja b, što zapisujemo kao $a < b$.

Isto značenje ima i nejednakost $b > a$, koju čitamo "b je veći od a". Dakle, pišemo $a < b$ ili $b > a$. Relacija $<$ naziva se **relacija uređaja**. (Znak $>$ je druga oznaka za relaciju uređaja.)

Usporedivost realnih brojeva

Za svaka dva realna broja vrijedi ili $a < b$ ili $a > b$ ili $a = b$.

Što općenito znači kad kažemo da je neki broj a manji od nekog broja b?

Uspoređivanje brojeva

Broj a manji je od broja b ako i samo ako je $a - b < 0$.

Ovoj definiciji ekvivalentna je sljedeća definicija:

Broj a manji je od broja b onda i samo onda ako postoji pozitivan broj k za koji je $a + k = b$.

Primjerice, broj 7 manji je od broja 12 jer je $12 - 7 = 5 > 0$. Broju 7 valja dodati 5 kako bi se dobilo 12.

Broj -111 manji je od broja -99, jer je $-99 - (-111) = 12 > 0$. Broju -111 treba dodati 12 da bi se dobio broj -99.

Broj -0.42 veći je od broja -0.815 jer je

$$-0.42 - (-0.815) = 0.395 > 0.$$

Ili: broj -0.815 manji je od broja -0.42 jer broju -0.815 treba dodati pozitivan broj 0.395 kako bi se dobio -0.42.

Zadatak 1. Obrazloži sljedeće nejednakosti:

1) $123 < 223$; **2)** $-1.25 < -1.24$; **3)** $-0.07 < 1$.

Lako je uspoređivati prirodne i cijele brojeve. Odgovor na pitanje koji je od takvih dvaju brojeva veći možemo dati trenutno, to je odmah jasno iz njihova zapisa. Nije teško provesti niti usporedbu dvaju racionalnih brojeva. Prisjetimo se kako smo uspoređivali dva racionalna broja zapisana u obliku razlomka:

Primjer 1. Koji je broj veći, $\frac{7}{18}$ ili $\frac{5}{12}$?

Jedan od načina da utvrdimo koji je broj veći jest da te razlomke proširimo tako da imaju jednake nazivnike pa je veći onaj koji ima veći brojnik:

$$\frac{7}{18} = \frac{7 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{14}{36}, \qquad \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{15}{36}.$$

Očito je prvi od dvaju danih razlomaka manji, jer je $14 < 15$.

Neka su $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ razlomci s pozitivnim nazivnicima ($b > 0$ i $d > 0$) i pretpostavimo da vrijedi $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. Tada možemo pisati $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} > 0$ pa

zaključujemo: Kako je $bd > 0$, onda je i $ad - bc > 0$, odnosno $ad > bc$. Dakle, nejednakost $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, gdje je $b > 0$ i $d > 0$, ekvivalentna je nejednakosti $ad - bc > 0$.

Uspoređivanje racionalnih brojeva

Ako su racionalni brojevi $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ napisani u standardnom obliku (s pozitivnim nazivnicima), tada vrijedi

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \iff ad > bc.$$

U prethodnom primjeru je $\frac{5}{12} > \frac{7}{18}$ jer je $5 \cdot 18 > 7 \cdot 12$.

Zadatak 2. Koji je broj veći:

1) $\frac{13}{15}$ ili $\frac{7}{8}$; **2)** $-\frac{17}{24}$ ili $-\frac{21}{32}$; **3)** $-\frac{22}{7}$ ili $-\pi$?

Svojstva relacije uređaja

Nejednakosti među brojevima imaju neka važna svojstva koja ćemo izreći u obliku poučaka.

Tranzitivnost relacije uređaja

Ako su a, b i c realni brojevi, onda iz $a < b$ i $b < c$ slijedi $a < c$.

Dokažimo ovo svojstvo.

Iz $a < b$ slijedi da postoji pozitivan broj m takav da je $a + m = b$.

Iz $b < c$ slijedi da postoji pozitivan broj n takav da je $b + n = c$.

Zbrojimo li dvije dobivene jednakosti, imat ćemo: $a + b + m + n = b + c$, odnosno $a + (m + n) = c$, gdje je $m + n$ pozitivan broj. Slijedi $a < c$.

Usklađenost relacije uređaja sa zbrajanjem

Neka su a i b realni brojevi. Tada je $a < b$ onda i samo onda ako je $a + c < b + c$, za svaki realni broj c.

Kažemo još: dodamo li na obje strane nejednakosti isti broj, znak nejednakosti neće se promijeniti.

Iz $a < b$ slijedi da postoji pozitivan broj p takav da je $a + p = b$.

Dodamo li na obje strane ove jednakosti broj c, jednakost se neće promijeniti: $a + p + c = b + c$, odnosno $(a + c) + p = b + c$, što znači da je $a + c < b + c$.

Time smo pokazali da iz $a < b$ slijedi $a + c < b + c$. Tu c može biti bilo koji realni broj.

Obratno, dodavanjem broja $-c$ na obje strane nejednakosti $a + c < b + c$ dobit ćemo $a + c + (-c) < b + c + (-c)$, tj. $a < b$.

Ovim je ovo svojstvo relacije uređaja dokazano.

No, kako općenito na nejednakost djeluje njezino množenje nekim realnim brojem različitim od nule? O tome govori sljedeći poučak.

Usklađenost relacije uređaja s množenjem

Neka su a i b realni brojevi takvi da je $a < b$. Ako je

1) $c > 0$, onda je $ac < bc$;

2) $c < 0$, onda je $ac > bc$.

Kažemo još: pomnožimo li nejednakost dvaju realnih brojeva pozitivnim brojem, znak nejednakosti neće se promijeniti; pomnožimo li je negativnim brojem, znak nejednakosti će se promijeniti.

Dokažimo ovo svojstvo.

1) Iz $a < b$ slijedi da postoji pozitivan broj p takav da je $a+p = b$. Pomnožimo ovu jednakost pozitivnim brojem c. Tada je $ac + pc = bc$. Kako je $pc > 0$, slijedi da je i $ac < bc$.

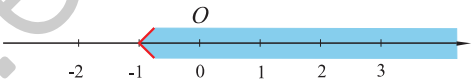
2) Iz $a < b$ slijedi da postoji pozitivan broj p takav da je $a + p = b$. Pomnožimo ovu jednakost negativnim brojem c. Tada je $ac + pc = bc$, odnosno $ac = bc + p(-c)$. No kako je $p(-c) > 0$, onda je $ac > bc$.

Intervali

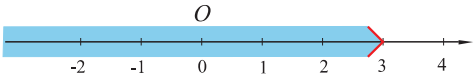
Nejednakostima kao što su $x < a$, $x > b$, $c < x < d$ i sličnim određeni su podskupovi skupa realnih brojeva. Takve podskupove zovemo **intervali**.

Skup realnih brojeva x takvih da je $x > a$ jest interval i zapisujemo ga kao $\langle a, +\infty \rangle$. Zapis $+\infty$ ne predstavlja broj, već *simbol*. Koristimo ga da naglasimo da interval sadrži sve brojeve veće od a.

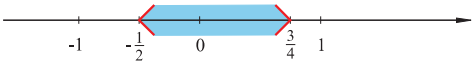
Tako je, primjerice, $\langle -1, +\infty \rangle$ skup svih realnih brojeva većih od -1. Taj interval zorno prikazujemo na brojevnom pravcu tako da iscrtamo onaj dio pravca kojem pripadaju sve točke $T(x)$ za koje je $x > -1$.



Zapisom $\langle -\infty, 3 \rangle$ zadan je interval, skup svih realnih brojeva x, $x < 3$.



Interval $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right\rangle$ sadrži sve realne brojeve x za koje vrijedi $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$.

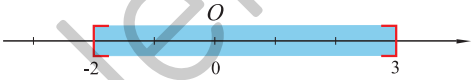


U svim trima navedenim primjerima rubovi intervala ne pripadaju intervalu. Tako u skupu $\langle -1, +\infty \rangle$ nije broj -1, već samo brojevi veći od -1. Intervalu $\langle -\infty, 3 \rangle$ ne pripada broj 3, niti su u skupu $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \right\rangle$ brojevi $-\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{4}$. Za ovakve intervale kažemo da su **otvoreni**.

Uz relaciju uređaja $<$ mi ćemo rabiti i relaciju uređaja $\leqslant$ (**manje ili jednako**), $a \leqslant b$ onda i samo onda ako je $a < b$ ili $a = b$.

Tom relacijom bilježimo slučaj kada i rub intervala pripada intervalu. To u zapisu intervala naznačujemo uglatom zagradom.

Primjerice, s $[-2, 3]$ zapisan je skup realnih brojeva x, $-2 \leqslant x \leqslant 3$, dakle njemu pripadaju oba ruba. Za takav interval kažemo da je **zatvoren**.



S $[-2, 3\rangle$ zapisan je skup realnih brojeva x, $-2 \leqslant x < 3$, dakle njemu pripada samo lijevi rub, broj -2, ali ne i desni, broj 3. Za takav interval kažemo da je **poluotvoren**. Poluotvoren je i interval oblika $\langle -2, 3]$.

Primjer 2.

S $[0, +\infty\rangle$ zapisan je skup svih pozitivnih realnih brojeva uključujući nulu;

S $\langle -\infty, 0\rangle$ zapisan je skup svih negativnih brojeva.

S $[a, b]$, uz uvjet da je $a < b$ zapisan je skup svih realnih brojeva koji su veći od ili jednaki a i manji od ili jednaki b.

Zadatak 3. Zapiši odgovarajućim oznakama za intervale sljedeće skupove realnih brojeva:

1) skup svih brojeva x većih od -1 i manjih od 3;

2) skup svih brojeva x manjih od 1 ili većih od $\frac{3}{2}$;

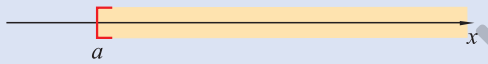
3) skup svih brojeva x koji su manji od $-\frac{3}{4}$;

4) skup svih brojeva x koji su manji od ili jednaki $\frac{1}{2}$ ili veći od ili jednaki 3.

INTERVALI

$x > a$ pišemo kao $x \in \langle a, +\infty\rangle$;

$x \geqslant a$ pišemo kao $x \in [a, +\infty\rangle$;



$x < a$ pišemo kao $x \in \langle -\infty, a\rangle$;

$x \leqslant a$ pišemo kao $x \in \langle -\infty, a]$;

$a < x < b$ pišemo kao $x \in \langle a, b\rangle$;

$a \leqslant x \leqslant b$ pišemo kao $x \in [a, b]$;

$a \leqslant x < b$ pišemo kao $x \in [a, b\rangle$;

$a < x \leqslant b$ pišemo kao $x \in \langle a, b]$.

Zadatci 6.1.

1. Koji je broj veći:

1) π ili $\frac{24}{7}$; **2)** $\sqrt{2}$ ili 1.414?

2. Usporedi brojeve m i n ako je:

1) $m+3=n$; **2)** $m-n=-5$;
3) $m-10=n$.

3. Usporedi brojeve n i p, p i q te m i q, ako je $m>p$, $n>m$, $n<q$.

4. Vrijedi li tvrdnja:

1) ako je $a>b$, onda je $a^2>b^2$;
2) ako je $a^2>b^2$, onda je $a>b$;
3) ako je $a^3>b^3$, onda je $a>b$;
4) ako je $a>b$, onda je $a^n>b^n$, za svaki prirodni n;
5) ako je $a>b$ i $c>d$, onda je $ac>bd$?

5. Što možeš kazati o brojevima a i b ako je:

1) $ab>0$; **2)** $\frac{a}{b}\geqslant 0$;
3) $ab\leqslant 0$; **4)** $\frac{a}{b}<0$?

6. Provjeri jesu li istinite sljedeće tvrdnje:

1) ako je $a>b$, onda je $(a+1)b<a(b+1)$;
2) ako je $a>b$, onda je $(a+1)(b-1)<ab$.

7. Dokaži tvrdnju: za svaki broj a, $-1<a<0$ vrijedi $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a}>2$.

8. Zapiši odgovarajućim oznakama za intervale podskupove skupa realnih brojeva što su zadani sljedećim nejednakostima:

1) $x\leqslant -\frac{3}{2}$; **2)** $x>3.5$;
3) $-5<x\leqslant 0$; **4)** $x\geqslant -\sqrt{3}$;
5) $-\frac{3}{4}\leqslant x\leqslant 11$; **6)** $x<-2\sqrt{2}$.

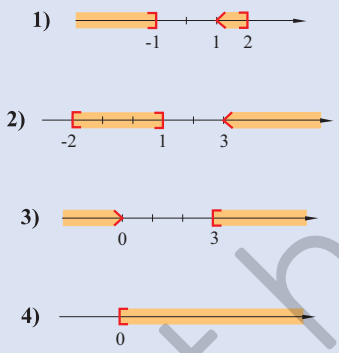
9. Naznači na brojevnom pravcu skupove točaka $T(x)$ ako za x vrijedi sljedeći uvjet:

1) $-1\leqslant x<3$; **2)** $x<-1$ ili $x\geqslant 2$;
3) $x\geqslant -1$ i $x<3$; **4)** $x<-3$ i $x>1$.

10. Zapiši odgovarajućim oznakama za intervale sljedeće skupove realnih brojeva:

1) skup svih brojeva x većih od -1 i manjih od 3;
2) skup svih brojeva x manjih od 1 ili većih od $\frac{3}{2}$;
3) skup svih brojeva x koji su manji od $-\frac{3}{4}$;
4) skup svih brojeva x koji su manji od ili jednaki $\frac{1}{2}$ ili veći od ili jednaki 3;
5) skup svih brojeva x većih ili jednakih -1.1;
6) skup svih brojeva x koji su manji ili jednaki 2, i veći od ili jednaki $\sqrt{5}$.

11. Zapiši uobičajenim oznakama intervale koji su istaknuti na sljedećim crtežima:



12. Odredi skupove $A\cup B$ i $A\cap B$ ako su A i B intervali realnih brojeva:

1) $A=\langle -1,2]$, $B=\langle 0,3]$;
2) $A=\langle -3,5\rangle$, $B=[0,+\infty\rangle$;
3) $A=\langle -\infty,1]$, $B=[-1,+\infty\rangle$;
4) $A=\langle -\infty,-2\rangle$, $B=[0,2]$;
5) $A=\langle -\infty,5\rangle$, $B=[-5,1\rangle$;
6) $A=\left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$, $B=[-2,2]$;
7) $A=[-3,5\rangle$, $B=[0,7]$;
8) $A=\langle 1,5\rangle$, $B=\langle 0,4]$.

6.2. Linearne nejednadžbe

Linearna nejednadžba s nepoznanicom x je nejednadžba koja se može svesti na oblik $ax < b$ ili $ax \leqslant b$, gdje su a i b realni brojevi te $a \neq 0$. Nejednakosti mogu biti i suprotnog znaka: $ax > b$ ili $ax \geqslant b$. Riješiti tu nejednadžbu znači odrediti skup svih realnih brojeva x za koje je $ax < b$ točna nejednakost brojeva.

Pri rješavanju linearnih nejednadžbi primjenjujemo svojstva relacije uređaja.

Primjer 1. Riješimo nejednadžbu: $-3x + 5 < \frac{1}{2}$.

Najprije je $-3x < -\frac{9}{2}$. Nakon množenja nejednadžbe brojem $-\frac{1}{3}$ okreće se znak nejednakosti (zašto?) te dolazimo do rješenja zadatka: $x > \frac{3}{2}$.

Dakle, rješenje zadane nejednadžbe je svaki realni broj x koji je veći od $\frac{3}{2}$. Stoga govorimo o skupu rješenja nejednadžbe što zapisujemo u obliku $x \in \left\langle \frac{3}{2}, +\infty \right\rangle$. Čitamo: rješenje nejednadžbe $-3x + 5 < \frac{1}{2}$ je svaki realni broj x iz intervala $\left\langle \frac{3}{2}, +\infty \right\rangle$.

Zadatak 1. Riješi nejednadžbe:

1) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2} \geqslant 2x$; **2)** $0.4 - x \leqslant 1\frac{3}{4}$.

Primjer 2. Riješimo nejednadžbu $\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)^2 \geqslant 1\frac{1}{3}$.

S lijeve strane nejednadžbe nalazi se razlika kvadrata. Zato imamo:

$$\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3} - \frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3} + \frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right) \geqslant \frac{4}{3},$$

te slijedi

$$-\left(x - \frac{1}{3}\right) \geqslant \frac{4}{3}.$$

Odatle je $-x + \frac{1}{3} \geqslant \frac{4}{3}$, i konačno $x \leqslant -1$.

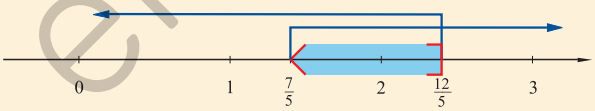
Rješenje zadane nejednadžbe je svaki realni broj x, $x \in \langle -\infty, -1]$. Skupu rješenja pripada i desni *rub* intervala, broj -1. Zašto?

Primjer 3. Riješimo sustav nejednadžbi

$$\frac{4x-2}{5} - 0.3 > \frac{3x}{10} \quad \text{i} \quad \frac{4-x}{2} \geqslant \frac{x}{3}.$$

Riješiti sustav dviju nejednadžbi znači naći sva zajednička rješenja obiju nejednadžbi, odnosno sve realne brojeve koji su rješenja i jedne i druge nejednadžbe.

Rješenje prve nejednadžbe je svaki realni broj $x, x > \frac{7}{5}$, a druge svaki realni broj x, $x \leqslant \frac{12}{5}$.

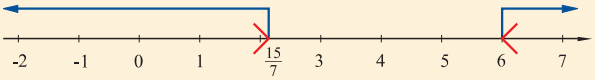


Rješenje sustava je presjek intervala $\langle -\infty, \frac{12}{5}] \cap \langle \frac{7}{5}, +\infty\rangle = \langle \frac{7}{5}, \frac{12}{5}]$.

Primjer 4. Riješimo sustav nejednadžbi

$$\frac{2}{3}x - 1 < 0.2x \quad \text{i} \quad \frac{x-1}{5} + 2 < \frac{x}{2}.$$

Svaki x, $x < \frac{15}{7}$, rješenje je prve nejednadžbe, a rješenje druge je svaki x, $x > 6$.



Presjek dvaju intervala $\langle -\infty, \frac{15}{7}\rangle \cap \langle 6, +\infty\rangle$ rješenje je sustava nejednadžbi. No ta dva intervala nemaju presjeka, nijedan broj ne pripada i jednom i drugom intervalu. Kažemo da je njihov presjek **prazan**.

Zaključujemo da dani sustav nejednadžbi nema rješenja.

Primjer 5. Riješimo sustav nejednadžbi

$$\frac{3x-1}{3} - 6 < \frac{2x-1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{2x-1}{3} - 6 \geqslant \frac{3x-1}{2}.$$

Rješavanjem prve nejednadžbe dobit će se nejednakost $-38 < -3$. Ta je nejednakost točna bez obzira koji broj uvrstili umjesto x. No onda je rješenje druge nejednadžbe, interval $\langle -\infty, -7]$, ujedno i rješenje sustava.

Zadatak 2. Riješi sustave nejednadžbi:

1) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - 0.2 > 1\frac{1}{2}, \\ 2x + 1.5 < \frac{1}{3}x; \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x - 0.2 \leqslant \frac{1-x}{3}, \\ x + 0.2 \geqslant \frac{1+x}{3}. \end{cases}$

Primjer 6. Riješimo nejednadžbu $\dfrac{3x+2}{-x^2+6x-9} \leqslant 0$.

Zapišimo nejednadžbu u obliku $\dfrac{3x+2}{-(x-3)^2} \leqslant 0$. Kako je $(x-3)^2 \geqslant 0$ za svaki realni broj x, dana je nejednadžba ekvivalentna nejednadžbi $3x+2 \geqslant 0$, uz uvjet $x \neq 3$.

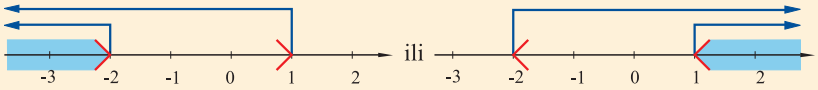
Zato je rješenje nejednadžbe svaki realni broj x iz intervala $[-\frac{2}{3}, +\infty\rangle$, ali bez broja 3, dakle $x \in [-\frac{2}{3}, +\infty\rangle \setminus \{3\}$.

Primjer 7. Riješimo nejednadžbu $(x-1)(x+2) > 0$.

Valja odrediti sve brojeve x za koje je umnožak $(x-1)(x+2)$ pozitivan broj. Umnožak dvaju brojeva je pozitivan onda i samo onda ako su ti brojevi istog predznaka, dakle ako je

$$a)\ \begin{cases} x-1<0, \\ x+2<0, \end{cases} \quad \text{ili} \quad b)\ \begin{cases} x-1>0, \\ x+2>0. \end{cases}$$

Rješenje sustava $a)$ je $\langle -\infty, -2\rangle$, a rješenje sustava $b)$ je interval $\langle 1, +\infty\rangle$.



Rješenje nejednadžbe je unija ovih skupova: $\langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$.

Primjer 8. Riješimo nejednadžbu $\dfrac{2x+3}{3x-4} \leqslant 0$.

Ovaj je zadatak sličan prethodnom. Naime, količnik dvaju brojeva negativan je broj ako su brojevi koji se dijele suprotnog predznaka. K tome još nazivnik razlomka mora biti različit od nule.

Rješavanje zadatka svodi se na rješavanje dvaju sustava:

$$a)\ \begin{cases} 2x+3 \geqslant 0, \\ 3x-4<0, \end{cases} \quad \text{ili} \quad b)\ \begin{cases} 2x+3 \leqslant 0, \\ 3x-4>0. \end{cases}$$

Rješenje prvog sustava je interval $[-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\rangle$, a drugi sustav nema rješenja.

Rješenje nejednadžbe je svaki realni broj x, $x \in [-\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\rangle$.

Zadatak 3. Riješi nejednadžbe:

1) $(x-0.1)\cdot(x-0.2) \geqslant 0$; **2)** $\dfrac{x+\sqrt{2}}{x-\sqrt{3}} < 0$.

Primjer 9. Riješimo nejednadžbu $\dfrac{2}{x-3} \geqslant 1$.

Rado bismo nejednadžbu pomnožili s $(x-3)$, kao što to radimo pri rješavanju jednadžbi. Time bismo dobili nejednadžbu

$$2 \geqslant x-3$$

s rješenjem $x \leqslant 5$, ali ona *nije ekvivalentna* početnoj nejednadžbi, njihovi se skupovi rješenja razlikuju.

Naime, pri množenju nejednakosti nekim brojem moramo znati kakvog je predznaka taj broj. Ako je on negativan, promijenit će se znak nejednakosti. Da ne bismo morali posebno promatrati slučajeve kad je $x-3$ pozitivan, odnosno negativan, radije ćemo nejednadžbu prevesti u onu u kojoj je desna strana jednaka nuli:

$$\frac{2}{x-3} - 1 \geqslant 0$$

odnosno

$$\frac{5-x}{x-3} \geqslant 0.$$

Dalje postupamo kao u primjeru 8, te dobijemo $3 < x \leqslant 5$.

Zadatak 4. Riješi nejednadžbe:

1) $\dfrac{2x-1}{3x+5} \leqslant 0$; **2)** $\dfrac{x+1}{3-2x} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Primjer 10. Riješimo nejednadžbu $\dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)} \leqslant 0$.

Nejednadžba je ekvivalentna uniji dvaju sustava nejednadžbi.

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ (x-2)(x-3) < 0, \end{cases} \quad \text{ili} \quad \begin{cases} x-1 \leqslant 0, \\ (x-2)(x-3) > 0. \end{cases}$$

Četiri su mogućnosti:

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ x-2 > 0, \\ x-3 < 0, \end{cases} \quad \text{ili} \quad \begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ x-2 < 0, \\ x-3 > 0, \end{cases} \quad \text{ili}$$

$$\begin{cases} x-1 \leqslant 0, \\ x-2 > 0, \\ x-3 > 0, \end{cases} \quad \text{ili} \quad \begin{cases} x-1 \leqslant 0, \\ x-2 < 0, \\ x-3 < 0. \end{cases}$$

Rješenje zadatka je unija intervala: $\langle -\infty, 1] \cup \langle 2, 3\rangle$.

Zadatak 5. Riješi nejednadžbu $(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3) > 0$.

Zadatci 6.2.

Riješi nejednadžbe:

1. **1)** $-\frac{1}{2}x+2 \geqslant \frac{1}{3}$; **2)** $2x+\frac{3}{4} < -\frac{1}{3}$;

3) $\frac{2}{3}x-1 > \frac{3}{4}$; **4)** $-3x-\frac{2}{3} \leqslant 1$;

5) $-\frac{2}{3}x-1 \geqslant 1\frac{1}{4}$.

2. **1)** $\frac{2x}{3}-[1-3(2-x)] > \frac{3x-1}{4}$;

2) $x-\frac{1}{2}\left[\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{3}\right)\right] \geqslant x-\frac{x-7}{12}$;

3) $\frac{x+1}{4}-3\left[\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] \leqslant 1-\frac{x-6}{6}$.

3. **1)** $1-\frac{2x+1}{3} < \frac{x}{2}-\frac{x-3}{6}$;

2) $\frac{x+1}{4}-\frac{x-1}{3} \geqslant x-\frac{2x+1}{6}$;

3) $\frac{3-2x}{4}-1 > \frac{x}{3}-\frac{5x+1}{6}$;

4) $2x-\frac{2x-3}{3} \leqslant \frac{3x+1}{4}-\frac{x+3}{6}$;

5) $\frac{2x-1}{3}-\frac{3x+1}{4} < 1-\frac{x}{12}$;

6) $\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{3}-\frac{x-3}{4} < 1-\frac{x-4}{8}$.

4. **1)** $\frac{(2x-1)^2}{4}-\frac{(3x-1)(3x+1)}{9} < \frac{1}{3}-\frac{2x+3}{12}$;

2) $\left(\frac{1}{3}-2x\right)\cdot\left(\frac{1}{3}+2x\right) > x-\frac{(4x+3)^2}{4}$;

3) $(x-2)^3-(x+2)^3 < 2(1-2x)(1+3x)$;

4) $\frac{(x+1)^3}{2}-\frac{(2x-1)^3}{16} < \frac{(3x+1)^2}{4}$.

5. Odredi najveći cijeli broj koji je rješenje nejednadžbe $\frac{1}{4}(2x+1)-0.2(3x+1) > -\frac{1}{3}$.

6. Odredi najmanji cijeli broj koji je rješenje nejednadžbe $49.4-\frac{27-x}{10} < 47.4-\frac{27-9x}{10}$.

7. Uvjeri se da je svaki realni broj x rješenje nejednadžbe $3.5(x+1) > 4x-\frac{x-1}{2}$.

8. Nejednadžba $\frac{x-1}{2}-1.2 > \frac{2x-1}{5}+\frac{x}{10}$ nema rješenja. Provjeri ovu tvrdnju.

9. Za koje je vrijednosti realnog broja m rješenje jednadžbe $mx+3x=5$ pozitivan broj?

10. Za koje je vrijednosti realnog broja m rješenje jednadžbe $\frac{mx}{2}-3=2(x-m)$ negativan broj?

11. Za koje vrijednosti realnog broja m rješenje jednadžbe $\frac{mx+1}{2}-\frac{x+1}{3}=1-\frac{m-x}{6}$ pripada intervalu $\langle -1, 1\rangle$?

12. **Marko kupuje računalo**

Marko namjerava kupiti prijenosno računalo i pritom raspolaže s 3 600 kn gotovine. Na cijene izložene u trgovini zaračunava se porez na dodanu vrijednost (PDV) u iznosu od 25 %, a ako se plaća u gotovini, cijena s pridodanim PDV-om umanjuje se za 10 %.

1) Može li Marko kupiti prijenosno računalo na slici?

2) Može li Marko kupiti i skuplje računalo? Koliku najvišu cijenu (bez PDV-a i popusta) može "podnijeti" njegov džep?

3) Koliko se na tu najvišu cijenu zaračunava PDV, a koliki je popust za gotovinu?