ELEMENTI GEOMETRIJE

Prva knjiga

DEFINICIJE

I. Svako tijelo u beskonačnom prostoru zauzima određeno mjesto koje se naziva *volumen*.

II. *Površina* tijela je granica koja ga razdvaja od prostora što ga okružuje.

III. Mjesto gdje se susreću površine dvaju tijela zove se *linija* (crta, krivulja)

IV. *Točka* je mjesto gdje se sijeku dvije linije.

V. Spoznajemo volumen, površine i krivulje nezavisno od tijela kojima pripadaju.

VI. Imenujemo slike za volumene, za površine i za linije.

VII. *Geometrija* ima za predmet proučavanja mjerenje prostora, likova, izučavanje njihovih svojstava.

VIII. *Pravac* je jedna beskonačna linija koja je najkraći put između bilo kojih svojih dviju točaka. Moramo smatrati očitim da ako se dva dijela pravaca podudaraju, da se ti dijelovi podudaraju u svoj svojoj dužini.

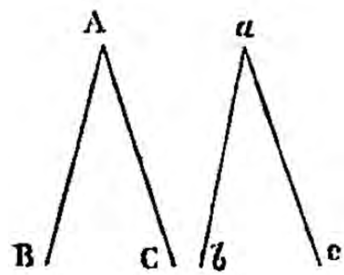
IX. Razlomljena ili poligonalna linija sastoji se od pravih linija.

X. Svaka linija koja nije ni prava ni sastavljena od pravih linija jest zakrivljena linija.

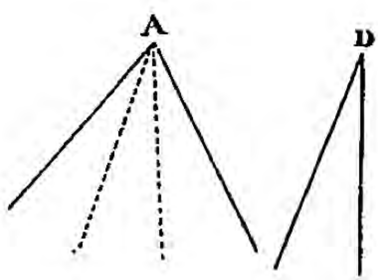
XI. *Ravnina* je takva površina, da ako u njoj uzmemo dvije točke po volji, te ako spojimo te točke ravnom linijom, cijela linija ostaje u toj površini.

XII. Svaka površina koja nije ravna ni sastavljena od ravnih površina jest zakrivljena površina.

XIII. Lik formiran dvama pravcima AB, AC koji se sijeku zove se kut. Točka A je vrh kuta, a linije AB, AC su njegove stranice. Kut se koji put označava slovom vrha A; u ostalim slučajevima trima slovima BAC ili CAB, vodeći brigu da se slovo vrha stavi u sredinu.



Za dva se kuta A i a kaže da su jednaki ako se mogu podudarati. Tako pretpostavimo da nosimo kut a na A, na način da se ab naslanja na AB; ako ac uzima smjer pravca AC, stranice dvaju kutova će se podudarati i dva će kuta biti jednaka.



Kut A je dvostruki, trostruki itd. od kuta D ako on zatvara među svojim stranama dva, tri,. . . kuta jednaka kutu D.
Kutovi su, dakle, međusobno usporedivi kao i ostale veličine.

Sl. 3. XIV. Kada prava linija AB susreće drugu pravu liniju CD, i to tako da obližnji kutovi BAC, BAD budu međusobno jednaki, za liniju AB kaže se da je okomita na CD, a kutovi jednaki (kutovima) BAC, BAD zovu se *pravi kutovi*.
Bit će dokazano da će se točkom A uzetom na pravcu CD uvijek moći podići okomica nad taj pravac i da su svi pravi kutovi među sobom jednaki.

Svaki kut veći od pravog kuta jest tupi kut; svaki kut manji od pravog kuta šiljasti je kut.
Suplementarnim (nadopunjujućim) kutovima zovemo dva kuta čiji je zbroj jednak dvama pravim (kutovima), a komplemantarnim kutovima one čiji je zbroj jedan pravi kut.

XV. Za dvije linije kažemo da su paralelne, kada se, smještene u istu ravninu, ne mogu sresti na nekoj udaljenosti kada ih se jednu i drugu produži. Takove su linije AB i CD. Sl. 5.

XVI. *Ravninski lik* je ravnina koja na svim svojim dijelovima završava linijama.
Ako su linije prave, prostor koji one zatvaraju zove se *pravolinijski lik* ili *mnogokut*, i same te linije formiraju konturu ili *perimetar* (obris) mnogokuta. Sl. 6.

XVII. Poligon s trima stranama najjednostavniji je od svih. On se zove *trokut*; onaj s četirima stranama zove se *četverokut*; onaj s pet, *peterokut*; onaj sa šest, *šesterokut*, itd.

XVIII. *Jednakostraničnim* se zove trokut koji ima svoje tri stranice jednake; *jednakokračnom* su samo dvije stranice jednake, *raznostraničnom* su sve stranice nejednake. Sl. 7. i 8.

XIX. *Pravokutni* je onaj trokut koji ima jedan pravi kut. (Slika 9.) Stranica nasuprot pravom kutu zove se *hipotenuza.* Tako je ABC pravokutni trokut u A, a stranica BC je njegova hipotenuza.

XX. Među četverokutima razlikujemo: Sl. 10.

Kvadrat, koji ima jednake stranice i sve svoje kutove prave. Sl. 11.

Pravokutnik, koji ima prave kutove a da mu stranice nisu jednake. Sl. 12.

Paralelogram ili *romb*, kojima su nasuprotne stranice paralelne. Sl. 13.

Romb, čije su stranice jednake a da mu kutovi nisu pravi. Sl. 14.

Konačno, *trapez*, čije su samo dvije stranice paralelene. Sl. 15.

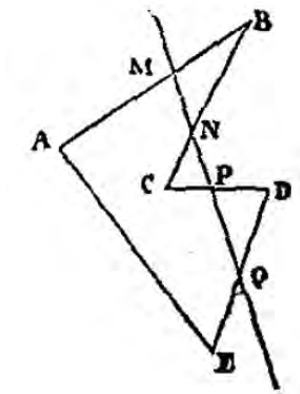
XXI. *Dijagonalom* nazivamo liniju koja spaja vrhove dvaju kutova koji nisu susjedni; takova je AC. (Sl. 42.)

XXII. *Jednakostranični* mnogokut je onaj čije su sve stranice jednake; *jednakokutni* je mnogokut onaj čiji su svi kutovi jednaki.

XXIII. Dva su mnogokuta *jednakostranična među sobom* kada su im sve stranice međusobno jednake jedna drugoj i smještene istim redoslijedom, to jest kad im slijede njihove obrise u istom smjeru; prva strana jednoga jednaka je prvoj stranici drugoga, druga strana jednoga drugoj drugoga, treća trećoj i tako dalje. Također se razumije što označavaju dva mnogokuta *jednakokutna među sobom.*

U jednom ili drugom slučaju, jednake stranice ili jednaki kutovi, zovu se *homologne* stranice ili kutovi.

XXIV. Konveksnim mnogokutom zovemo mnogokut u cijelosti smješten s iste strane pravca u smjeru svake od svojih stranica.
Obris konveksnog mnogokuta ne može sjeći pravac u više od dvije točke; ako pravac siječe obris $ABCDE$ u točkama M, N, P, Q, stranica BC koja je presječena pravcem u jednoj unutarnjoj točki N, očito bi imala dijelove lika smještene i s jedne i s druge strane svoga smjera.



Objašnjenje termina i oznaka

Aksiom je sama po sebi očita propozicija (tvrdnja).

Teorem je istina koja postaje očitom s pomoću zaključivanja koje se zove *dokaz*.

Problem je postavljeno pitanje koje traži *rješenje*.

Lema je istina koja se koristi kao pomoć za dokazivanje nekog teorema, rješenja ili problema. Zajedničko ime *propozicije* pridaje se bez razlike teoremima, problemima i lemama.

Korolar. je posljedica koja proistječe iz jedne propozicije ili više njih.

Poučak je opaska na jednu ili više prethodnih propozicija, čineći primjetnom njihovu vezu, njihovu korisnost, njihovu restrikciju (suženje) ili njihovu ekstenziju (proširenje).

Hipoteza je pretpostavka najavljena bilo u propoziciji, bilo u toku dokaza.

Znak $=$ je oznaka jednakosti; tako izraz $A = B$ označava da je A jednako B.

Da bi se izrazilo da je A manje od B, piše se $A < B$.

Da bi se izrazilo da je A veće od B, piše se $A > B$.

Znak $+$ izgovara se *više*; on označava zbrajanje.

Znak $-$ izgovara se *manje*; on označava oduzimanje: tako $A + B$ predstavlja zbroj veličina A i B; $A - B$ predstavlja njihovu razliku ili ono što ostane kad se B oduzme od A; isto tako $A - B + C$, ili $A + C - B$, znači da A i C moraju biti zajedno dodani te da B mora biti oduzeto (odrezano) od svega.

Znak $\times$ označava množenje; tako $A \times B$ predstavlja umnožak A s B. Umjesto znaka $\times$ se koji put koristi točka. Tako je $A \cdot B$ ista stvar kao i $A \times B$. Također se produkt označava bez ikakvog znaka između A i B ali taj izraz treba primjenjivati samo kada se u isto vrijeme ne primjenjuje isti (izraz) za liniju AB, udaljenost između točaka A i B.

Izraz $A \times (B + C - D)$ predstavlja umnožak od A s veličinom $B + C - D$. Ako bi trebalo pomnožiti $A + B$ s $A - B + C$, taj bi se produkt označio kao $(A + B) \times (A - B + C)$. Sve što je zatvoreno u zagradama, smatra se kao jedna jedina veličina.

Broj stavljen ispred jedne linije ili jedne količine služi kao množitelj toj liniji ili toj količini; tako, da bi se izrazilo da je linija AB uzeta tri puta, piše se $3AB$; da bi se označila polovica kuta A, piše se $\frac{1}{2}A$.

Kvadrat linije AB označava se $\overline{AB}^2$; njegov kub s $\overline{AB}^3$. Bit će objašnjeno na svome mjestu što točno znači kvadrat i kub linije.

Znak $\sqrt{}$ označava vađenje korijena; tako je $\sqrt{2}$ kvadratni korijen iz 2; $\sqrt{A \times B}$ je korijen produkta $A \times B$ ili razmjerna (geometrijska, proporcionalna) sredina između A i B.

AKSIOMI

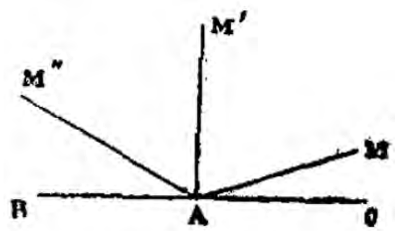
1. Dvije veličine jednake trećoj međusobno su jednake.
2. Cjelina je veća od svoga dijela.
3. Cjelina je jednaka zbroju dijelova na koje je podijeljena.
4. Od jedne do druge točke može se povući samo jedna prava linija.
5. Dvije veličine, linija, površina ili tijelo jednake su kada se smještene jedne na druge podudaraju u svoj svojoj protežnosti.

Prva propozicija[1]

TEOREM

Na jednu točku uzetu na pravcu može se podići jedna okomica na taj pravac, i to samo jedna.

Zaista, pretpostavimo najprije da je pravac *AM* položen na *AC*; zakrenut oko točke *A* oblikovat će dva susjedna kuta *MAC*, *MAB*, od kojih će jedan, *MAC*, najprije vrlo malen, uvijek ići u rast te će drugi, *MAB*, najprije mnogo veći nego *MAC*, postojano ići u smanjivanje sve do nule.



Kut *MAC*, najprije dosta manji od *MAB*, postat će, dakle, dosta veći od toga kuta; posljedično će postojati položaj AM' pomičnog pravca gdje će ta dva kuta biti jednaka. I očito je da postoji samo jedan jedini takav položaj.

Korolar. Svi su pravi kutovi jednaki.

Sl. 16. Neka je *DC* (pravac) okomit na *AB*, i *HG* okomit na *EF*. Kažem da je kut *DCB* jednak (kutu) *HGF*. Zaista, ako se prenese pravac *EF* na *AB*, tako da točka *G* pada na točku *C*, *GH* će uzeti smjer od *CD*; u protivnom bi se moglo na jednoj točki uzetoj s pravca podići dvije okomice na taj pravac.

Propozicija II.

TEOREM

Sl. 17. *Svaka prava linija CD koja sreće neku drugu AB čini s njome dva susjedna kuta ABC, BCD čiji je zbroj jednak dvama pravim kutovima.*

Na vrhu *C*, podignite nad *AB* okomicu *CE*. Kut *ACD* je zbroj kutova *ACE* i *ECD*; dakle, $ACD + BCD$ će biti suma triju kutova *ACE*, *ECD*,

[1] Ovaj naziv *propozicija* ovdje stoji u smislu riječi *stavka*, ne kao dokaz matematičke činjenice koja ima manju težinu od *teorema*, a koja se u našoj literaturi navodi kao *propozicija*.

BCD. Prvi od njih je pravi, dva druga zajedno čine pravi kut *BCE*; dakle, zbroj dvaju kutova *ACD*, *BCD* jednak je dvama pravim kutovima.

Korolar I. Ako je jedan od kutova *ACD*, *BCD* pravi, drugi će također slično biti pravi kut.

Korolar II. Ako je linija *DE* okomita na *AB*, obrnuto će *AB* biti okomita na *DE*. Sl. 18.

Iz toga što je *DE* okomita na *AB* slijedi da je kut *ACD* jednak susjednom (kutu) *DCB* i da su oni pravi. Ali, iz toga što je *ACD* pravi kut slijedi da je njegov susjedni *ACE* također pravi kut; dakle, kut $ACE = ACD$, stoga je *AB* okomito na *DE*.

Korolar III. Svi nanizani kutovi *BAC*, *CAD*, *DAE*, *EAF*, oblikovani s iste strane pravca *BF*, uzeti zajedno vrijede dva prava kuta jer je njihova suma (zbroj) jednaka onoj dvaju susjednih kutova *BAC*, *CAF*. Sl. 34.

Propozicija III.

TEOREM

Ako dva susjedna kuta ACB, DCB zajedno vrijede dva prava kuta, dvije će vanjske stranice AC, CB biti na pravcu. Sl. 20.

Ako *CB* nije produžetak od *AC*, neka je *CE* taj produžetak; dakle, kako je linija *ACE* prava, suma dvaju kutova *ACD*, *DCE* bit će jednaka dvama pravim (kutovima)*. Ali, po pretpostavci, zbroj kutova *ACD*, *DCB* također je jednak dvama pravim kutovima; dakle, $ACD + BCD$ bit će jednako $ACD + DCE$; odsijecajući (oduzimajući) od prvog i od drugog zbroja kutova kut *ACD*, ostat će djelić *DCB*, sasvim jednak *DCE*, što je nemoguće; dakle, *CB* je produžetak od *AC*. *Pr. 2.

Propozicija IV.

TEOREM

Svaki put kad se dva pravca AB, DE sijeku, nasuprotni kutovi oko vrha su jednaki. Sl. 21.

Budući da je linija *DE* pravac, zbroj kutova *ACD*, *ACE* jednak je dvama pravim kutovima; i budući da je linija *AB* pravac, zbroj kutova *ACE*, *BCE* također je jednak dvama pravim kutovima; dakle, zbroj $ACD + ACE$ jednak je zbroju $ACE + BCE$. Oduzevši od prvog i od drugog (zbroja kutova) isti kut *ACE*, ostat će kut *ACD* jednak svomu nasuprotnom *BCD*.

Poučak. Četiri kuta oko jedne točke oblikovana pravcima koji se sijeku zajedno vrijede četiri prava kuta jer kutovi *ACE*, *BCE* imaju istu vrijednost.

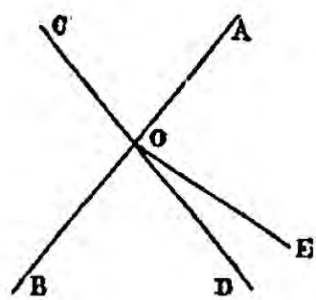
Sl. 22. Općenito, ako koliko god pravaca *CA*, *CB*, itd. sreću u jednoj točki *C*, suma svih nanizanih kutova *ACB*, *BCD*, *DCE*, *ECF*, *FCA*, bit će jednaka četirima pravim kutovima; ako se oko točke *C* oblikuju četiri prava kuta s pomoću dviju međusobno okomitih linija, njihova bi suma bila očito jednaka onoj (sumi) nanizanih kutova *ACB*, *BCD* itd.

Propozicija V.

TEOREM

Ako se točkom O pravca AB povuku dvije linije OC, OD s jedne na drugu stranu pravca takove da su kutovi COA, BOD jednaki, OD će biti produžetak od OC.

Zaista, pretpostavimo da je *OE* produžetak od *OC*. Tada bi bilo (Teorem IV, op. aut.) $COA = BOE$; ali po pretpostavci $BOD = COA$; dakle, *BOD* bi bio jednak *BOE*, što je besmisao (apsurd).



Propozicija VI.

TEOREM

Dva su trokuta jednaka kad imaju jednak kut sadržan među dvjema odgovarajućim stranicama koje su im jednake.

Sl. 23. Neka je kut *A* jednak kutu *D*, stranica *AB* jednaka *DE*, stranica *AC* jednaka *DF*; kažem da će trokuti *ABC*, *DEF* biti jednaki.

Zaista, ti trokuti mogu biti postavljeni jedan na drugog tako da se savršeno poklapaju. I najprije, ako se smjesti stranica *DE* na njoj jednaku *AB*, točka *D* će pasti na *A*, točka *E* na *B*: s obzirom na to da je kut *D* jednak kutu *A*, čim stranica *DE* bude smještena na *AB*, stranica *DF* uzet će smjer od *AC*. Štoviše, *DF* je jednaka *AC*; dakle točka *F* past će na *C* i treća stranica *EF* točno će pokriti treću stranicu *BC*; dakle, trokut *DEF* jednak je trokutu *ABC*.

Korolar. Iz toga što su tri dijela (elementa trokuta) između dvaju trokuta jednaka, znajući da je kut $A = D$, stranica $AB = DE$ i stranica $AC = DF$, može se zaključiti da isto vrijedi i za ostale pa znamo da je kut $B = E$, kut $C = F$ i stranica $BC = BF$.

Propozicija VII.

TEOREM

Dva su trokuta jednaka kada imaju jednaku stranicu i dva odgovarajuća kuta koji na njoj leže jednaka.

Neka je stranica *BC* jednaka stranici *EF*, kut *B* jednak kutu *E* i kut *C* Sl. 23.
jednak kutu *F*; kažem da će trokut *DEF* biti jednak trokutu *ABC*.

Da bismo izvršili naslagivanje, neka je *EF* smještena na njoj jednaku *BC*; točka *E* će pasti u točku *B*, a točka *F* u *C*. Budući da je kut *E* jednak kutu *B*, stranica *ED* će uzeti smjer *BA*; tako će se točka *D* naći na nekoj točki linije *BA*; isto tako, budući da je kut *F* jednak kutu *C*, linija *FD* će uzeti smjer *CA* i točka *D* će se naći na nekoj točki stranice *CA*; dakle, točka *D* koja se mora istovremeno naći na dvjema linijama *BA*, *CA*, past će na njihov presjek *A*; dakle, dva se trokuta *ABC*, *DEF* podudaraju jedan s drugim i savršeno su jednaki.

Korolar. Iz toga što su tri dijela u dvama trokutima jednaka, znajući $BC = EF$, $B = E$, $C = F$, može se zaključiti da je tako i s trima drugim dijelovima; znamo da je $AB = DE$, $AC = DF$, $A = D$.

Propozicija VIII.

TEOREM

U svakom je trokutu bilo koja njegova stranica manja od zbroja dviju ostalih.

Pravac *BC*, na primjer, najkraći je put od *B* do *C**; dakle je *BC* manje Sl. 23.
od $AB + AC$. *Def. 8.

Treba također primijetiti da je bilo koja stranica veća od razlike dviju ostalih.

Zaista, neka je a najveća stranica, b i c dvije preostale; iz nejednakosti $a < b + c$ nalazi se, oduzimajući c od jedne i druge strane nejednakosti, $a - c < b$, te oduzimajući b, $a - b < c$.

Propozicija IX.

TEOREM

Sl. 24. *Ako se točkom O uzetom unutar trokuta ABC prema krajevima stranice BC povuku pravci OB, OC, zbroj (duljina) tih pravih linija bit će manji od onog dviju ostalih strana AB i AC.*

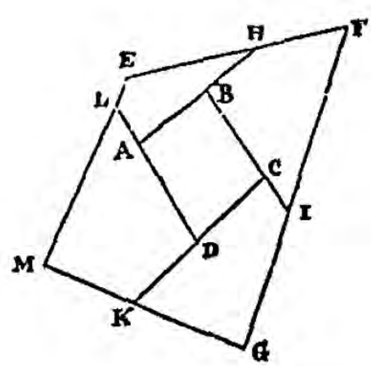
Neka je linija BO produžena sve dok ne susretne stranicu AC u D;
Pr. 8. pravac OC je kraći od $OD + DC$: dodajući jednom i drugom (OD i DC) BO, imat ćemo: $BO + OC < BO + OD + DC$, ili $BO + OC < BD + DC$.

Slično imamo $BD < BA + AD$; dodajući jednomu i drugomu DC, bit će $BD + DC < BA + AC$. Ali našli smo $BO + OC < BD + DC$; dakle, tim više, $BO + OC < BA + AC$.

Propozicija X.

TEOREM

Svaka poligonalna konveksna linija ABCD manja je od bilo koje linije MEFG koja onu okružuje sa svih strana.



Produžimo u istom smjeru stranice mnogokuta $ABCD$, sve dok ne susretnu okružujuću im liniju. Smjesta ćemo imati nejednakosti:

$$AB + BH < AL + LE + EH$$
$$BC + CI < BH + HF + FI$$
$$CD + DK < CI + IG + GK$$
$$DA + AL < DK + KM + ML$$

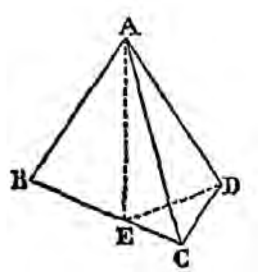
Dodajući tim nejednakostima član po član i ispuštajući dijelove zajedničke dvama članovima, bit će $AB + BC + CD + DA < EF + FG + GM + ME$. Dokazalo bi se na isti način da je svaka poligonalna konveksna linija manja (kraća) od linije koja je okružuje na istim krajevima.

Propozicija XI.

TEOREM

Ako su dvije stranice trokuta jednake odgovarajućim dvjema drugog trokuta te ako je u isto vrijeme kut sadržan među prvima veći od kuta sadržanog među drugima, kažemo da će treća stranica prvog trokuta biti veća od treće stranice drugog.

Smjestite dva trokuta tako da im je zajednička stranica AC, a dvije ostale jednake stranice AB, AD smještene s jedne i druge strane. Uostalom je kut $BAC > CAD$.



Razdijelite kut BAD na dva jednaka dijela linijom AE; taj će pravac pasti u najveći kut BAC; konačno, povucite pravac DE: dva trokuta BAE, EAD bit će jednaka budući da imaju jednaki kut sadržan između dviju jednakih stranica. Dakle, $BE = ED$. Ali, u trokutu EDC imam: $CD < ED + EC$. Zamjenjujući ED s BE dobiva se $CD < BE + EC$ ili $CD < BC$.

Obratno, ako su stranice AB, AC trokuta ABC jednake dvjema stranicama AC, AD trokuta ACD; štoviše, ako je treća stranica CB prvog trokuta veća od treće stranice CD drugog trokuta, kut BAC će biti veći od kuta CAD.

Budući da je kut *BAC* manji od kuta *CAD*, vidjeli smo da bi *CB* bio manji od *CD*, što je protivno hipotezi; i ako je kut *BAC* bio jednak *CAD*, bilo bi (Teorem VI, op. aut.) $CB = CD$; što je također protivno pretpostavci.

Propozicija XII.

TEOREM

Tri su trokuta jednaka kada su im sve tri odgovarajuće stranice jednake.

Sl. 23. Neka je stranica $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$; kažem da će biti jednaki kutovi $A = D$, $B = E$, $C = F$.

Ako je kut *A* veći od kuta *D*, kako su stranice *AB*, *AC* jednake odgovarajućim stranicama *DE*, *DF*, iz toga bi po prethodnom teoremu slijedilo da je stranica *BC* veća od *EF*; i ako je kut *A* bio manji od kuta *D*, slijedilo bi da je stranica *BC* manja od *EF*: no, *BC* je jednak *EF*; dakle kut *A* ne može biti ni veći ni manji od kuta *D*; on mu je dakle jednak. Dokazalo bi se isto tako da je kut $B = E$ i da je kut $C = F$.

Poučak. Može se primijetiti da su jednaki kutovi nasuprotni jednakim stranicama: tako su jednaki kutovi *A* i *D* nasuprotni jednakim stranicama *BC*, *EF*.

Propozicija XIII.

TEOREM

U jednakokračnom su trokutu kutovi nasuprotni jednakim stranicama jednaki.

Sl. 28. Neka je stranica $AB = AC$; kažem da će biti kut $C = B$. Povucite liniju od vrha *A* do točke *D*, sredine baze *BC*. Dva će trokuta *ABD*, *ADC* imati sve odgovarajuće stranice međusobno jednake. Kako znamo da ako je *AD* zajednička, da je $AB = AC$ po hipotezi te $BD = BC$ po konstrukciji, prema prethodnom teoremu, kut *B* je jednak kutu *C*.

Korolar. Jednakostraničan trokut je u isto vrijeme jednakokutan. To će reći da ima sve kutove jednake.

Poučak. Jednakost trokuta *ABD*, *ACD* dokazuje u isto vrijeme da je kut $BAD = DAC$, i da je kut $BDA = ADC$. Ta dva su pravi kutovi; dakle, *linija povučena od vrha jednakokračnog trokuta do polovice njegove baze okomita je na tu bazu i dijeli kut vrha u dva jednaka dijela.*

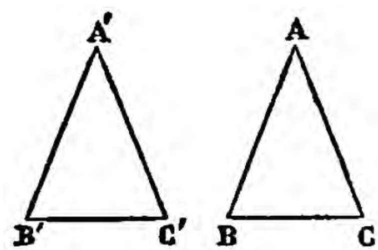
U trokutu, ne jednakokračnom, uzima se bez razlike bilo koja stranica za bazu i stoga je njegov vrh onaj nasuprotnog kuta. U jednakokračnom trokutu posebno se uzima za bazu stranica koja nije uopće jednaka nijednoj od dviju ostalih.

Propozicija XIV.

TEOREM

Ako su u trokutu dva kuta jednaka, nasuprotne strane su jednake.

Neka je kut $ABC = ACB$. Kažem da će stranica AC biti jednaka stranici AB.



Načinimo trokut $A'B'C'$ jednakim trokutu ABC; tako da je kut $B = B'$, $C = C'$ i $BC = B'C'$.

Postavimo trokut $A'B'C'$ na trokut ABC, okrenuvši ga na način da se stranica $B'C'$ stavi na stranicu BC, ali točka C' na B i točka B' na C. Kut $C' = C = B$; dakle, $C'A'$ će uzeti smjer CA. Točka A' će dakle pasti u A i bit će $A'B' = AC$ te posljedično $AB = AC$.

Propozicija XV.

TEOREM

Od dviju stranica trokuta najveća je ona koja je nasuprot najvećemu kutu, i obratno, od dvaju kutova trokuta najveći je onaj nasuprot najvećoj stranici.

1° Neka je $C > B$. Kažem da je stranica AB nasuprotna kutu C veća od stranice AC nasuprot kutu B. Sl. 30.

Načinimo kut $BCD = B$; u trokutu BDC bit će *$BD = DC$, ali je pravac AC kraći od $AD + DC$, a $AD + DC = AD + DB = AB$. Dakle, AB je veća od AC. *Pr. 14.

2° Neka je $AB > AC$. Kažem da će kut C, nasuprotan stranici AB, biti veći od kuta B nasuprotnog stranici AC.

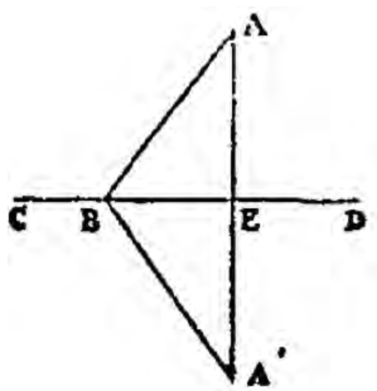
Ako je bilo $C < B$, slijedilo je, kao što je bilo dokazano, $AB < AC$,
*Pr. 14. što je protivno pretpostavci. Ako bi bilo $C = B$, slijedilo bi *$AB = AC$, što je također protiv pretpostavke; dakle, treba biti kut C veći od B.

Propozicija XVI.

TEOREM

Danom točkom izvan pravca, 1° *može se spustiti jedna okomica na taj pravac;* 2° *može ih se povući samo jedna.*

1° Neka je dana točka A i pravac CD; okrenimo dio gornje ravnine oko pravca CD, sve dok se ona ne prilijepi s donjim dijelom; i neka je A' položaj koji će uzeti točka A; spojimo AA'. Ako se ponovno razvije dio ravnine $A'CD$ oko CD, sve dok točka A' nije uzela svoj prvotni položaj, linija $A'E$ će se prilijepiti točno na AE; kut $A'EC$ će dakle točno pokriti kut AEC; i kako su ti kutovi sujedni, kut AEC je pravi; dakle AE je okomito na CD.



2° Pretpostavimo da bi se od točke A na CD moglo povući dvije okomice AE, AB; produljimo jednu od njih, AE, veličinom $EA' = AE$, i spojimo $A'B$.

Trokut AEB jednak je trokutu $A'EB$ jer su kutovi AEB, $A'EB$ pravi; stranica $AE = A'E$ i stranica BE je zajednička; iz toga se zaključuje da je kut $ABE = EBA'$: no kut ABE je pravi, dakle, to je i EBA'. Ali, ako susjedni kutovi ABE, EBA' zajedno vrijede dva prava kuta, treba biti ABA' pravac, iz čega se dobiva da bi se između točaka A i A' mogla povući dva pravca, što je nemoguće, itd.