1.

Obična diferencijalna jednadžba

1.1. Ravnoteža napete žice

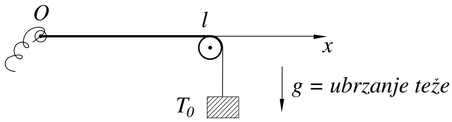
Osnovno svojstvo materijalnog tijela ili *kontinuuma* leži u činjenici, da sila kojom dva njegova komada djeluju jedan na drugog ovisi samo o položaju njihovog kontakta, a ne o samim dijelovima; zato se ta sila naziva *kontaktnom*. Neka interval $(0, l)$ na x-osi predstavlja položaj tanke žice, napete čivijom npr. kao na gitari. Označimo s $a(x)$ kontaktnu silu u točki $x \in (0, l)$, tj. silu kojom dio (x, l) djeluje na dio $(0, x)$; tada dio $(0, x)$ djeluje na dio (x, l) silom $-a(x)$. Ta sila je *uzdužna* ili *longitudinalna*, tj. paralelna je x-osi; naziva se *napetost* žice. U daljnjem ćemo se često pozivati na *zakon ravnoteže sila: ako je tijelo u ravnoteži, ukupna sila koja na njega djeluje jednaka je nuli*. Neka je $x_1, x_2 \in (0, l)$, $x_1 < x_2$; ukupna uzdužna sila na dio (x_1, x_2) jednaka je $a(x_2) - a(x_1)$, pa prema zakonu ravnoteže vrijedi

$$a(x_2) - a(x_1) = 0, \tag{1}$$

tj.

$$a = \text{const.} \tag{2}$$

Dakle, u promatranom slučaju napetost žice je konstanta, jednaka uzdužnoj kontaktnoj sili $a(l) > 0$ koja djeluje na kraju $x = l$. Umjesto čivijom, žica se može horizontalno napeti utegom (sl. 1.1). Ako je težina utega $T_0 > 0$, napetost je $a = T_0$, tj. neposredno je zadana; time se omogućuje baždarenje napetosti realizirane čivijom.



Sl. 1.1.

Razmotrimo sada žicu koja slobodno visi (x-os ima smjer ubrzanja sile teže). Ona je također napeta, ovaj put svojom težinom. Označimo s $T(x_1, x_2)$ težinu komada

(x_1, x_2). Ukupna uzdužna sila na taj komad jednaka je $a(x_2) - a(x_1) + T(x_1, x_2)$, pa prema zakonu ravnoteže imamo

$$a(x_2) - a(x_1) + T(x_1, x_2) = 0. \tag{3}$$

Stavljajući npr. $x_1 = x$, $x_2 = l$ i uzimajući u obzir da je $a(l) = 0$ (kraj $x = l$ je slobodan!) dobivamo

$$a(x) = T(x, l); \tag{4}$$

iz toga slijedi da je

$$a(x) > 0 \quad \text{za} \quad x \in [0, l). \tag{5}$$

Ako je o kraj $x = l$ obješen uteg težine $T_0 > 0$, onda umjesto (4) imamo

$$a(x) = T(x, l) + T_0, \tag{6}$$

pa je

$$a(x) > 0 \quad \text{za} \quad x \in [0, l]. \tag{7}$$

Ako je žica homogena s gustoćom mase ϱ (masa jedinice duljine žice), onda je $T(x_1, x_2) = \varrho g(x_2 - x_1)$, pa imamo

$$a(x) = \varrho g(l - x) + T_0. \tag{8}$$

Težina obješene žice je specijalan slučaj uzdužne *linijske sile*, raspoređene po žici s gustoćom $\phi(x) > 0$, $x \in (0, l)$; ukupna linijska sila na komad (x_1, x_2) je tada

$$\int_{x_1}^{x_2} \phi(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \tag{9}$$

Ukupna sila na taj komad je

$$a(x_2) - a(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \phi(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \tag{10}$$

pa iz zakona ravnoteže imamo

$$a(x_2) - a(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} \phi(\xi)\, \mathrm{d}\xi = 0. \tag{11}$$

Stavljajući $x_1 = x$, $x_2 = l$ dobivamo

$$a(x) = \int_{x}^{l} \phi(\xi)\, \mathrm{d}\xi; \tag{12}$$

iz toga slijedi (5). Ako pored linijske sile na žicu djeluje i kontaktna sila $a(l) = T_0 > 0$, onda imamo

$$a(x) = T_0 + \int_{x}^{l} \phi(\xi)\, \mathrm{d}\xi; \tag{13}$$

tada vrijedi (7).

Razmotrimo sada uzdužno napetu žicu, podvrgnutu djelovanju vanjske *poprečne* ili *transverzalne* sile, tj. sile koja je okomita na x-os. Pretpostavit ćemo da je ta sila paralelna fiksiranoj ravnini i da je *slaba* tj. mnogo manja od napetosti. Npr., ako je teška žica horizontalno napeta, onda je poprečna sila njena težina, pa gornja pretpostavka znači da je težina žice mala u usporedbi s težinom utega kojim je ostvarena napetost. Prirodno je pretpostaviti da se pod utjecajem slabe poprečne sile žica slabo (malo) deformira, tj. da njen ravnotežni položaj leži u ravnini vanjske sile i da se malo razlikuje od neperturbiranog položaja (intervala $(0, l)$). Točka $x \in (0, l)$ prijeđe deformacijom u točku $P(x) = (x, u(x)) \in \mathbf{R}^2$, gdje je $u(x)$ *progib* točke x. Progib je *mali* u slijedećem smislu:

$$|u(x)| \ll l, \tag{14}$$

$$|u'(x)| \ll 1, \tag{15}$$

za svako $x \in (0, l)$. Primijetimo da je prva od tih nejednakosti posljedica druge: budući je žica u točki $x = 0$ učvršćena, vrijedi $u(x) = 0$, pa je

$$u(x) = \int_0^x u'(\xi)\, \mathrm{d}\xi; \tag{16}$$

iz toga i (5) dobivamo

$$|u(x)| \leqslant \int_0^l |u'(\xi)|\, \mathrm{d}\xi \leqslant l \cdot \max|u'| \ll l. \tag{17}$$

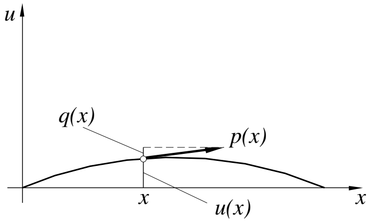
Primijetimo također slijedeće: ako je žica na kraju $x = l$ napeta utegom (sl. 1.1), taj kraj se ponaša prema progibu kao da je učvršćen, tj. vrijedi $u(l) = 0$; to je neposredna posljedica pretpostavke da je poprečna sila mala u usporedbi s težinom utega.

Uzimajući u obzir (15), za element duljine luka deformirane žice dobivamo

$$\mathrm{d}s = (1 + |u'(x)|^2)^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}x \approx \mathrm{d}x, \tag{18}$$

pa zaključujemo da mali progib ne uzrokuje istezanje žice.

Označimo s $p(x)$ *kontaktnu silu* u točki $P(x)$, tj. silu kojom dio $\overset{\frown}{P(x)P(l)}$ *deformirane žice* djeluje na dio $\overset{\frown}{P(0)P(x)}$. Eksperimentalno je dobro provjerena ova *osnovna pretpostavka: ako je deformacija napete žice mala, kontaktna sila $p(x)$ u točki $P(x)$ ($x \in (0, l)$) jednaka je po modulu napetosti $a(x)$ i paralelna je tangencijalnom vektoru žice u toj točki* (sl. 1.2). Označivši poprečnu komponentu kontaktne sile s q, imamo



Sl. 1.2.

$$q(x) = a(x)u'(x). \tag{19}$$

Ta veza kontaktne sile i progiba s općenitijeg stanovišta zove se *zakon ponašanja* u promatranom modelu.

Ukupna poprečna kontaktna sila na dio $P(x_1)\overset{\frown}{\,}P(x_2)$ deformirane žice jednaka je $q(x_2) - q(x_1)$. Neka je $f(x)$ gustoća poprečne *linijske sile* (sila po jedinici duljine) koja djeluje na žicu; tada je ukupna linijska poprečna sila na dio $P(x_1)\overset{\frown}{\,}P(x_2)$ jednaka

$$\int_{x_1}^{x_2} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{20}$$

Ukupna poprečna sila na dio $P(x_1)\overset{\frown}{\,}P(x_2)$ je

$$q(x_2) - q(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{21}$$

pa prema zakonu ravnoteže imamo

$$q(x_2) - q(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0. \tag{22}$$

Stavljajući npr. $x_1 = x$, $x_2 = l$, dobivamo

$$q(l) - q(x) + \int_{x}^{l} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0. \tag{23}$$

Iz toga slijedi lokalni ili *diferencijalni oblik zakona ravnoteže*

$$q'(x) + f(x) = 0, \quad x \in (0, l) \tag{24}$$

koji je ekvivalentan uvjetu (22). Uvrštavajući (19) u (24), dobivamo diferencijalnu jednadžbu koju zadovoljava ravnotežni progib:

$$(a(x)u'(x))' + f(x) = 0. \tag{25}$$

Ako se žica nalazi u nekom sredstvu koje se *elastično* opire njenoj deformaciji, onda pored zadane linijske sile f, na nju djeluje i linijska (poprečna) sila s gustoćom $-b(x)u(x)$, gdje je $b(x) \geqslant 0$ *koeficijent elastičnosti* sredstva. U ovom slučaju umjesto (23) i (24) imamo respektivno

$$q(l) - q(x) + \int_{x}^{l} (f(\xi) - b(\xi)u(\xi))\,\mathrm{d}\xi = 0, \tag{26}$$

$$q'(x) - b(x)u(x) + f(x) = 0, \tag{27}$$

a umjesto (25) dobivamo jednadžbu

$$(a(x)u'(x))' - b(x)u(x) + f(x) = 0, \tag{28}$$

koju ćemo nazivati *jednadžbom ravnoteže*. To je *obična diferencijalna jednadžba 2. reda* za funkciju u; funkcije a i b su njeni *koeficijenti*, a f je *slobodni član*. Jednadžba je *homogena* ako je $f = 0$, inače je *nehomogena*. Jednadžba (28) je *linearna*: ako su (za dane koeficijente a i b) funkcije u_1 i u_2 rješenja homogene jednadžbe, tj.

$$(au_1')' - bu_1 = 0, \qquad (au_2')' - bu_2 = 0, \tag{29}$$

onda je i njihova linearna kombinacija

$$u = c_1u_1 + c_2u_2, \tag{30}$$

gdje su c_1 i c_2 proizvoljni realni brojevi, također rješenje homogene jednadžbe:

$$(au')' - bu = 0. \tag{31}$$

Svako rješenje jednadžbe (28) je *ravnotežno* ili *stacionarno* stanje.

U primjerima koji slijede navodimo još nekoliko modela koji se opisuju jednadžbom (28). Kao i u slučaju žice, o ravnotežnom stanju uvodimo pretpostavke koje su, naravno, ostvarene samo približno.

Primjer 1.1. *Uzdužna deformacija tankog štapa.* Pretpostavimo da x-os prolazi težištima poprečnih presjeka tankog homogenog štapa. Neka na štap djeluje slaba uzdužna sila, koja je na svakom poprečnom presjeku raspodijeljena tako da joj je ukupni moment u odnosu na težište presjeka (tj. u odnosu na x-os) jednak nuli; primjer takve sile je težina vertikalno postavljenog rotacionog štapa. Prirodno je pretpostaviti da se u opisanim uvjetima poprečni presjek štapa uzdužno translatira iz nedeformiranog položaja $x \in (0, l)$ u deformirani položaj $P(x) = x + u(x)$, gdje je $u(x)$ *mali pomak*. Označimo s $q(x)$ uzdužnu kontaktnu silu u točki x, tj. silu kojom dio $(P(x), P(l))$ djeluje na dio $(P(0), P(x))$. Neka je f gustoća uzdužne linijske sile (vanjska sila po jedinici duljine štapa). Iz zakona ravnoteže slijedi jednadžba (24). Eksperimentalni *zakon ponašanja (Hookeov zakon)* ima oblik (19), gdje je

$$a = ES; \tag{32}$$

ovdje je $E = \text{const} > 0$ *Youngov model*, a S površina poprečnog presjeka ($S = \text{const}$ za cilindrični štap). Ako je štap tako tanak da se može smatrati jednodimenzionalnim tijelom, opisani model podudara se s uzdužno napetom žicom. U tom slučaju uzdužnu kontaktnu silu nazivali smo napetošću i odredili smo je neposredno pomoću zakona ravnoteže; uzdužna deformacija nas nije zanimala jer smo kod razmatranja poprečne deformacije napeto stanje uzimali kao "nedeformirano".

Primjer 1.2. *Torzija tankog kružnog štapa.* Neka centralna os tankog homogenog cilindričnog štapa kružnog presjeka leži na x-osi. Neka na štap djeluje slab uzdužni *zakretni moment* (tj. moment paralelan x-osi). Pretpostavit ćemo da se tada poprečni presjek štapa na mjestu $x \in (0, l)$ zakrene oko x-osi za *mali kut* $u(x)$. Označimo s $q(x)$ uzdužni kontaktni zakretni moment u točki x, tj. moment kojim dio $(P(x), P(l))$ djeluje na dio $(P(0), P(x))$. Neka je f gustoća uzdužnog linijskog zakretnog momenta (vanjski moment po jedinici duljine štapa). *Ako je tijelo u ravnoteži, rezultanta zakretnih momenata koji na njega djeluju jednaka je nuli* (zakon *ravnoteže momenata*). Iz toga slijedi jednadžba (24). Eksperimentalni *zakon ponašanja* ima oblik (19) gdje je

$$a = \mu R^4 \pi / 2; \tag{33}$$

ovdje je $\mu = \text{const.} > 0$ *modul smicanja*, a R radijus poprečnog presjeka.

Primjer 1.3. *Provođenje topline kroz tanki štap.* Neka os tankog homogenog štapa leži na x-osi. Neka se na štap izvana prenosi slab toplinski fluks. Označimo s $u(x)$ temperaturu poprečnog presjeka na mjestu $x \in (0, l)$, a s $q(x)$ kontaktni toplinski fluks na tom mjestu, tj. toplinu koja se u jedinici vremena prenosi s dijela (x, l) na dio $(0, x)$. Neka je f gustoća linijskog toplinskog fluksa (vanjska toplina koja se u jedinici vremena prenosi na jedinicu duljine štapa). *Ako je provođenje topline u tijelu stacionarno (neovisno o vremenu), ukupni toplinski fluks (toplina po jedinici vremena) koji se na njega prenosi jednak je nuli (zakon stacionarnog provođenja topline).* Iz toga slijedi jednadžba (24). Eksperimentalni *zakon ponašanja (Fourierov zakon)* ima oblik (19), gdje je

$$a = \kappa S; \tag{34}$$

ovdje je $\kappa > 0$ *koeficijent provođenja*, a S površina poprečnog presjeka ($S = \text{const.}$ za cilindrični štap, $\kappa = \text{const.}$ za homogeni štap).

1.2. Rubni problem

U daljnjem koristimo standardnu oznaku $C^{(k)}(\mathscr{O})$ $(k \in \mathbf{N})$ za skup svih (realnih) funkcija na otvorenom skupu $\mathscr{O} \subset \mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, koje imaju neprekidne derivacije do reda k uključivo; $C^{(k)}(\overline{\mathscr{O}})$ je skup svih funkcija iz $C^{(k)}(\mathscr{O})$, kojih derivacije do reda k uključivo imaju neprekidna proširenja na $\overline{\mathscr{O}}$. Umjesto $C^{(0)}$ pišemo C, npr. $C(\mathscr{O}) = C^{(0)}(\mathscr{O})$.

Ukoliko ne bude drukčije naglašeno, u daljnjem ćemo pretpostavljati da je

$$a \in C^{(1)}([0,l]), \quad b \in C([0,l]), \tag{1}$$

$$f \in C([0,l]), \tag{2}$$

te da vrijedi

$$a > 0 \text{ na } [0,l], \tag{3}$$

$$b \geqslant 0 \text{ na } [0,l]. \tag{4}$$

Primijetimo da pretpostavka (3) isključuje slučaj žice koja slobodno visi, jer je tada $a(l) = 0$. Uz pretpostavke (1)–(3) svako rješenje $u \in C^{(2)}((0,l))$ jednadžbe (1.28) pripada klasi $C^{(2)}([0,l])$. Rješenja ima beskonačno mnogo (opće rješenje sadrži dvije proizvoljne konstante, v. Dodatak 1.2). Nas će zanimati rješenje koje predstavlja ravnotežno stanje sa zadanim režimom na krajevima $x = 0$ i $x = l$; ti režimi opisuju se *rubnim uvjetima*. Određivanje rješenja koje zadovoljava rubne uvjete zove se *rubni problem* (zadaća).

Vratimo se primjeru transverzalno opterećene napete žice. Ako su krajevi učvršćeni čivijom ili utegom, rubni uvjeti glase ovako:

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0. \tag{5}$$

U slučaju provođenja topline kroz štap ti uvjeti znače da se krajevi štapa održavaju (pomoću nekog vanjskog regulatora) na temperaturi od 0°; umjesto na 0° može se kraj održavati na bilo kojoj temperaturi pa ima smisla rubni uvjet

$$u(0) = c_0, \tag{6}$$

gdje je c_0 zadani broj. U daljnjem radi jednostavnosti govorimo samo o rubnom uvjetu na kraju $x = 0$. Da bi uvjet (6) u slučaju $c_0 \neq 0$ imao smisla i za napetu žicu, moramo napetost realizirati bez učvršćenja kraja $x = 0$. To postižemo npr. tako, da kraj $x = 0$

vežemo za nerastezljivu nit bez težine (mnogo dužu od žice) koju uzdužno napnemo pomoću utega ili čivije. Uvjet (6) realiziramo fiksiranjem kraja $x = 0$ na visini c_0; taj uvjet zove se *Dirichletov*, geometrijski ili kinematički.

Umjesto zadavanja progiba $u(0)$, možemo zadati vrijednost vanjske transvenzalne kontaktne sile $-q(0)$ koja realizira taj progib. Npr. ako je žica napeta pomoću niti vezane za kraj $x = 0$ i ako se na taj kraj objesi uteg težine c_1, onda imamo rubni uvjet

$$-q(0) = c_1. \tag{7}$$

(Primijetimo da analogan uvjet na kraju $x = l$ glasi $q(l) = c_1$). U slučaju provođenja kroz štap uvjet (7) znači da je reguliran toplinski fluks kroz presjek $x = 0$. Uzimajući u obzir zakon ponašanja (1.19), iz (7) dobivamo

$$u'(0) = c_2, \tag{8}$$

gdje smo stavili $c_2 = -c_1/a(0)$; taj uvjet zove se *Neumannov*, prirodni ili dinamički.

Ako je žica napeta pomoću niti vezane za kraj $x = 0$ i ako se taj kraj veže za poprečno elastično pero s koeficijentom elastičnosti $\kappa > 0$, onda imamo rubni uvjet

$$q(0) = \kappa u(0). \tag{9}$$

(Analogan uvjet na kraju $x = l$ glasi $q(l) = -\kappa u(l)$). Pomoću (1.19) dobivamo

$$u'(0) - \beta_0 u(0) = 0, \tag{10}$$

gdje smo stavili $\beta_0 = \kappa/a(0)$; to je *Robinov* rubni uvjet.

Primjer 2.1. Homogena žica učvršćena je na kraju $x = 0$ i horizontalno napeta pomoću niti (vezane na kraj $x = l$) i utega mase $M > 0$; kraj $x = l$ je slobodan. Odredit ćemo ravnotežni progib u polju sile teže (sl. 1.3). Linijska sila je težina, pa je $f = \varrho g$, gdje je $\varrho =$ const. gustoća mase (masa jedinice duljine žice). Jednadžba ravnoteže glasi

$$\varrho M u'' + \varrho g = 0. \tag{11}$$

Iz toga slijedi

$$u'(x) = -\frac{\varrho}{M}x + C_1, \tag{12}$$

$$u(x) = -\frac{\varrho}{2M}x^2 + C_1 x + C_2, \tag{13}$$

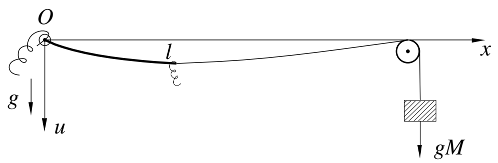
gdje su C_1 i C_2 konstante. Iz rubnih uvjeta

$$u(0) = 0, \quad u'(l) = 0 \tag{14}$$

slijedi $C_1 = \varrho l/M$, $C_2 = 0$ pa dobivamo

$$u(x) = -\frac{\varrho}{2M}x(x - 2l). \tag{15}$$

Opći rubni uvjet na kraju $x = 0$ glasi



Sl. 1.3.

$$\alpha u'(0) - \beta u(0) = c, \tag{16}$$

gdje su α, β i c zadane konstante i

$$\alpha, \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta > 0. \tag{17}$$

Analogno na kraju $x = l$ imamo

$$\gamma u'(l) + \delta u(l) = d, \tag{18}$$

gdje su γ, δ i d zadane konstante i

$$\gamma, \delta \geqslant 0, \quad \gamma + \delta > 0. \tag{19}$$

Ako je $c = 0$, uvjet (16) je *homogen*, inače je *nehomogen*. Uvjeti (16) i (18) su *linearni*. Kao što ćemo vidjeti, uz prirodne pretpostavke (17) i (19) oni osiguravaju *jedinstvenost* ravnotežnog (stacionarnog) stanja.

Primjer 2.2. U slučaju $b = 0$, rubni problem (1.28), (16), (18) rješava se formulom. Radi jednostavnosti razmotrit ćemo homogene rubne uvjete ($c = d = 0$). Neka je u rješenje problema. Iz (1.28) slijedi

$$u'(x) = -\frac{1}{a(x)} \int_0^x f(\eta)\,\mathrm{d}\eta + \frac{C_1}{a(x)}, \tag{20}$$

$$u(x) = -\int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{a(\xi)} \int_0^\xi f(\eta)\,\mathrm{d}\eta + C_1 \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{a(\xi)} + C_2, \tag{21}$$

gdje su C_1 i C_2 konstante. Uvrštavajući to u (16) i (18), dobivamo

$$\frac{\alpha}{a(0)}\, C_1 - \beta C_2 = 0, \tag{22}$$

$$\left(\frac{\gamma}{a(l)} + \delta \int_0^l \frac{\mathrm{d}\xi}{a(\xi)}\right) C_1 + \delta C_2 = \frac{\gamma}{a(l)} \int_0^l f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \delta \int_0^l \frac{\mathrm{d}\xi}{a(\xi)} \int_0^l a(\eta)\,\mathrm{d}\eta. \tag{23}$$

To je linearni sustav za nepoznanice C_1 i C_2; determinanta sustava je

$$\Delta = \frac{1}{a(0)}\, \alpha\delta + \frac{1}{a(l)}\, \beta\gamma + \beta\delta \int_0^l \frac{\mathrm{d}\xi}{a(\xi)}. \tag{24}$$

Razlikujemo dva slučaja:

(i) $\beta + \delta > 0$. Tada je $\Delta > 0$, pa sustav ima jedinstveno rješenje (C_1, C_2); rubni problem ima jedinstveno rješenje (21).

(*ii*) $\beta = \delta = 0$. Tada je $\Delta = 0$, pa sustav ili nema rješenja ili rješenje nije jedinstveno. Rubni uvjeti su

$$u'(0) = u'(l) = 0, \tag{25}$$

tj. radi se o slučaju kad su oba kraja slobodna. Ako rješenje postoji, iz (22) odnosno (23) slijedi

$$C_1 = 0 \tag{26}$$

odnosno

$$\int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{27}$$

Obratno, ako vrijedi (27), onda je za svako C_2 funkcija

$$u(x) = -\int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{a(\xi)} \int_0^\xi f(\eta)\,\mathrm{d}\eta + C_2 \tag{28}$$

rješenje rubnog problema. Prema tome, *rubni problem ima rješenje ako i samo ako vrijedi* (27); u tom slučaju rješenja ima beskonačno mnogo i dana su formulom (28) (tj. rješenje je određeno do na aditivnu konstantu). Budući su (poprečne) kontaktne sile na krajevima jednake nuli, uvjet (27) znači da je ukupna (poprečna) sila koja djeluje na žicu jednaka nuli. Ako je taj uvjet ispunjen, ravnotežni položaj je određen do na *kruti pomak* cijele žice; zato proizvoljnost konstante C_2 nema fizikalno značenje.

Pri izvodu jednadžbe ravnoteže pretpostavili smo malu deformaciju. Pokazat ćemo da je dobiveno rješenje u Primjeru 2.2 u skladu s tom pretpostavkom. Radi jednostavnosti ograničit ćemo se na rubne uvjete

$$u(0) = u'(l) = 0. \tag{29}$$

Tada je

$$u'(x) = \frac{1}{a(x)} \int_x^l f(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{30}$$

Neka je

$$a_1 = \min_{x\in[0,l]} a(x). \tag{31}$$

Imamo

$$\left| \int_x^l f(\xi)\,\mathrm{d}\xi \right| \leqslant l \max_{x\in[0,l]} |f(x)|. \tag{32}$$

Iz (30) i (31) slijedi

$$|u'(x)| \leqslant \frac{l}{a_1} \max_{x\in[0,l]} |f(x)|. \tag{33}$$

Prema tome, *ako je vanjska sila dovoljno mala (preciznije: $l \max |f| \ll a_1$), deformacija je mala.* To svojstvo rubnog problema zove se *korektnost*.

Ako je $b \neq 0$, rješenje rubnog problema općenito se ne može zapisati formulom.

Teorem 2.1. *Ako je $b \neq 0$, rubni problem (1.28), (16), (18) ima najviše jedno rješenje.*

Dokaz. Neka su u_1 i u_2 rješenja i $u = u_1 - u_2$. Zbog linearnosti problema funkcija u zadovoljava uvjete

$$
\begin{aligned}
(au')' - bu &= 0, && (34)\\
\alpha u'(0) - \beta u(0) &= 0, && (35)\\
\gamma u'(l) + \delta u(l) &= 0. && (36)
\end{aligned}
$$

Pomnožimo li jednadžbu (34) sa u i integriramo po $(0,l)$, dobivamo

$$
-\int_0^l (au')'u \,\mathrm{d}x + \int_0^l bu^2 \,\mathrm{d}x = 0 \tag{37}
$$

ili, nakon parcijalne integracije u prvom članu lijeve strane,

$$
\int_0^l (au'^2 + bu^2)\,\mathrm{d}x + a(0)u'(0)u(0) - a(l)u'(l)u(l) = 0. \tag{38}
$$

Razlikujemo četiri slučaja:

(i) $\beta, \gamma > 0$. Izračunamo li $u(0)$ iz (35) i $u'(l)$ iz (36) i uvrstimo u (38), dobivamo

$$
\int_0^l (au'^2 + bu^2)\,\mathrm{d}x + \frac{\alpha}{\beta}\, a(0)u'^2(0) + \frac{\delta}{\gamma}\, a(l)u^2(l) = 0. \tag{39}
$$

Svi sumandi na lijevoj strani su nenegativni, pa je svaki od njih jednak nuli:

$$
\begin{aligned}
\int_0^l au'^2 \,\mathrm{d}x &= 0, && (40)\\
\int_0^l bu^2 \,\mathrm{d}x &= 0, && (41)\\
\frac{\alpha}{\beta}\, a(0)u'^2(0) &= 0, && (42)\\
\frac{\delta}{\gamma}\, a(l)u^2(l) &= 0. && (43)
\end{aligned}
$$

Iz (40) slijedi $u' = 0$, tj.

$$
u = \text{const.} \tag{44}
$$

Iz (35) slijedi $u(0) = 0$, a iz (44) $u = 0$, tj. $u_1 = u_2$.

Slučajevi (ii) $\beta, \delta > 0$ i (iii) $\alpha, \delta > 0$ analiziraju se analogno.

(iv) $\beta = \delta = 0$. Tada je $u'(0) = u'(l) = 0$. Iz (39) slijedi (40) i (41), iz (40) dobivamo (44), a iz (41) slijedi

$$
u^2 \int_0^l b \,\mathrm{d}x = 0. \tag{45}
$$

Zbog i pretpostavke $b \neq 0$, b je pozitivno bar na nekom intervalu, pa je

$$
\int_0^l b \,\mathrm{d}x > 0. \tag{46}
$$

Iz (45) i (46) slijedi $u = 0$, tj. $u_1 = u_2$. Q.E.D.

U gornjem dokazu u slučajevima (i)–(iii) nismo koristili pretpostavku $b \neq 0$. Ti dokazi dakle vrijede i za $b = 0$. Pretpostavka $b \neq 0$ ima odlučnu ulogu u slučaju (iv); prema Primjeru 2.2 znamo da za $b = 0$ jedinstvenost nema mjesta.

Uvjeti (1) i (2) mogu se oslabiti na razne načine. Ovdje ćemo razmotriti slučaj kad neka od funkcija a, a', b i f ima u točki $x_0 \in (0, l)$ *konačan skok* (prekid 1. vrste; primijetimo da je zbog (1.13) u modelu žice funkcija a nužno neprekidna). Iz (1.26) slijedi da je u točki x_0 kontaktno djelovanje neprekidno, ali zbog (1.19) funkcija u možda nema 1. derivaciju (u' ima možda prekid 1. vrste). Umjesto jednadžbe (1.28) (koja možda ne vrijedi u točki x_0) imamo samo uvjete neprekidnosti funkcije u i kontaktnog djelovanja $q = au'$:

$$u(x_0 + 0) - u(x_0 - 0) = 0 \tag{47}$$

$$(au')(x_0 + 0) - (au')(x_0 - 0) = 0 \tag{48}$$

To su *uvjeti transmisije*; problem transmisije uključuje, naravno, i rubne uvjete. Rješenje problema pripada klasi $C([0, l]) \cap C^{(2)}([0, x_0]) \cap C^{(2)}([x_0, l])$; ako je a neprekidno u x_0, rješenje pripada klasi $C^{(1)}([0, l]) \cap C^{(2)}([0, x_0]) \cap C^{(2)}([x_0, l])$.

Primjer 2.3. Žica je sastavljena od dvaju homogenih komada $(0, x_0)$, (x_0, l) s linijskim gustoćama mase ϱ_1 i ϱ_2 i napeta horizontalno utegom mase $M > 0$; oba kraja su učvršćena. Odredimo ravnotežni položaj žice u polju sile teže. Gustoća linijske sile ima u točki x_0 skok:

$$f(x) = \begin{cases} \varrho_1 g, & 0 \leqslant x < x_0 \\ \varrho_2 g, & x_0 < x \leqslant l. \end{cases} \tag{49}$$

Jednadžba ravnoteže glasi ovako:

$$-gMu''(x) = \varrho_1 g, \quad x \in (0, x_0), \tag{50}$$

$$-gMu''(x) = \varrho_2 g, \quad x \in (x_0, l). \tag{51}$$

Uzimajući u obzir rubne uvjete $u(0) = u(l) = 0$, iz (50) i (51) dobivamo

$$u'(x) = -\frac{\varrho_1 x}{M} + C, \tag{52}$$

$$u(x) = -\frac{\varrho_1 x^2}{2M} + Cx \tag{53}$$

za $x \in (0, x_0)$,

$$u'(x) = -\frac{\varrho_2 x}{M} + D, \tag{54}$$

$$u(x) = -\frac{\varrho_2}{2M}(x^2 - l^2) + D(x - l) \tag{55}$$

za $x \in (x_0, l)$; ovdje su C i D konstante. Uvrštavajući to u uvjete transmisije (47) i (48), dobivamo za C i D sustav

$$C - D = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{M} x_0, \tag{56}$$

$$x_0 C + (l - x_0)D = \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2M} x_0^2 + \frac{\varrho_2}{2M} l^2. \tag{57}$$

Iz toga nalazimo

$$C = \frac{\varrho_2 l}{2M} - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2Ml} x_0^2 + \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{M} x_0, \tag{58}$$

$$D = \frac{\varrho_2 l}{2M} - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2Ml} x_0^2, \tag{59}$$

pa imamo

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{\varrho_1 x^2}{2M} + \left(\frac{\varrho_2 l}{2M} - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2Ml} x_0^2 + \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{M} x_0\right) x, & x \in [0, x_0], \\ -\frac{\varrho_2}{2M}(x^2 - l^2) + \left(\frac{\varrho_2 l}{2M} - \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2Ml} x_0^2\right)(x - l), & x \in [x_0, l]. \end{cases} \tag{60}$$

Primjer 2.4. Tanki cilindrični štap sastavljen je od dva homogena dijela $(0, x_0)$ i (x_0, l) s koeficijentima provođenja a_1 i a_2, respektivno. Krajevi $x = 0$ i $x = l$ podržavaju se na temperaturi $u = 0$. Odredimo stacionarnu temperaturu štapa, ako je linijska gustoća vanjskog toplotnog fluksa $f = 1$. Jednadžba stacionarnog provođenja je

$$-a_1 u''(x) = 1, \quad x \in (0, x_0), \tag{61}$$

$$-a_2 u''(x) = 1, \quad x \in (x_0, l). \tag{62}$$

Uzimajući u obzir rubne uvjete $u(0) = u(l) = 0$ i uvjete transmisije (47) i (48), kao u prethodnom primjeru dobivamo

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2a_1} x^2 + \frac{a_1(l^2 - x_0^2) + a_2 x_0^2}{2(a_1 a_2 - a_1^2)x_0 + 2a_1^2 l} x, & x \in [0, x_0], \\ -\frac{1}{2a_2}(x^2 - l^2) + \frac{a_1(l^2 - x_0^2) + a_2 x_0^2}{2a_2 x_0(a_2 - a_1) + 2a_1 a_2 l}(x - l), & x \in [x_0, l]. \end{cases} \tag{63}$$

Zadatak 2.5. Dokažite teorem jedinstvenosti za problem transmisije.

Zbog linearnosti rubnog problema, rubni uvjeti se mogu *homogenizirati*. Neka funkcija v zadovoljava uvjete (16) i (18) i neka je $u_1 = u - v$. Uvrstivši $u = u_1 + v$ u (1.28), (16) i (18), dobivamo

$$(au_1')' - bu_1 + f_1 = 0, \tag{64}$$

$$\alpha u_1'(0) - \beta u_1(0) = 0, \tag{65}$$

$$\gamma u_1'(l) + \delta u_1(l) = 0, \tag{66}$$

gdje je

$$f_1 = f + (av')' - bv. \tag{67}$$

Funkcija u je rješenje problema (1.28), (16), (18), ako i samo ako je funkcija u_1 rješenje problema (64)–(66). Prema tome, bez smanjenja općenitosti možemo ubuduće pretpostaviti da su rubni uvjeti homogeni.

Zadatak 2.6. Odredite linearnu funkciju koja zadovoljava uvjete (16) i (18).