1.

PROBLEMSKA NASTAVA od metode do nastavne strategije

Kvaliteta učitelja matematike ogleda se u njegovoj sposobnosti zaokupljanja pozornosti slušatelja, uočavanja njihovih reakcija, poticanja na aktivno učenje. Učitelj komunicira s učenikom živom riječi, pomoću udžbenika, računala i drugih pomagala.

Autori udžbenika, primjereno propisanim nastavnim planovima i programima, logično razrađuju zadane sadržaje opisujući ih i/ili dokazujući, ovisno o dobi učenika kojima je udžbenik namijenjen. Objašnjavanje teksta iz udžbenika, kao i njegova prilagodba svakom učeniku do razine razumijevanja, prepušta se brizi i umješnosti učitelja matematike.

Kako pomoći razumijevanju matematičkog pisma i teksta, kako pojasniti dobre zamisli, kako postići načelno toliko zahtijevanu aktivnu izobrazbu učenika u praksi, uglavnom se čuje na predavanjima na studiju učitelja matematike. I dok smo vrlo bogati sjajno napisanim matematičkim knjigama iz najrazličitijih područja matematike – algebre, analize, geometrije, vjerojatnosti, topologije, kao i zbirkama s vrlo zanimljivim zadatcima bez kojih je sigurno teško dobro organizirati nastavu, gotovo je nemoguće pronaći napisanu knjigu o teškoćama pri poučavanju matematike, kao i načinima rada koji pridonose oživljavanju ideja kao što su razvoj stvaralačke misli i logičkog mišljenja kod učenika, za što se izrijekom zalažemo.

Pisanju takve knjige teško se odlučuje čak i vrlo uspješan znanstvenik – matematičar, ako prethodno nije više godina proveo u neposrednom radu s učenicima osnovne i srednje škole. Onaj tko je iskusio težak posao podučavanja, znat će da je bit problema u činjenici nastoji li učenik uopće učiti ili ne. Učitelj je svakodnevno suočen s velikim brojem učenika koji jedva nastoje ili uopće ne nastoje učiti.

S druge strane, nije dovoljno raditi neposredno s djecom učeći na njihovim pogrješkama i teškoćama. Bavljenje problemima nastave matematike traži stalno produbljivanje fundamentalnih postignuća u matematici, iščitavanje pronalazaka najvećih matematičara u povijesti, osluškivanje smjerova poučavanja u svijetu, praćenje tema vezanih za učenje i poučavanje iz područja psihologije, didaktike i pedagogije, ekonomije, umjetnosti, strojarstva, elektrotehnike, zato što je dobro bar ponekad ukazati na svrhovitost i primjenu matematike. Sve to s ciljem kako bi se razumjele teškoće učenika u shvaćanju matematičkih pojmova i sadržaja kada žele učiti i kako bi se iznašli načini pobuđivanja pozitivnog odnosa prema učenju kod onih učenika koji ga nemaju.

Kraće bismo to mogli nazvati stvaranjem ozračja aktivnog učenja.

Sagledavanje puta do usvajanja pojma, ukazivanje na vrludanja pri rješavanju iskrslih problema do kojih smo došli često dugotrajnim tapkanjem i uz mnogo pokušaja i pogrješaka, vrlo je korisno.

Naime, iznošenje gotovog rješenja nekog problema predstavlja sređen plod oduševljenja pri otkriću i kao takav podgrijava iluziju da je rješenje sretan dar slučaja. Korisno je ako u analizi rješenja nekog zadatka ukažemo i na krive pokušaje, ali i na male dosjetke koje ukazuju na temeljito istraživanje kao sigurniji put do rezultata.

Važno je i vrijeme sazrijevanja nekog problema. To je vrijeme od trenutka kada je neko pitanje za nas postalo problem i zaokupilo naše misli pa sve do trenutka rješenja i sistematizacije tog rješenja. Iskustvo nas uči da usvajanju pojma i otkriću rješavanja problema pridonose dugi, nekontrolirani procesi razmišljanja, koji sazrijevajući vode k sjajnom trenutku pronalaska.

Nije lako prebaciti težište pri poučavanju matematike s usvajanja matematičkih pojmova na razvijanje matematičkih sposobnosti učenika, ne u smislu zanemarivanja onog prvog, nego u izboru upravo onih sadržaja koji omogućuju više od zapamćivanja samih činjenica, koji dopuštaju razmahati se uočavanjem veza i odnosa.

Kao primjer može poslužiti definicija derivacije funkcije iz udžbenika matematike za IV. razred gimnazije [7, 232]*.

Derivacija funkcije f u nekoj točki x_0 *je broj*

$$f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to \infty} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{\triangle x \to \infty} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x},$$

ukoliko ovaj limes postoji.

Ova definicija u potpunosti zadovoljava profesionalnog matematičara. Ali neiskusan čitatelj – učenik , čak i pod pretpostavkom da je strpljivo i s razumijevanjem pročitao sve do 232. stranice ovog udžbenika, ne može osjetiti svu snagu pojma o kojem se govori u ovoj definiciji. Iako se u spomenutom udžbeniku pojam derivacije funkcije uvodi na sveobuhvatniji i domišljatiji način nego u dosadašnjim udžbenicima, ukazujući na vezu s pojmom brzine i koeficijentom smjera tangente grafa funkcije $f(x)$ u točki apscise x_0 spominjući čak i povijesni aspekt ovog problema, nikada dosta primjera koji će rasvjetljavati pojam limesa, objašnjavati što znači to – ukoliko postoji itd. Ovom pojmu prethodi pojam limesa niza kao "lakši" pojam. Najvažnije je shvatiti pojam i zapis beskonačnog niza. To obično provjeravamo pitanjem: Koliko ima članova niza između elemenata $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{9}$ u beskonačnom nizu $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{9}, \ldots$.

Sve dok su učenici u nedoumici misli li se ovdje samo na $\frac{1}{3}$ ili "i na one članove koji nisu zapisani", nemaju jasnu predodžbu beskonačnog niza. Niz zadan općim članom $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, prikladan je za upoznavanje pojma limesa beskonačnog, konvergentnog niza. Možemo jako "uvećati" interval $[0, 1]_{\mathbf{R}}$ u kojem "žive" svi članovi tog beskonačnog niza. "Vidimo" početne krupne korake – raspored stanova uzastopnih

* Prvi broj u zagradi označava redni broj navedene knjige u popisu literature, a drugi označava broj stranice na kojoj je navod.

članova, koji se – kako n raste, sve više i više usitnjavaju. Poslije, kada n postane jako, jako velik, gotovo tapkamo u mjestu čežnjivo, ali bez nade da ćemo dospjeti u nulu. Ovdje je lako izračunati za svaku, ma kako malu ε udaljenost od 0, da su gotovo svi tu, a samo njih konačno mnogo (za zadani ε točno znamo i koliko) u preostalom, komplementarnom dijelu promatranog intervala.

Motivacija oko napora za verbalnim usvajanjem matematičkog pojma iza kojeg treba stajati usvojena apstrakcija, a ne mehanički zapamćen niz slova koje smo u stanju zapisati, možda i točno izgovoriti, ali od čega nema stvarne koristi, ostaje mučan zadatak učitelja praktičara. Ključno pitanje – je li uistinu pravi trenutak za usvajanje pojmova na mjestima propisanim nastavnim planom i programom, nikada se ne postavlja praktičaru, nego uglavnom nameće odozgo.

Učitelju iz prakse ostaju pitanja – kako uspješno stvoriti veze između naučnog otkrića, zapisane misli, usvojenog znanja i aktivnog djelovanja u razredu, tj. poučavanja? Na koji način razviti sposobnosti učenika?

Oni koji obrazuju učitelja pitaju se kako pripremiti učitelja matematike za sagledavanje istog problema s raznih aspekata, na sučeljavanje s onima koji imaju drugačije mišljenje. Kako mu pomoći da se osnaži iznijeti svoje argumente, kako ga osposobiti slušanju tuđih iskustava i udubljivanju u njihova promišljanja? To što nekoga ne razumijemo, još uvijek ne znači da taj govori gluposti.

Kako (p)ostati dobar učitelj matematike?

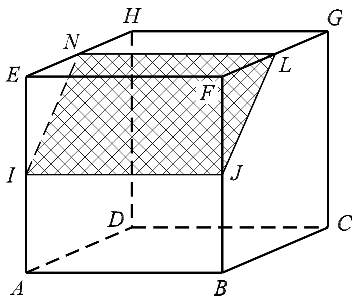
U ovoj knjizi pokušat ćemo težište izobrazbe budućeg učitelja matematike staviti na osposobljavanje za organizaciju nastave u kojoj ćemo razvijati učenikove sposobnosti i pripremati ga za istraživački rad. Nadamo se da ćemo pritom odabrati dobre matematičke primjere kako bismo ovaj vid učiteljeve zadaće pokazali u raznovrsnim aktivnostima učitelja matematike. Uostalom, ako kod mladih učitelja pobudimo zanimanje za razna gledišta u nastavi matematike, a kod vrijednih, istaknutih praktičara potaknemo polemiku, postigli smo svoj cilj.

1.1. O sposobnostima za matematiku

U svakom odjelu sjedi nekoliko učenika od kojih bi se znalačkim radom učitelja matematike mogli razviti istraživači i znanstvenici. Zovemo ih darovitim učenicima. Zadaća je učitelja prepoznati ih te izborom primjerenih, često nestandardnih zadataka, poraditi na razvoju sposobnosti tih učenika. Svaki zadatak – problem koji učenik nije rješavao predstavlja izazov otkrića i mogućnost radosne potvrde kad ga riješi. Iako rabimo sintagmu "posebno daroviti učenici", nismo u stanju jednom riječi odgovoriti na pitanje što mislimo pod činjenicom da neko dijete ili adolescent posjeduje posebne sposobnosti za matematiku. U vezi s tim pitanjem provedena su mnoga istraživanja i ponuđena razna mišljenja.

V. Haecker i *G. Zichen* 1931. g. smatraju da postoje četiri komponente matematičke sposobnosti: prostorna, logička, metrička i simbolička.

Zaista, već se od učenika u osnovnoj školi očekuje da izračuna površinu isjenčanog lika u jediničnoj kocki $ABCDEFGH$ ako su točke I, J, L i N polovišta odgovarajućih bridova.



Sl. 1.

Samo naoko trivijalan zadatak. Traži od učenika sposobnost prostornog predočavanja kocke. Sa slike nije vidljivo, ali mora znati da su sve plohe kocke sukladni kvadrati. Iako je vidljivo, mora obrazložiti da su dužine $\overline{JL}$ i $\overline{IN}$ paralelne i jednake duljine (kao srednjice sukladnih trokuta $\triangle BGF$ i $\triangle AHE$). Nije vidljivo, ali iz podatka da po dvije susjedne plohe kocke zatvaraju pravi kut, zaključuje da je dužina $\overline{IJ}$ okomita na ravninu BGF pa onda i na pravac JL te ravnine. To upućuje na zaključak da je $\sphericalangle IJL = 90^\circ$.

Za određivanja duljina stranica isjenčanog lika, ne pomaže mjerenje. Opet treba zaključiti da je

$$|IJ| = |NL| = 1.$$

Ako se zna da je dijagonala kvadrata stranice a dana formulom $d = a\sqrt{2}$, zaključuje se da je

$$|JL| = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Samo uz razvijeni prostorni zor, poznavanje neophodnih činjenica, logičko zaključivanje, učenik će biti u stanju otkriti da je isjenčani četverokut pravokutnik površine

$$p(IJLN) = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

Geometrijski problemi prikladni su za otkrivanje učenika s matematičkim sposobnostima, a s druge strane rješavanjem takvih zadataka razvijamo sposobnosti za matematiku.

W. Lietzman, 1941. g. misli da su matematičke sposobnosti samo sposobnosti rasuđivanja u određenoj situaciji uz korištenje matematičkih simbola.

G. Revesz, 1952. g. smatra da postoje dva osnovna oblika matematičke sposobnosti: aplikativna i produktivna. Aplikativna se ogleda u sposobnosti brzog otkrivanja matematičkih relacija i primjene odgovarajućeg znanja u analognim slučajevima. Produktivna se ogleda u sposobnosti otkrivanja relacija koje tek posredno proizlaze iz postojećeg znanja.

J. Werdelin, 1958. g. drži da se matematičke sposobnosti prepoznaju u razumijevanju biti matematičkih i njima sličnih sustava, simbola, metoda i dokaza, a zatim i u njihovom zapamćivanju, reprodukciji, izlaganju i primjeni u rješavanju problema. Pritom su razumijevanje i primjena reproduktivni i produktivni aspekt te sposobnosti.

Veliki doprinos objašnjenju matematičkih sposobnosti dali su *Kolmogorov* i *Krutecki*.

Svakom učitelju praktičaru jasno je da moguća "prirodna", "potencijalna" sposobnost djeteta može ostati neotkrivena ili se doista razvijati, obično do između osamnaeste i dvadesete godine. To zavisi od uvjeta života, a posebno od primjerenih poticaja koje dijete ili adolescent dobije nastavom matematike.

Svaki učitelj praktičar mogao bi nabrojiti mnoge pojedinačne učeničke sposobnosti, koje ukazuju da se radi o darovitom učeniku. Zaista, sposobnost za matematiku prepoznajemo u izrazitoj sposobnosti zaključivanja na višoj, apstraktoj razini te brzom i uspješnom izvođenju potrebnih uopćavanja.

Sposobnost za matematiku očituje se u mogućnosti učenika za uočavanjem i otkrivanjem relacija u raznim zadatcima (pojavama) te spretnosti korištenja matematičkih simbola.

Sposobnost za matematiku nalazimo kod učenika koji su kreativni i slobodni u razmišljanjima, koji problemskoj situaciji spremno prilaze s raznih strana, s lakoćom mijenjaju tijek i smjer razmišljanja, originalno rješavaju probleme te nakon rješenja postavljaju nove zadatke i probleme.

Primijećena je znatna korelacija između sposobnosti za matematiku i opće intelektualne sposobnosti.

Sklonost prema matematici u korelaciji je s raznim osobinama ličnosti kao što su npr. jasnoća, preciznost, konciznost u izlaganju, razvijen kritički stav. S druge strane, pojačano i zainteresirano bavljenje matematikom razvija strpljenje i upornost u radu, bez čega nema znanstvenika uopće, pa onda ni matematičara.

Kako razvijamo učeničke sposobnosti?

Učeničke sposobnosti razvijamo rješavanjem problema i stoga je važno pitanje u nastavi matematike: Što je to problem?

1.2. O problemu u nastavi matematike

Svako pitanje nije problem. Pitanje postaje problem kad se u slušaču probudi znatiželja za odgovorom. Znatiželjna osoba nije zadovoljna bilo kakvim odgovorom. Postavlja si nova pitanja.

Primjer 1. Na pitanje: *Zašto je nebo plavo?* može se odgovoriti: *Zato što je vrijeme lijepo.* No, takav odgovor ne traži daljnje uzroke tog fenomena. Znatiželjnik proširuje interes daljnjim pitanjima: Zašto nebo u sutonu poprima drugu boju? Ovisi li boja neba o temperaturi zraka, tlaku zraka, kemijskom sastavu atmosfere? Je li povezana s položajem Sunca i Zemlje u svemiru? ... Znatiželjnik je upao u zamku problema.

Očito, ovaj primjer iz svakodnevnice nas uči da problem ne ovisi samo o obliku pitanja. Slušatelj znatno pridonosi činjenici hoće li neko pitanje ili zadatak zaista postati problem i nagnati ga u svijet istraživanja.

Primjer 2. *Nađi najmanji cijeli broj koji pri dijeljenju s 2,3,4,...,10 daje ostatke redom 1,2,3,...,9.*

Ovaj zadatak postaje problem kad ga poželimo riješiti. Taj trenutak pojavit će se kad osjetimo dovoljno samopouzdanja da ćemo zadatak uspješno privesti kraju.

Pitanje kojemu je odgovor poznat više nije problem. Doduše, nije beskorisno sagledati tijek rješavanja nekog riješenog problema, zapisati ga, možda i izložiti slušateljima, ali nijednim od ovih postupaka neće se osjetiti radost i snaga otkrića. Samo vlastitim, manjim ili većim otkrićima razvijamo svoje sposobnosti.

Primjer 3. Prema tome kako se oblikuje isto pitanje može i ne mora biti problem za partnere u dijalogu. Uobičajen pristup pismenim ispitima je ponuditi učenicima već dobro prorađene zadatke, uglavnom s izmijenjenim brojevima. Rijetko se traže poopćenja i rasprave s tim u vezi. Sat ispita je kratak, nema vremena za velika razmišljanja. Učenici znaju da neće biti izloženi pustolovini istraživanja. Rezultati ovakvih pismenih ispita dat će nam informacije samo o formalnim znanjima učenika, ali ne i njihovim sposobnostima primjene veza i odnosa ili mogućem stvaralačkom radu.

Primjer 4. Sigurno je da se mnogi učitelji pored metode izlaganja služe u nastavi i metodom razgovora. Ali istraživanje kroz razgovor na satu vodi se u vezi sa zadatkom koji se rješava. Učenicima dajemo priliku zadatak više puta pročitati, no nema vremena za udubljivanje. Razred mora biti aktivan. Muk se čini neracionalnim. Zadatci su stoga dobro i konkretno formulirani. Učenici su sigurni da će se rješenje pronaći do zvona. Koliko god je ovakav rad koristan, on ne može biti dovoljan za putovanje u neistraženo, s hrpom sumnji, poteškoća, ali i nagradom radosti otkrića.

Naviku istraživačkog rada možemo usađivati u učenike zadavanjem malih, interesantnih problema, nevezanih za vrijeme izrade.

Važno je osloboditi se mača školskog zvona i navike zadavanja domaćih zadaća isključivo od sata do sata. Dobro je da uvijek neki primjeren problem “lebdi u zraku”, da o njemu učenici promišljaju danima i tjednima, donose parcijalne rezultate, sređuju razna izvješća o problemu, postavljaju nova pitanja, dolaze do zaključaka.

Primjer 5. *Može li se konstruirati kružnica koja prolazi polovištima stranica četverokuta?*

Učenikov odgovor može biti: *da* ili *ne*. No, daleko je važnije pratiti učenikovo promišljanje oko tog problema ili bar poslušati njegove argumente u svezi s odgovorom.

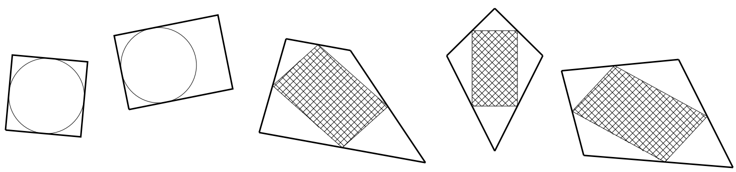
Ljudski put otkrivanja je krivudav. Kreće se od pojedinačnih slučajeva, donose se hipoteze koje se daljnim promišljanjima pokazuju točne ili krive. Ponekad te iste hipoteze odvode istraživača u nova, neplanirana otkrića. Lijep primjer za to je Eulerovo "slučajno" otkriće čuvene formule

$$E - K + F = 2$$

za poliedre, gdje je E broj vrhova, F broj strana, a K broj bridova poliedra. Tu formulu Euler je otkrio tražeći stereometrijski analogon poučka o zbroju kutova u trokutu.

O tome više u knjizi koja ovoj prethodi [23, 69].

U namjeri da riješe primjer 5. učenici će možda krenuti od kvadrata, pa prebrzo ponuditi potvrdan odgovor. No već kod pravokutnika stvar će propasti. Možda ipak, crtajući razne četvrokute i označavajući polovišta njihovih stranica, otkriju da su to vrhovi paralelograma.



Sl. 1.

Tražeći odgovor na postavljeno pitanje zadanog problema bar poneki učenik naslutit će, a onda neki od njih i dokazati, da polovišta uzastopnih stranica svakog četverokuta određuju vrhove paralelograma.

Taj se zadatak nalazi gotovo u svim zbirkama zadataka, ali čar pronalaska te hipoteze, autori zbirki sačuvali su za sebe. Učitelj zagovornik problemske nastave naći će načina kako potaknuti svoje učenike na pothvate koji vode zadovoljstvu pronalaska. Postavljeni zadatak u primjeru 5. privikava učenika da i negativan odgovor može biti traženi rezultat.

Primjer 6. Nakon što se učenici upoznaju s Heronovom formulom za izračunavanje površine trokuta prikladno je zadati problem:

Što možete reći o površinama trokuta istog opsega?

Učenici će vjerojatno odabrati konkretnu veličinu za opseg. Uzet će stalnu vrijednost za osnovicu. Srest će se s problemom izbora duljina stranica za zadani opseg. Neki će promišljati o mogućnosti konstrukcije trokuta iz tri dužine. Neki će se zadovoljiti dobro odabranim slučajem pa će varirati duljine preostalih dviju stranica, vodeći računa o zadanom uvjetu. Računat će površinu Heronovom formulom. Možda neki otkriju da u seriji tako odabranih slučajeva jednakokračan trokut ima najveću površinu. Možda se dosjete izračunati površinu jednakostraničnog trokuta istog opsega pa ustanove da je ona najveća. Pri rješavanju ovakvog zadatka važno je promišljanje, planiranje, pisanje tablica i slutnja o djelomičnom rješenju izoperimetrijskog problema.

Možda neki od učenika sam postavi isto pitanje vezano za četverokute, peterokute, šesterokute . . . Ako to učenici sami ne učine, učitelj će postaviti daljnji problem. Možda netko od učenika nasluti glavni teorem izoperimetrijskog problema! Tek potom, učitelj će preporučiti popularni izvor primjerice knjižicu [14] koji će učenika uputiti u rješavanje toga problema u prošlosti, kao i na dokaze primjerene mogućnostima učenika.

Najveća je učiteljeva pogrješka njegova žalosna navika da unaprijed otkriva rješenja problema.

Primjer 7. Zadavanje jednostavnog problema koji je u neku ruku temelj nekog matematičkog sadržaja kojim se trenutno bavimo ili se tek namjeravamo pozabaviti, jako je dobar način navikavanja na istraživački rad. Na primjer u vrijeme kad se pripremamo za preslikavanje prostora u II. razredu gimnazije [6, 186], dobro je postaviti problem:

Jesu li stranice jednakokračnog trokuta simetrično pridružene s obzirom na simetralu kuta nasuprot osnovici?

Neka se učenici dulje vrijeme bave tim pitanjem. Neka konstruktivno i eksperimentalno provjere odgovor na postavljeno pitanje. Neka izlože svoje argumente, neka dokažu svoju tvrdnju.

To je primjer aktivnog uvoda u shvaćanje osne simetrije u prostoru.

Problem koji predstavlja poopćenje prethodnog zadatka je pitanje: što možete reći o pravcu ravnine s obzirom na koji su osnosimetrično pridružene figure F_1 i F_2 iz iste ravnine?

Iskustvo iz prethodnog zadatka trebalo bi podsjetiti na zaključak da je svaka točka simetrale, polovište parova osnosimetričnih točaka od kojih jedna pripada figuri F_1, a druga figuri F_2, pri čemu je dužina omeđena simetrično pridruženim točkama okomito postavljena na simetralu. Variranjem figura dajemo priliku oštroumnosti i aktivno pripremamo učenika za točku 7.5. *Preslikavanja prostora* spomenutog udžbenika za II. razred gimnazije [6, 186].

Stalni su prigovori praktičara da se programima neumoljivo nagomilavaju novi pojmovi, da se smanjuje broj sati matematike, da su uvjeti za stvaralački rad sve gori. Mislimo da se na stvar može gledati i drugačije. U toj šumi pojmova treba prepoznati mogućnosti za pripremanjem matematičkih pustolovina otkrića, u kojoj bi se učenik mogao naći u ulozi istraživača. Učiteljeva je zadaća odabrati pojmove koji su prilagodljivi takvoj pripremi i obradi. Pritom je sigurno da će prosječni rješavač zaboraviti primjerice sve mogućnosti vrsta i broja rješenja kvadratne jednadžbe, kao i uvjete kojima se oni mogu predvidjeti, čak i ako je nastava heuristički vođena. Ali će ostati navika i sposobnost sagledavanja raznih posljedica sličnih okolnosti pri promjeni parametara koji ju determiniraju. Naravno, ako se učitelj pri obradi kvadratne funkcije ali i drugih tema, opredijelio za istraživački rad, a ne davanje gotovih formula.

Pri rješavanju problema, posebno geometrijskih, značajnu ulogu igra strpljenje. Problem je poput manje ili više složene igračke koju smo rastavili u dijelove. Rješavanje nije samo puko sastavljanje dijelova već i misaono nadopunjavanje onog što nedostaje i traganje za takvim dijelovima. U toj namjeri "rastavljamo" gotovo rješenje, nadopunjujemo crtež, provjeravamo ideje algebarski i radimo na djelotvornim kombinacijama. Učitelja početnika dobro je upozoriti na zapažanje psihologa o pogrješkama koje čovjek čini na prijelazu iz faze koncentracije na fazu opuštanja.

Čest je slučaj da učenik otkrije put rješavanja, napravi dobar plan, ali pogriješi pri malim koracima u računanju ostvarujući dobar plan. Rezultat je netočan unatoč dobro pripremljenom težem dijelu posla.

Stoga je dobro upućivati učenike da složeni zadatak razlože na više manjih, parcijalnih zadataka koje će pozorno riješiti, a tek potom sklapati u cjelinu.

Primjer 8. Računamo li derivaciju kvocijenta neke složene funkcije, učenik dobro kreće od izraza

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

Dobro je preporučiti, bar u početku, posebno derivirati $u(x)$, zatim $v(x)$, naći produkt $u'(x)\cdot v(x)$, zatim $u(x)\cdot v'(x)$, pa sve to supstituirati u polaznu funkciju.

S druge strane ustrajati na detaljnom pisanju svih računa, iako je iz učenikova rada vidljivo da je račun spretno i točno proveden u glavi, po našem sudu suvišno je, a može i odbojno djelovati kod nadarenijeg učenika.

Učenik koji ima poteškoća u orijentaciji teško će se snalaziti u problemskoj nastavi. U praksi ćemo ponekad naići na učenike koji nisu sigurni koja im je lijeva, a koja desna ruka.

Takve smetnje, prema saznanju psihologa, javljaju se kod ljevorukih, odnosno onih na koje smo izvršili pritisak još u djetinjstvu da pišu desnom rukom, a prirodni su ljevaci. Kod takve djece mogu se javiti teškoće kod ovladavanja čitanja i pisanja, pravopisa, ali i računskih operacija. Takve se osobe u svom razmišljanju stalno vraćaju na svoje polazno uporište, promišljanje traje dulje, ulaže se napor i koncentracija, produžuje se vrijeme reagiranja. Odgojem preusmjerena ljevorukost ponekad uzrokuje oklijevanje, nespretnost i povećani umor, što rezultira mnogim pogrješkama.

U nastavi matematike takva djeca imaju poteškoća pri zamjeni procjena: gore – dolje, direktno – indirektno, polazno – inverzno preslikavanje. Tako ćemo kao učitelji ostati zatečeni kad nakon višemjesečnog vježbanja računskih operacija s cijelim brojevima u VII. razredu osnovne škole učeniku još uvijek treba vremena da bi riješio primjerice zadatak:

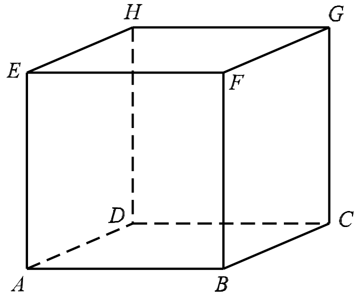
$$(+5) + (-7) = \qquad .$$

Začudit će nas ako učenik još uvijek mora utvrđivati da se ovdje radi o zbrajanju cijelih brojeva nejednakih predznaka, zatim izriče pravilo o zbrajanju takvih brojeva te nakon pažljivog razmišljanja izriče korektan rezultat. Ovdje se očito ne radi o automatizmu, ali učenik ulaže trud kako bi, unatoč svojim teškoćama u orijentaciji, došao do točnog reultata, ali samo ako njegov učitelj pokazuje potpuno strpljenje, pa učenik ima puno povjerenje u njega. Pokaže li učitelj nestrpljenje, a odjel izvrgne takvog učenika porugi, šanse da takav učenik postane uspješniji vrlo su male.

Osobito je važno da učitelj zna i za takvu mogućnost uzroka neuspjeha učenika. Sporost i pogrješke učenika s takvim problemima potpuno je krivo pripisati nepažljivosti, lijenosti ili čak smanjenim intelektuualnim sposobnostima. Upućivanje djeteta u nabavku, manipulacija novcem, zaradom, dugom itd. može pojačati motivaciju za uvježbavanje računskih operacija s cijelim brojevima različitih predznaka, ali svladavanje poteškoća koje su posljedica smetnji u orijentaciji ipak nisu stvar učitelja matematike već liječnika specijaliste. Dovoljno je i vrlo važno da učitelj otkrije takve učenike i uputi ih liječniku.

Pozornost učenika u nastavi matmatike održavamo i malim neuobičajenim problemima koji predstavljaju prikladan odmak od sadržaja koji proučavamo.

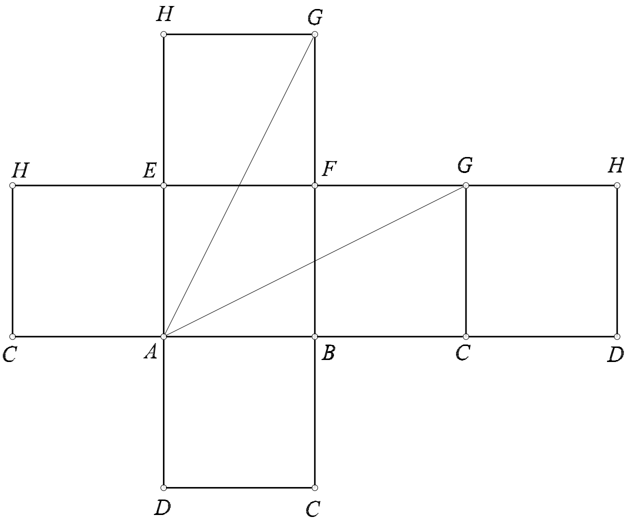
Primjer 9. *Nakon što učenici usvoje pojam udaljenosti dviju točaka euklidske ravnine, prikladno ih je upitati za najkraći put po plohi kocke od vrha A do vrha G.*



Sl. 2.

U skladu s prethodnim saznanjem o pojmu udaljenosti, većina učenika predložit će kao rješenje duljinu dužine $\overline{AG}$. Kada ih upozorimo da je prostor kojim se krećemo ploha kocke, neki će kao najkraći put označiti stazu koja se sastoji od dijagonale $\overline{AF}$ i brida $\overline{FG}$.

Ako se sami učenici ne dosjete, učitelj će predložiti eksperimentiranje s mrežom kocke.

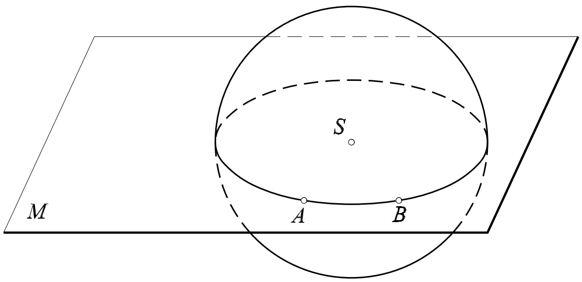


Sl. 3.

Očito da ima dva takva jednako duga puta. Dobro je postaviti daljnji problem. Putujemo li po plohi kocke od vrha do vrha najkraćim putovima, koliko ima različitih putova i kolike su njihove duljine?

Primjer 10. *Kako bismo definirali udaljenost dviju točaka na sferi?*

Odmah je jasno da će staza biti luk neke kružnice. No, s dvije točke nije jednoznačno određena kružnica.



Sl. 4.

S tri nekolinearne točke jednoznačno je određena ravnina.

Položit ćemo točkama A, B i središtem S sfere ravninu M. U presjeku sfere i ravnine M je kružnica kojoj pripadaju točke A i B. Duljinu kraćeg luka $\overset{\frown}{AB}$ zvat ćemo udaljenošću točaka A i B na sferi. Udaljenost točaka na sferi je $0 \leqslant d(A, B) \leqslant r\pi$, gdje je r polumjer sfere.

1.3. O definiciji i aksiomu u nastavi matematike

U srednjoškolskoj nastavi matematike uvodimo pojmove strožim definicijama nego u osnovnoj školi, izričemo aksiome, dokazujemo teoreme, rješavamo zadatke, ponekad probleme.

Što su to definicije? Mogli bismo reći da su definicije neke teorije postulirane*, istinite tvrdnje te teorije. No nisu li to onda aksiomi** te teorije?

Svaka definicija jest dodatni aksiom neke teorije. Sve što se u teoriji može izraziti uz pomoć definiranog pojma može se, najčešće složenije, izraziti i bez njega. No kad bismo tako radili, složenost teorije ubrzo bi se umnogostručila pa je velika važnost definicija za razvijanje svake teorije. Dobrim definicijama pridonosimo konciznosti i jednostavnosti teorije.

Što su aksiomi?

Aksiomi su, grubo govoreći, osnovne tvrdnje koje se pojavljuju na samom početku matematičkih teorija, jer se pomoću njih opisuju osnovna svojstva objekata te teorije. Aksiomi predstavljaju temelj kasnijih dedukcija te teorije. To gledište pokriva samo onaj slučaj kada s aksiomima želimo prikazati i istražiti jednu jedinu strukturu. Sustav aksioma treba biti nezavisan, neproturječan i potpun.

Sustav aksioma je nezavisan ako ni jedan od aksioma iz tog sustava niti ikoji njegov dio nije moguće deduktivno izvesti iz preostalih aksioma.

Sustav aksioma neproturječan je ako se iz njega ne može dedukcijom izvesti neka tvrdnja i njezina negacija.

I konačno, sustav aksioma je potpun ako daje odgovor na svako pitanje teorije izgrađene iz tog sustava.

Primjer 1. *Najpoznatije aksiomatizacije jesu Peanova aksiomatizacija aritmetike i Euklidova aksiomatizacija geometrije.*

Držimo li se Dedekindove postavke da su matematički nevažne razlike među izomorfnim strukturama, dolazimo do zaključka da se klasa svih onih struktura koje zadovoljavaju Peanove aksiome svodi na jednu jedinu koja je definirana tim aksiomima. Pritom je matematički nevažno što je to prirodni broj. Matematički značajno jest do izomorfizma određena struktura aritmetike, a ona je definirana Peanovim aksiomima.

Euklidovom aksiomatizacijom interpretira se dvodimenzionalni, fizički prostor.

Tako shvaćeni aksiomi neke matematičke teorije izriču osnovna svojstva strukture kojom se ta teorija bavi i predstavljaju njezin standardni model. Spomenutu strukturu ti aksiomi definiraju do izomorfizama pa se sva svojstva izučavane strukture mogu deducirati iz aksioma koji je definiraju.

Ako aksiomi neke teorije ne definiraju samo njene osnovne pojmove nego definiraju klasu svih onih struktura koje zadovoljavaju te aksiome, onda za takve aksiome kažemo da su **implicitne definicije.**

---
* postulare – lat. tražiti, zahtijevati, primati kao polaznu točku
** aksiom – grč. osnovno načelo koje ne traži dokaza jer je neposredno očito

Primjer 2. *Implicitnu definiciju grupe zovemo još i aksiomima teorije grupa.*

Trojka $(G, \circ, e)$*, sastavljena od nepraznog skupa* G*, binarne operacije "*$\circ$*" na* G *i istaknutog elementa* e *iz* G*, takva da vrijedi*

1. $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z, \quad za \quad \forall x, y, z \in G$

2. $x \circ e = e \circ x, \quad za \quad \forall x \in G$

3. $(\forall x \in G)(\exists y \in G) x \circ y = y \circ x = e$

zove se grupa.

Primjer 3. *Za binarnu relaciju* ρ *koja je podskup kartezijevog produkta,* $\rho \subseteq A \times A$*, kažemo da je relacija ekvivalencije ako vrijedi*

1. $x\rho x$*, za svaki* $x \in A$*, svojstvo refleksivnosti*

2. $x\rho y \Rightarrow y\rho x$*, za svaki* $x, y \in A$*, svojstvo simetričnosti*

3. $(x\rho y \wedge y\rho z) \Rightarrow (x\rho z),$ *za svaki* $x, y, z \in A$*, svojstvo tranzitivnosti.*

Osim implicitnih definicija, spomenimo još i **rekurzivne definicije**.

Primjer 4. *Za primjer rekurzivne definicije uzet ćemo uobičajene definicije operacija zbrajanja i množenja u okviru aritmetike prirodnih brojeva:*

1. *Za svaki prirodni broj* m *je* $m + 1 = s(m)$

2. $m + s(n) = s(m + n)$

3. $m \cdot 1 = m$

4. $m \cdot s(n) = m \cdot n + m,$

gdje je $s(n)$ *sljedbenik prirodnog broja* n*.*

Dane definicije izvađene su iz okvira aritmetike prirodnih brojeva [23, 79].

Općeprihvaćeno je da se (1), (2), (3) i (4) nazivaju rekurzivnim (induktivnim) definicijama zbrajanja i množenja jer su u standardnom modelu aritmetike, sa standardnom domenom prirodnih brojeva: 1,2,3,... i standardnom funkcijom sljedbenika $s(1) = 2, s(2) = 3, \ldots,$ operacije zbrajanja i množenja jednoznačno određene definicijama (1), (2), (3) i (4).

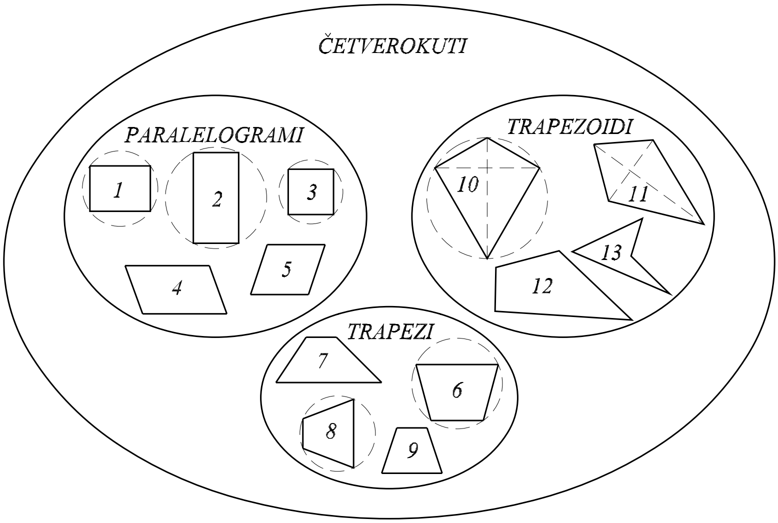
U srednjoškolskoj nastavi matematike pri prvom spomenu nekog pojma u udžbeniku, izlaganju, članku itd. trudimo se objasniti značenje uvedenog pojma pomoću drugih, poznatih, osnovnih ili već objašnjenih pojmova. To "predstavljanje" pojma zovemo definicijom. Logičari bi rekli da je definicija sud kojim se nedvosmisleno određuje sadržaj i opseg nekog pojma. Pojmove koji se ne mogu opisati jednostavnijim pojmovima, nazivamo **osnovnim pojmovima.**

Primjer 5. *U Hilbertovom aksiomatskom zasnivanju geometrije takvim osnovnim objektima uzimaju se sustavi objekata – točke, pravci i ravnine.*

Logičari izriču definicije tako da označe najbliži rod kojemu je pojam što ga treba definirati logički podveden i istaknu ono posebno, specifično obilježje po kojem se taj pojam razlikuje od ostalih koji pripadaju istom najbližem rodnom pojmu.

U uskoj vezi s izricanjem definicije na spomenuti način je pojam klasifikacije objekata unutar nekog skupa u disjunktne klase s obzirom na zadani kriterij.

Primjer 6. *S obzirom na svojstvo "paralelnost nesusjednih stranica" (stranice koje nemaju zajednički vrh), četverokute dijelimo u tri disjunktne klase: paralelograme – oba para nesusjednih stranica su paralelna,trapeze – samo je jedan par nesusjednih stranica paralelan i opće četverokute, kod njih niti jedan par nesusjednih stranica nije paralelan.*



Sl. 1.

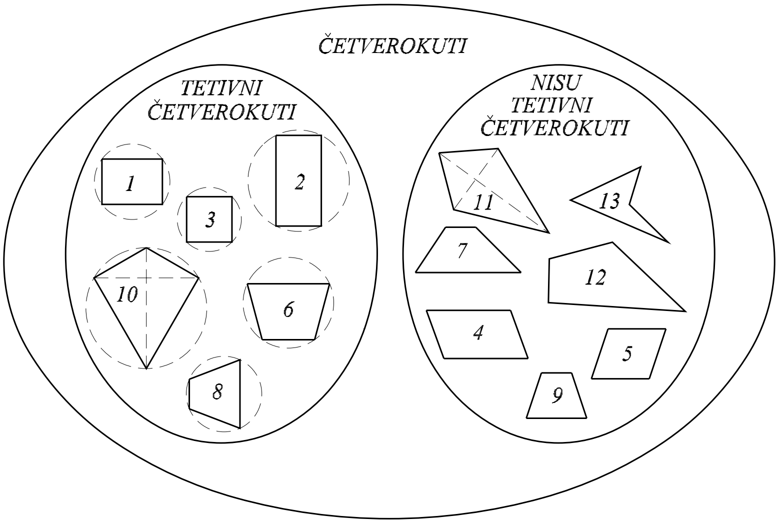
Kako bismo definirali pravokutnik?

Pravokutnik je paralelogram kojemu su svi kutovi sukladni.

U skupu svih četverokuta najbliži viši rodni pojam pojmu pravokutnik je paralelogram. No pojam paralelograma obuhvaća osim pravokutnika još i romboide. "Četiri sukladna kuta" je specifično obilježje pravokutnika, po kome se on razlikuje od romboida koji također pripada istom višem rodnom pojmu – paralelogramu.

S učenicima je vrlo korisno pri razvrstavanju elemenata nekog skupa u disjunktne klase, istaknuti više različitih kriterija, pa onda i provesti razne klasifikacije među elementima istog skupa. U slučaju skupa četverokuta s prethodne slike možemo upotrijebiti kao kriterij klasifikacije svojstvo "biti tetivni četverokut". Tada se zadani skup četverokuta raspada u dvije disjunktne klase – u jednoj su tetivni četverokuti (vrhovi kojih pripadaju istoj kružnici), a u drugoj oni koji to nisu.

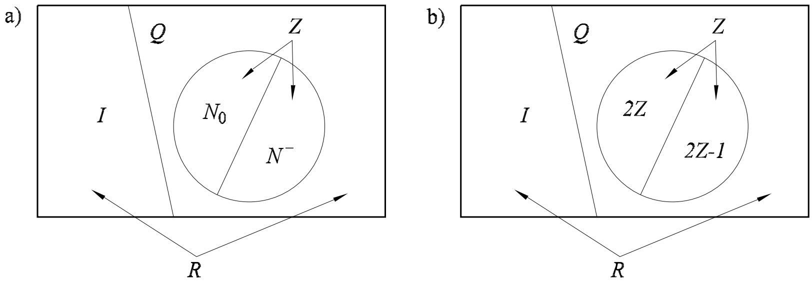
Sljedeća mogućnost klasifikacije naznačenog skupa četverokuta nudi svojstvo "biti konveksan". Vidljivo je da imamo jedan četverokut (označen brojem 13) koji nije konveksan pa opet imamo dvije disjunktne klase četverokuta – konveksnih, kod kojih je spojnica svake dvije točke četverokuta unutar četverokuta i nekonveksnih, kod kojih spojnice svake dvije točke četverokuta nisu uvijek unutar njega.



Sl. 2.

Primjer 7. *Parni broj je cijeli broj djeljiv s 2.*

Da bi ova definicija bila učeniku jasna mora smjestiti definirani pojam – parni broj u odgovarajuću, širu klasu objekata.

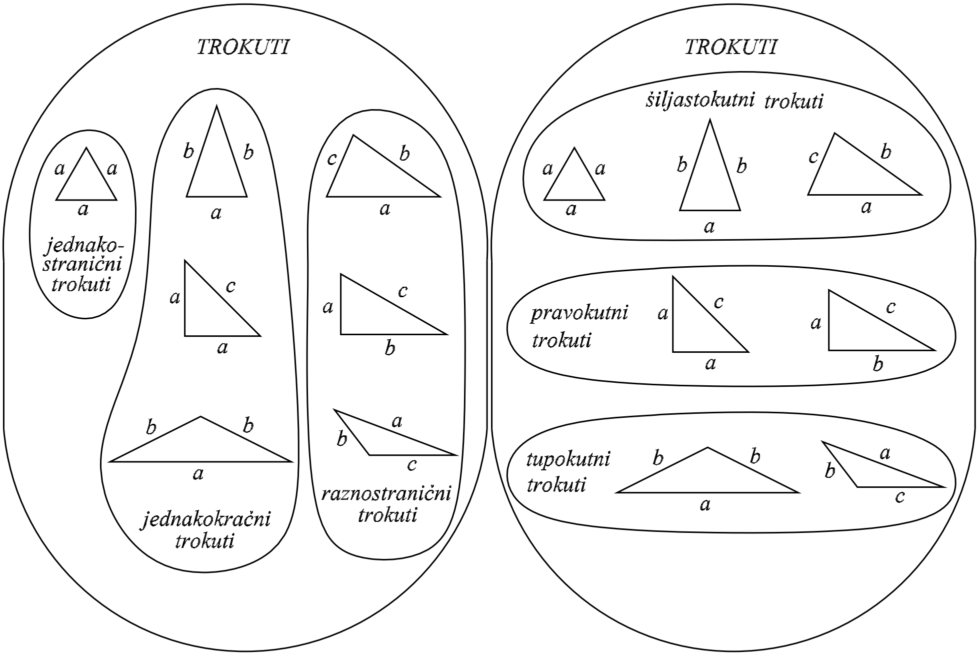


Sl. 3.

Učenik tu mora imati dobru predodžbu skupa cijelih brojeva. Uobičajeno “gledanje” na skup cijelih brojeva kao unije prirodnih brojeva, 0 i brojeva suprotnih prirodnim brojevima ne pridonosi razumijevanju izrečene definicije. Neophodno je dosjetiti se particije skupa $\mathbf{Z}$ na parne i neparne brojeve. Najbliži rod pojmu parni broj je cijeli broj. No cijeli brojevi osim parnih brojeva sadrže još i neparne brojeve. Specifično obilježje kojim parne brojeve odvajamo od neparnih jest mogućnost dijeljenja s dva bez ostatka.

Primjer 8. *Tupokutni trokut je trokut koji ima jedan tupi kut.*

Trokute obično klasificiramo prema dva kriterija – prema duljinama stranica (na raznostranične, jednakokračne i jednakostranične) ili prema kutovima (na šiljastokutne, pravokutne i tupokutne) *sl. 4 i 5*.



Sl. 4. *Sl. 5.*

Dobro je poznavati različite kriterije klasifikacija istog skupa. Kada govorimo o primjeni Pitagorinog teorema, važna će nam biti klasifikacija trokuta prema kutovima, posebice pravokutni trokut.

Ponekad definicijom opisujemo nastanak nekog pojma.

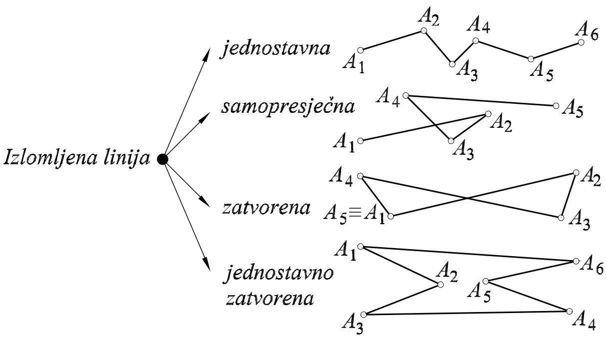
Primjer 9. *Pravilni poliedar je poliedar određen međusobno sukladnim pravilnim poligonima kod kojeg iz svakog vrha izlazi jednaki broj bridova.*

Svaka izjava zahtijeva provjeru razumije li ju učenik. Svaka riječ u definiciji, aksiomu, teoremu, zadatku treba biti jasna učeniku. Da bi učenik imao predodžbu pravilnog poliedra nakon pročitane definicije iz primjera 9., on mnogo toga mora "vidjeti". Prije svega pretpostavlja se da zna što je poliedar, poligon i pravilni poligon.

Skupove točaka u prostoru omeđene konačnim brojem poligona nazivamo poliedrima (grč. poliedar – mnogostraničan).

Poligon je dio ravnine omeđen jednostavno zatvorenom izlomljenom linijom.

Znamo li kada je izlomljena linija jednostavna? Onda kada nije samopresječna. A kada je samopresječna? Ponekad je umjesto riječi zgodnije ponuditi sliku.



Sl. 6.

Poligon kojemu možemo opisati i upisati kružnicu zove se pravilan poligon.

Ukoliko je poliedar omeđen međusobno sukladnim pravilnim poligonima, nazivamo ga pravilni poliedar.

Tek se sada može očekivati učenikova dosjetka da u skup pravilnih poliedara ulazi kocka i pravilni tetraedar. Ostala tri pravilna poliedra tek bi trebalo otkriti. Bolje je učenike uputiti u istraživački rad na tom problemu, tim prije ako su već eksperimentiranjem otkrili Eulerovu formulu za poliedre

$$V - E + F = 2. \tag{1}$$

gdje je V broj vrhova, E broj bridova a F broj strana poliedra.

Naime, dvije susjedne strane pravilnog poliedra (poligona) imaju zajednički brid.

Pobrojimo li sve stranice na svakom poligonu pravilnog poliedra nF, pobrojili smo i sve bridove dva puta:

$$n \cdot F = 2E. \tag{2}$$

Na primjer, za kocku je $4 \cdot 6 = 2 \cdot 12$.

Ako je r broj svih bridova koji se sastaju u jednom vrhu pravilnog poliedra i ako se uzme u obzir da brid “spaja” dva vrha, broj je svih vrhova $r \cdot V$, a svaki brid uračunat je dva puta:

$$r \cdot V = 2 \cdot E \tag{3}$$

Na primjer, za kocku je $3 \cdot 8 = 2 \cdot 12$.

Odredimo E i F iz (2) i (3), pa uvrstimo u (1):

$$\frac{2E}{r} - E + \frac{2E}{n} = 2.$$

Nakon dijeljenja s $2E$, imamo:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{E}. \tag{4}$$

Najmanji broj stranica pravilnog poligona je 3, pa je $n \geqslant 3$, a i $r \geqslant 3$. Ako su n i r istovremeno veći od 3, tj. $n \geqslant 4$ i $r \geqslant 4$, tada je $\frac{1}{2} + \frac{1}{E} \leqslant \frac{1}{2}$, što je nemoguće. Dakle, ne mogu biti istovremeno i n i r strogo veći od 3.

Za $n = 3$ jednadžba (4) postaje

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{E} + \frac{1}{6} \tag{5}$$

i u tom slučaju r može biti jedino 3,4 ili 5.

Radi se o tijelima koja se zovu:

tetraedar – omeđen s 4 jednakostranična trokuta, $n = 3, r = 3$;
oktaedar – omeđen s 8 jednakostraničnih trokuta, $n = 3, r = 4$;
ikosaedar – omeđen s 20 jednakostraničnih trokuta, $n = 3, r = 5$;

Za $r = 3$ jednadžba (4) postaje $\frac{1}{n} = \frac{1}{E} + \frac{1}{6}$ odakle zaključujemo da n može biti samo 3, 4 ili 5.

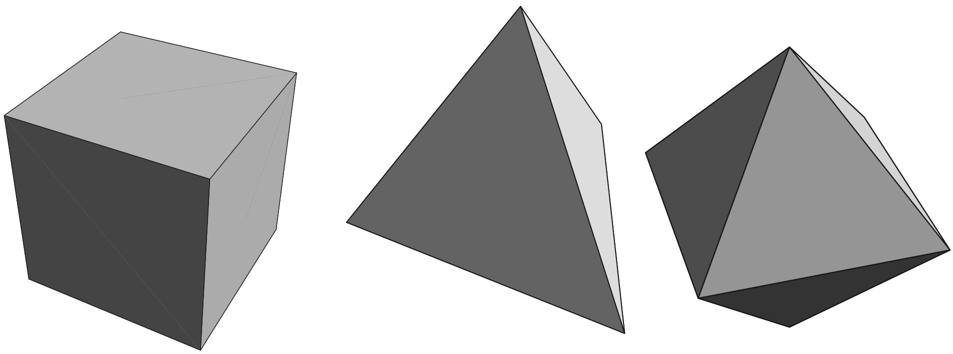
Pa imamo još i,

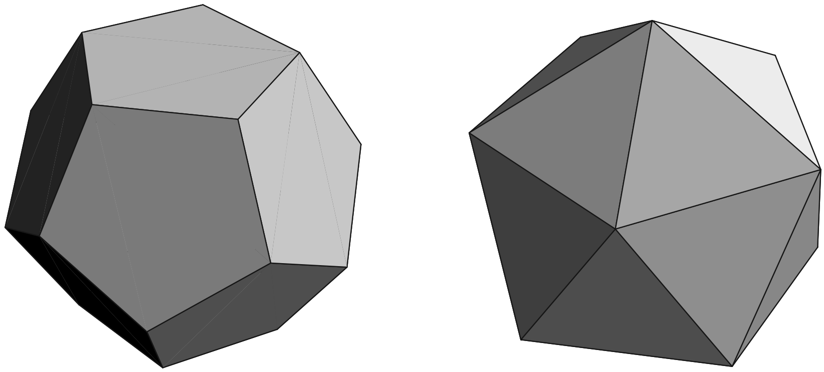
heksaedar – omeđen sa 6 kvadrata, $n = 4, r = 3$;
dodekaedar – omeđen s 12 pravilnih peterokuta, $n = 5, r = 3$.

Druge cjelobrojne vrijednosti nisu moguće za n i r, što potvrđuje postojanje samo pet pravilnih tijela – poliedara. Tu činjenicu pokazali su *Euklid* III. st. pr. Kr., *Descartes* XVI/XVII. st. i *L. Euler* XVIII. st.

Programskim paketom MATHEMATICA predočimo pet pravilnih poliedara.

```
<<Graphics‘Polyhedra‘
Show[Polyhedron[Tetrahedron],Boxed -> False];
Show[Polyhedron[Cube],Boxed -> False];
Show[Polyhedron[Octahedron],Boxed -> False];
Show[Polyhedron[Dodecahedron],Boxed -> False];
Show[Polyhedron[Icosahedron],Boxed -> False];
```





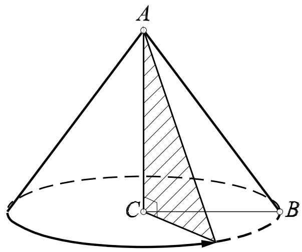
Sl. 7.

Njemački filozof, fizičar i matematičar *G. W. Leibniz* (1646. – 1716.) definicije kao što je navedena u primjeru 9. zove **nominalnim definicijama,** za razliku od **realnih definicija** koje trebaju sadržavati i mogućnost konstrukcija nekog predmeta (pojma) kao i njegove prostorno – vremenske relacije.

Njemački filozof *Lotze* (1817. – 1881.) govori o genetičkim i konvencionalnim definicijama. Evo nekoliko primjera **genetičkih definicija** kojima se ukazuje na proces nastanka nekog pojma.

Primjer 10. *Rotacijom pravokutnog trokuta ABC oko katete $\overline{AC}$ nastaje stožac.*

Kateta $\overline{BC}$ pri tom opisuje krug – bazu stošca, a hipotenuza $\overline{AB}$ opisuje plašt stošca.

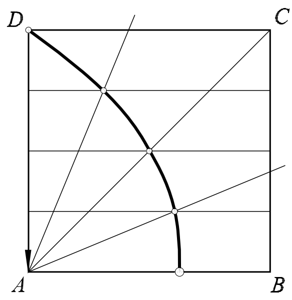


Sl. 8.

Primjer 11. Za dijeljenje kuta na tri jednaka dijela koristimo se krivuljom nazvanom Hipijeva trisektrisa.

Evo kako definiramo točke trisektrise:

Uočimo kvadrat $ABCD$. Zamislimo da u zadanom vremenu istovremeno počnemo s dva jednolika gibanja – jednolikom translacijom stranice $\overline{CD}$ za vektor $\overrightarrow{DA}$ na $\overline{AB}$ i jednolikom rotacijom stranice $\overline{AD}$ oko A na $\overline{AB}$. U presjeku tih dvaju gibanja dobivamo točke trisektrise.



Sl. 9.

Genetičkim definicijama koristimo se pri uvođenju krivulja drugog reda. Prisjetimo se kako to izgleda pri definiranju, primjerice pojma parabole.

Primjer 12. *Izaberimo u ravnini M pravac r i točku F koja ne pripada pravcu p. Skup svih točaka T ravnine M koje su jednako udaljene od pravca r i točke F zove se parabola.*

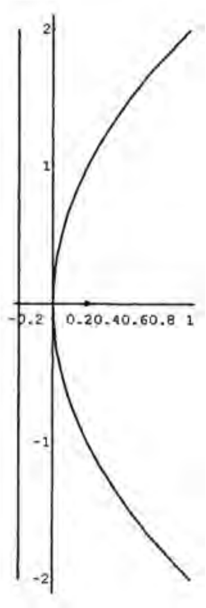
Očito da ova definicija "nudi" geometrijsku konstrukciju točaka parabole metodom presjeka skupova točaka. Naime, za proizvoljno odabranu udaljenost d, skup svih točaka ravnine udaljenih za d od F je kružnica $k(F, d)$ sa središtem u točki F polumjera d. Sve točke koje su za isti taj d udaljene od pravca r pripadaju paralelnim pravcima p_1 i p_2 koji su za d s raznih strana udaljeni od r. U presjeku pravca p_1 i kružnice k te pravca p_2 i kružnice k (ako ti presjeci postoje), dobivamo točke parabole.

Dobro je uložiti napor da učenici čitajući definiciju parabole "otkriju" konstrukciju točaka parabole.

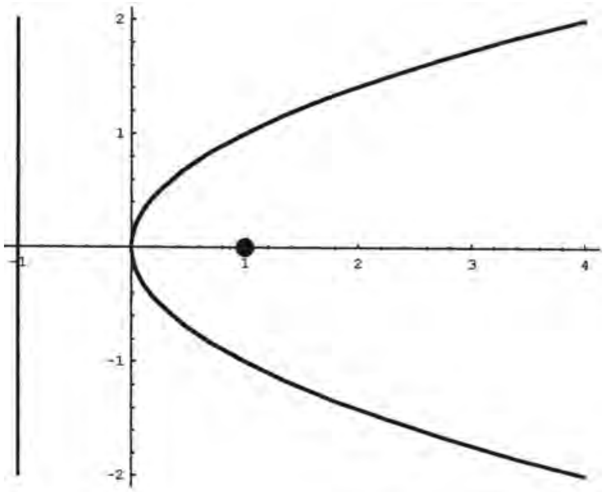
Iskustvo nas uči da se na taj način konstrukcija točaka parabole usvaja s razumijevanjem, a ne mehanički. Vrijeme "izgubljeno" na vrlo korisnom otkrivanju konstrukcije točaka parabole uštedjet ćemo pri proučavanju grafa parabole u ovisnosti o položaju zadanih elemenata, programom MATHEMATICA. Koristeći ga, možemo brzo sagledati primjerice kako utječe na graf parabole približavanje, odnosno udaljavanje točke F od pravca r.

```
(*        PARABOLA              *)
(* y^2=2px  ili x=(t^2)/2p y=t *)

(*r=ravnalica, F=Fokus, pb=parabola *)

Clear[p,r,F,pb];

p=1/2;

r=Graphics[Line[{{-p/2,-2},{-p/2,2}}]];
F=Graphics[{PointSize[0.03],Point[{p/2,0}]}];
pb=ParametricPlot[{(t^2)/2p,t},{t,-2,2}, DisplayFunction->Identity];
```

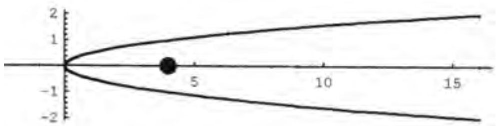
```
Show[{pb,r,F}, DisplayFunction->$DisplayFunction,
AspectRatio->Automatic];
```




```
p=2;

r=Graphics[Line[{{-p/2,-2},{-p/2,2}}]];
F=Graphics[{PointSize[0.03],Point[{p/2,0}]}];
pb=ParametricPlot[{(t^2)/2p,t},{t,-2,2}, DisplayFunction->Identity];
Show[{pb,r,F}, DisplayFunction->$DisplayFunction,
AspectRatio->Automatic];
```




```
p=8;

r=Graphics[Line[{{-p/2,-2},{-p/2,2}}]];
F=Graphics[{PointSize[0.03],Point[{p/2,0}]}];
pb=ParametricPlot[{(t^2)/2p,t},{t,-2,2}, DisplayFunction->Identity];
Show[{pb,r,F}, DisplayFunction->$DisplayFunction,
AspectRatio->Automatic];
```



Sl. 8.

U **konvencionalnim definicijama** dogovorno određujemo značenje nekog pojma.

Primjer 13. *Po definiciji, nula faktorijela je jedan, tj.* $0! = 1$.

Primjer 14. *Osnovna jedinica za mjerenje duljine prema Međunarodnom sustavu jedinica (SI) definira se kao 1650763.73 valnih duljina zračenja atoma kriptona 86 u vakuumu pri prijelazu iz energetskog stanja* $5d_5$ *u stanje* $2p_{10}$.

Primjer 15. Pravilo po kojem se za dane koordinatne sustave $S = (0; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ i $S' = (0; \vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$ odlučuje jesu li jednako orijentirani ili nisu, glasi ovako:

Vektore $\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}'$, razvijemo po vektorima baze $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Imamo

$$\begin{aligned} \vec{\imath}' &= a_1\vec{\imath} + b_1\vec{\jmath} + c_1\vec{k} \\ \vec{\jmath}' &= a_2\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + c_2\vec{k} \\ \vec{k}' &= a_3\vec{\imath} + b_3\vec{\jmath} + c_3\vec{k} \end{aligned} \quad . \tag{6}$$

Sada računamo determinantu

$$\det D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} . \tag{7}$$

Ako je $D > 0$, onda kažemo da su baze $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ i $(\vec{\imath}', \vec{\jmath}', \vec{k}')$ odnosno sustavi S i S' jednako orijentirani, a ako je $D < 0$, one nisu jednako orijentirane.

Konvencionalne definicije nisu ništa manje "matematičke" od svih drugih. Dogovor je svojstven čovjeku i ljudskoj zajednici. Zakoni pojedinih država dogovorena su i zapisana pravila ponašanja. U društvenim zajednicama postoje mnogi nepisani običaji – dogovori kojih se ljudi po tradiciji pridržavaju i prenose s koljena na koljeno.

Dobro je steći naviku pridržavanja konvencionalnih definicija.

Postoje pojmovi koje intuitivno lako prihvaćamo još u predškolskoj dobi. Kada te iste pojmove matematiziramo i uvedemo u program matematike, postaju tvrd orah. Njihovo matematičko usvajanje iziskuje provjeru na velikom broju primjera i opet traži dulje ili kraće, ali u svakom slučaju neko vrijeme sazrijevanja.

Primjer 16. *Pojam funkcije, kao i neka njezina svojstva, primjerice injektivnost, surjektivnost i bijektivnost, uvodi se u nastavu matematike u VI. razredu osnovne škole.*

Još u predškolsko doba djeca su uspoređivala jednakobrojnost elemenata dvaju skupova pomoću injektivnog, odnosno bijektivnog pridruživanja, a da nisu znala brojiti, niti su bili svjesna pojma funkcije. Tako, primjerice, ako se željelo saznati u skupu lijevih i desnih cipela kojih ima više, nije bilo nužno brojiti jedne i druge pa, uspoređivanjem brojeva koji odgovaraju kardinalnim brojevima podskupova lijevih i desnih cipela, odgovoriti na postavljeno pitanje. Većina djece te dobi znaju da lijeva i desna cipela "idu zajedno". Po preostaloj cipeli ili cipelama iste vrste, znat će kojih ima više. Spare li ih bez ostatka, uspostavljena je bijekcija između skupa lijevih i desnih cipela pa ih ima jednako mnogo. Jednakobrojnost je shvaćena bez brojenja složenijim pojmom funkcije, koja je također samo intuitivno prisutna.

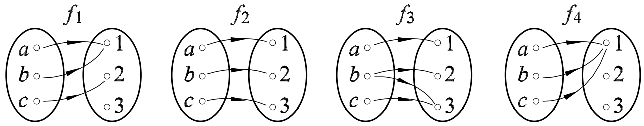
Takvo intuitivno korištenje pojma funkcije kao da ne pridonosi razumijevanju definicije funkcije:

Neka su D i K dva neprazna skupa. Svaki postupak kojim se svakom elementu x iz domene D pridruži točno jedan element y iz kodomene K, zove se funkcija.

Sljedeći zadaci pokazuju se kao ozbiljni problemi:

Zadatak 1. *Neka je f_1 preslikavanje sa skupa D na skup K, pri čemu je $D = \{a, b, c\}$ i $K = \{1, 2, 3\}$, tako da je $f_1(a) = 1, f_1(b) = 1$ i $f_1(c) = 2$. Tada tu funkciju možemo grafički predočiti kao na slici 11.*

Jesu li preslikavanja f_2, f_3 i f_4, funkcije?



Sl. 11.

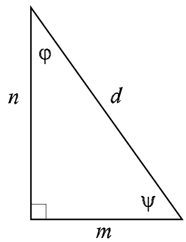
Upoznavanjem pojmova: slika domene, injektivna, surjektivna i bijektivna funkcija, počinje bitka u dugom nizu mjeseci i godina u kojima osvajamo pojam funkcije na primjerima linearnih, kvadratnih, eksponencijalnih, logaritamskih i trigonometrijskih funkcija, te na primjerima simetrija, translacija, rotacija, identitete, inverzija . . . u ravnini i prostoru.

Primjer 17. U cilju lakšeg i bržeg pamćenja skloni smo definicije kratko zapisati u obliku formule. Tako činjenicu da je sinus kuta u pravokutnom trokutu omjer duljina nasuprotne katete i hipotenuze kratko zapisujemo

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Prilikom ponavljanja dobro je riječima obrazložiti što je sinus kuta u pravokutnom trokutu, jer poznavanje ove formule iskoristivo je samo ukoliko znamo da je a duljina katete nasuprot kutu α, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta.

Aktivno ponavljanje provodimo i neuobičajenim označavanjem stranica i kutova u pravokutnom trokutu.



Sl. 12.

Odgovor na pitanje $\sin\psi = ?$, iziskuje stvarno znanje u vezi pojma, a ne mehanički zapamćenu formulu.

Ukratko, u mnogo prilika uočavamo da je učenik sklon mehaničkom zapamćivanju, a ponekad pridaje pojmovima sporedne ili krive osobine koje proizlaze iz krivog doživljaja veza.

Učiteljeva je zadaća stalno usmjeravanje učenika prema aktivnom usvajanju novih pojmova s razumijevanjem, a to znači pravilnom formuliranju i usvajanju prvenstveno definicija.

1.4. O dokazu u nastavi matematike

Slobodnije rečeno, matematička je tvrdnja rečenica kojom iskazujemo neko svojstvo matematičkog objekta ili govorimo o vezi među matematičkim objektima.

Ovisno je li ta tvrdnja opis osnovnog pojma, uzimamo li ju istinitom bez dokaza ili se istinitosna vrijednost tvrdnje mora dokazati, nazivamo ju definicijom, aksiomom ili teoremom.

Primjer 1.

Definicija: *Simetrala dužine je pravac koji ju raspolavlja i okomit je na nju.*
Teorem: *Svaka točka na simetrali dužine jednako je udaljena od krajnjih točaka te iste dužine.*
Aksiom: *(euklidske geometrije) Svake dvije različite točke ravnine određuju točno jedan pravac te iste ravnine.*

Teorem kojim je manje ili više jasno naznačen uvjet i posljedica, ima oblik implikacije.

Prepoznajemo ga po riječima "Ako..., onda...,"a uobičajeno ga je zvati silogizmom*. Ako je ispunjen uvjet p, onda je ispunjena posljedica, odnosno zaključak q.

Uvjet može biti nuždan, dovoljan, te nuždan i dovoljan. Uvjet u nekoj tvrdnji je nuždan ako je dana tvdnja istinita samo u slučaju kad je spomenuti uvjet zadovoljen.

Primjer 2. *Ako je četverokut pravokutnik, onda ima dijagonale jednakih duljina.*

Jednakost duljina dijagonala u četverokutu nuždan je uvjet za tvrdnju: *četverokut je pravokutnik.* Naime, nijedan četverokut kojem su dijagonale raznih duljina nije pravokutnik. S druge strane, ako četverokut ima dijagonale jednakih duljina, ne mora biti pravokutnik. Može biti primjerice jednakokračan trapez. Točnije, tvrdnju iz primjera 2. možemo ovako formulirati:

Nuždan je uvjet za četverokut da bi on bio pravokutnik da taj četverokut ima jednake duljine dijagonala, odnosno dovoljan je uvjet za neki četverokut da ima dijagonale jednakih duljina da je to pravokutnik. Osim silogizama česti su i tzv. "bezuvjetni", tj. kategorični teoremi bez izrečenog uvjeta.

Primjer 3. *Dijagonale romba su okomite.*

S učenicima je dobro uvježbavati kategorične teoreme preformulirati u silogizme, odnosno prepoznati uvjet i posljedicu. Tako izrečenu tvrdnju o rombu možemo izreći na sljedeći način:

Primjer 4. *Ako je četverokut romb, onda su njegove dijagonale okomite.*

Obratna tvrdnja polazne $p \Rightarrow q$ je tvrdnja $q \Rightarrow p$. Općenito, istinosna vrijednost polazne i obratne tvrdnje može, ali i ne mora biti jednaka. Tako obratna tvrdnja iz primjera 4. glasi:

* Sylogismos – grč. logički zaključak koji se izvodi iz dviju ili više pretpostavki

Primjer 5. *Ako su dijagonale četverokuta okomite, onda je taj četverokut romb.*

Ova tvrdnja nije istinita. (Sjetimo se deltoida). Pronađimo sada primjere kada su istinite i polazna tvrdnja i njoj obratna tvrdnja te sagledajmo nužne i dovoljne uvjete tih tvrdnji.

Primjer 6. *Ako se dijagonale četverokuta raspolavljaju, onda je to paralelogram.*

Nuždan je uvjet za jedan četverokut da bude paralelogram da mu se dijagonale raspolavljaju. Obratna tvrdnja prethodnoj glasi:

Primjer 7. *Ako je četverokut paralelogram, onda se njegove dijagonale raspolavljaju.*

Dovoljan je uvjet za jedan četverokut da ima jednake duljine dijagonala da je taj četverokut paralelogram.

U slučajevima kada je obratna tvrdnja polaznog teorema istinosne vrijednosti kao i polazna tvrdnja, što je slučaj u dva posljednja primjera, teorem se izriče u obliku ekvivalencije, tj.

$$q \Longleftrightarrow p.$$

Takvi teoremi prepoznaju se po karakterističnim izrazima "...onda i samo onda ...", "...ako i samo ako...". Dokaz ovakvog teorema provodi se u oba smjera.

Tako ćemo tvrdnje iz primjera 6. i 7. objediniti ovako:

Primjer 8. *Četverokut je paralelogram ako i samo ako mu se dijagonale raspolavljaju.*

Ovdje možemo reći da je p nuždan i dovoljan uvjet za q (i obratno).

Teorem dokazujemo pomoću definicije, aksioma i već prije dokazanih teorema. Teorem čiji dokaz zahtijeva korištenje mnogih, već prije dokazanih teorema, nije prikladan za osnovnu školu jer iziskuje veliko strpljenje, dulju koncentraciju i veću upornost od mogućnosti tih učenika. Stoga ćemo s učenicima osnovne škole svakako dokazati svojstvo simetrale dužine jer nam je pored definicije simetrale dužine dovoljno poznavati teoreme o sukladnosti trokuta. Poznavajući teorem o svojstvu simetrale dužine te svojstva relacije "biti jednak", bez poteškoća ćemo dokazati da se središte opisane kružnice nalazi u sjecištu simetrala stranica trokuta.

No, tek ćemo u srednjoj školi dokazati primjerice teorem o kolinearnosti težišta, ortocentra i središta trokutu opisane kružnice. Ovisno kojom se metodom spremamo obaviti taj posao, priprema zahtijeva solidno poznavanje geometrije i analitičke geometrije i ne možemo očekivati da će svaki prosječan učenik u svakom trenutku, radeći na dokazima pojedinih koraka, imati u svijesti globalni zadatak.

Slobodnije rečeno kada u razredu izložimo opsežan plan oko dokaza nekog zahtjevnijeg teorema, čak i ako ustrajemo s cijelim razredom na bavljenju zadanim poslom, pojedinci će usput otpadati kao aktivni radnici koji rade s razumijevanjem. Utopija je očekivati da svi sve razumiju, ali je učiteljev promašaj ako ga na svakom satu bar nekoliko njegovih učenika ne prati s razumijevanjem do kraja sata.

S učenicima je dobro vježbati preoblikovanje tvrdnje koju treba dokazati u njoj ekvivalentnu, ako je ovu drugu lakše dokazati. Jasno je da će se taj posao to uspješnije obaviti što bolje vladamo logičkim operacijama s iskazima i znamo njihove istinosne vrijednosti.

Na ovom mjestu učitelj mora biti oprezan jer učenikova znanja iz matematičke logike znatno zaostaju za njegovima pa nije pošteno prema učenicima, primjerice osnovne škole, dokazati injektivnost neke funkcije pomoću: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, ako su injektivnost funkcije $f : \mathbf{D} \to \mathbf{K}$ definirali kao svojstvo

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{D}, \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Posao je matematički korektno obavljen, ali je smetnuto s uma da na tom nivou učenici ne znaju da je

$$(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\rceil q \Rightarrow \rceil p),$$

tj. da su izjave $p \Rightarrow q$ i $\rceil q \Rightarrow \rceil p$ istih istinosnih vrijednosti za svaki p i q.

Druga česta vrsta pogrješke u dokazivanju teorema je što dokažemo tvrdnju $p \Rightarrow q$, a onda u zadatcima uvježbavajući dokazani teorem koristimo njegov obrat koji je, doduše, istinit, ali nije dokazan. Takav se slučaj dugo provlačio kroz udžbenike osnovne škole u vezi s Pitagorinim teoremom, a otklonjen je tek u knjizi za VIII. razred kojoj su autori B. Dakić i M. Polonijo [3, 42].

Naime, nakon što je pokazano da za pravokutni trokut duljine hipotenuze c i duljina kateta a i b vrijedi:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

nudilo se učeniku provjeriti je li trokut s duljinama stranica 5, 3 i 4 pravokutan!?

Taj zadatak, međutim, možemo ponuditi tek kada dokažemo obrat tvrdnje iz Pitagorinog teorema koji glasi: Trokut za čije duljine stranica vrijedi izraz $c^2 = a^2 + b^2$ je pravokutan i pravi kut mu je nasuprot stranice duljine c.

Treća česta pogrješka kada su u pitanju teoremi, odnosno njihovi dokazi, jesu slučajevi kada nismo u stanju provesti strogi dokaz neke tvrdnje zbog nedostatka neophodnog znanja i tehnike na određenom nivou pa improvizaciju koja samo pojašnjava ono o čemu se govori pokazujemo kao dokaz teorema. Naravno da ne možemo na svakom nivou sve spomenute matematičke tvrdnje strogo dokazati. Jasno je da ćemo ipak crtežima, eksperimentom ili na neki drugi način intuitivno objasniti tvrdnju. Važno je naglasiti da se ne radi o dokazu.

Pri dokazu teorema služimo se direktnom ili indirektnom metodom, a s obzirom na oblike zaključivanja koristimo indukciju ili dedukciju.

Dokaz teorema $p \Rightarrow q$ proveden je direktnom metodom ako se do zaključka q došlo korištenjem pretpostavke p.

Pritom možemo, a i ne moramo, provoditi analizu pa krenuti od zaključka prema uvjetu, otkrivajući put dokaza sintezom, koji onda provodimo od uvjeta prema zaključku.

U tijeku dokazivanja zaključujemo induktivno ako krećemo od pojedinačnih slučajeva prema općem zaključku, a deduktivno ako pri dokazivanju nekog teorema primjenjujemo neki logički zakon ili vjerodostojan zaključak teorije unutar koje je teorem koji dokazujemo.

Indirektni dokazi se dijele u dvije grupe:
dokazi kontradikcijom, tj.

$$(p \Rightarrow q) \wedge \rceil q \Rightarrow \rceil p$$

i dokazi kontrapozicijom, tj.

$$(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\rceil q \Rightarrow \rceil p).$$

Primjer 9. *Dokaži da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj.* (Primjer za dokaz kontradikcijom).

Dokaz se provodi tako da se pretpostavi suprotno, tj. da je $\sqrt{2}$ moguće zapisati u obliku do kraja skraćenog razlomka pa se na kraju dokaza vidi da je dobiveni razlomak moguće skratiti, što je u kontradikciji s pretpostavkom.

Primjer 10. *Dokaži da je funkcija $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, zadana formulom $f(x) = ax + b$ injekcija.* (Primjer za dokaz kontrapozicijom).

Prema definiciji, funkcije $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je injekcija, ako za svaka dva elementa x_1, x_2 iz $\mathbf{R}$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$. Imajući na umu zakon

$$(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\rceil q \Rightarrow \rceil p),$$

uočavamo da je u našem slučaju pretpostavka p izraz $x_1 \neq x_2$, a treba pokazati da za zadanu funkciju iz pretpostavke p proizlazi zaključak q, tj. $f(x_1) \neq f(x_2)$. Odlučimo li u dokazu poći od $\rceil q$, tj. $f(x_1) = f(x_2)$, pa pokazati da iz te pretpostavke proizlazi zaključak $\rceil p$, tj. $x_1 = x_2$, dokaz smo proveli kontrapozicijom.

Indirektan dokaz koristi se pri dokazivanju jedinstvenosti, primjerice neutralnog elementa u grupi. Pritom se pretpostavi da postoji još jedan neutralni element. Dokazom se pokazuje kako to nije moguće.

Zadatci za vježbu

1. Pronađite u udžbenicima matematike za gimnazije ili neke srednje škole primjere definicija. U koju biste skupinu svrstali izabrane definicije?
2. Potražite u istim udžbenicima nekoliko teorema koji su dokazani direktno.
3. Pronađite u istim udžbenicima matematike nekoliko teorema koji su dokazani indirektnom metodom i to kontrapozicijom.
4. Pronađite u istim udžbenicima matematike nekoliko teorema koji su dokazani indirektnom metodom i to kontradikcijom.
5. Izaberite iz jedne srednjoškolske zbirke zadataka iz matematike neki matematički problem. Zapišite sva znanja koja su učeniku neophodna kako bi mogao (povezujući ih u logičku cjelinu) riješiti zadatak. Potrudite se neophodna znanja popisati redom kako ih je učenik kroz godine školovanja svladavao. Usporedite svoj popis neophodnih znanja za ovaj zadatak s onim kod svojih kolega sa studija.