I. ELEKTROSTATIKA

1. Osnovni pojmovi o elektricitetu

1.1. Električni naboj

Prvo zapažanje o elektricitetu zapisao je starogrčki filozof Tales oko 600 godina prije nove ere. On je napisao da jantar natrljan krpom privlači lake predmete kao što su kosa, vuna, drvena piljevina i slično. Prošlo je mnogo vremena do dana kada je engleski liječnik Wiliam Gilbert oko 1600. godine zapazio da i neka druga tijela kao npr. staklo ili krzno trljanjem imaju ista svojstva kao natrljani jantar. Budući da se jantar na starogrčkom jeziku zove elektron ($\eta\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho o\nu$), Gilbert je rekao da su se ta tijela trljanjem naelektrizirala. Tek u drugoj polovici 18. stoljeća došlo je do spoznaje da je naelektriziranost tijela posljedica prisutnosti neke supstance koja je nazvana elektricitet i da postoje dvije vrste elektriciteta. Jedna vrsta stvara se na staklenom štapu kada se trlja svilom, a druga vrsta na štapu od ebonita kada se trlja krpom.

Američki fizičar Benjamin Frenklin (1706. – 1790.) bez ikakvog je razloga nazvao elektricitet na staklenom štapu pozitivnim, a na ebonitu negativnim. Takav naziv zadržan je i danas jer pojednostavljuje matematičko opisivanje pojmova. Stupanj naelektriziranosti tijela ovisi o stvorenoj količini elektriciteta, odnosno količini električnog naboja, kojeg ćemo kraće zvati samo naboj.

Danas se zna da je naelektriziranost tijela vezana uz fizička i kemijska svojstva materijala, koja se temelje na građi atoma i molekula. Za današnje saznanje o prirodi električnih pojava zaslužni su znanstvenici Coulomb, Gauss, Ampère, Faraday, Maxwell kao i mnogi drugi fizičari i kemičari 20. stoljeća koji su odgonetnuli atomsku građu materijala.

Pretpostavlja se da je čitalac upoznat s osnovnim svojstvima elektriciteta i građe atoma, pa se stoga neće razmatrati eksperimenti o stvaranju viška električnog naboja na naelektriziranom tijelu.

Činjenica je da se djelovanje između dva naelektrizirana tijela odvija bez vidljivog posrednika. Danas se zna da takva djelovanja pripisujemo postojanju dvaju električnih naboja, koji su nazvani pozitivnim i negativnim, kako je već rečeno. Isto tako poznato je da između istoimenih naboja djeluju odbojne sile, a između raznoimenih privlačne sile. Pozitivni i negativni naboj može se zamisliti kao suprotno izražavanje istog svojstva, a izbor je predznaka bio proizvoljan. To znači da negativni naboj ne sadrži neku negativnost.

Mnogobrojni eksperimenti pokazali su da se električni naboj nalazi kao višekratnik najmanjeg tzv. elementarnog naboja. Taj elementarni naboj sadrži najmanju količinu elektriciteta, koja se zove **kvant** elektriciteta, a označava se slovom e_0. Negativni kvant elektriciteta smješten je na elektronu, a pozitivni na protonu, a njihove apsolutne vrijednosti električnog naboja su potpuno jednake, i iznose:

$$e_0 = 1.6021 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C},$$

gdje je $1\,\mathrm{C}$ (jedan kulon) jedinica za mjerenje količine naboja. To je izvedena jedinica, a njen iznos je:

$$1\,\mathrm{C}\ (\text{kulon}) = 1\,\mathrm{A\,s}\ (\text{ampersekunda}).$$

Zbog izbora ostalih mjernih jedinica nije se moglo izabrati da kvant elektriciteta iznosi jedan kulon, već je njegov numerički iznos puno puta manji od jedan. Što drži taj kvant elektriciteta na okupu u elektronu, odnosno protonu, za sada se još nezna. Očito da moraju postojati još neke sile koje sprječavaju električne sile da se elektron, odnosno proton, ne raspadne. Utvrđeno je da je sav naboj elektrona raspoređen unutar kugle promjera $10^{-15}\,\mathrm{m}$, a protona unutar kugle promjera $10^{-14}\,\mathrm{m}$.

Kada se na nekom tijelu pojavi višak jedne vrste naboja, tada je količina toga naboja jednaka:

$$\boxed{Q = ne_0, \quad (n \in \mathbf{N})}\,. \tag{1.1}$$

Premda elementarni naboj nije smješten u točci, ipak će se u tom slučaju govoriti o točkastom naboju. To znači da je naboj Q smješten u n točaka. Ako su dimenzije toga tijela male kao npr. kuglica kod Coulombovog eksperimenta, tada ćemo smatrati da je taj sav naboj Q smješten u točku. Dakle, točkastim nabojem smatra se tijelo čije se dimenzije u danim uvjetima mogu zanemariti, a količina naboja može biti skup većeg broja elementarnih naboja. U slučaju naelektriziranog tijela većih dimenzija pretpostavit će se da je naboj kontinuirano raspodijeljen tako da se zamišlja da je prosjek naboja velikog broja čestica koje sadrže elementarne naboje. Tako raspodijeljen naboj karakterizira se gustoćom raspodjele naboja.

Ako jedno tijelo posjeduje više jedne vrste naboja npr. pozitivnog, odnosno negativnog, onda se kaže da je takvo tijelo naelektrizirano pozitivno, odnosno negativno. Tijela među kojima ne postoji električno djelovanje zovu se neutralna. Nužan uvjet za neutralnost tijela je postojanje iste količine pozitivnog i negativnog električnog naboja, a dovoljan da je raspored po tijelu obje vrste naboja isti. Ako to nije ispunjeno, onda bi se na nekim dijelovima tijela nakupilo više jedne vrste naboja. Takvo se tijelo prema okolini ne bi ponašalo neutralno.

Elementarni naboj ne može se raspoloviti ni uništiti. Na osnovu eksperimenata utvrđeno je da ukupni naboj unutar nekog zatvorenog izoliranog sustava ostaje konstantan. Unutar takvog sustava mogući su razni procesi spajanja i razdvajanja naboja, ali se ukupna količina naboja ne mijenja, ako se ne unosi ili iznosi naboj iz toga zatvorenog sustava. Kad ne bi apsolutna vrijednost elementarnog naboja elektrona i protona bila jednaka, ta zakonitost ne bi vrijedila. Pokazano je da ta zakonitost vrijedi u svakom inercijalnom sustavu te se smatra jednim od osnovnih zakona koji se zove **zakon o očuvanju električnog naboja**, a koji glasi:
Ukupan električni naboj izoliranog zatvorenog sustava ne mijenja se s vremenom.
To znači da je algebarska suma naboja (pozitivnih i negativnih) konstantna.

1.2. Izolatori, vodiči i poluvodiči

Poznato je da su svi materijali sastavljeni od nevidljivih sitnih čestica koje se zovu atomi. U prirodi postoje 92 vrste atoma, odnosno elemenata, a umjetno ih je načinjeno još desetak. Svi se oni međusobno razlikuju po svojoj unutrašnjoj građi. Svaki atom se sastoji od jezgre i elektrona koji kruže oko jezgre velikom brzinom. Promjer atoma iznosi oko $10^{-10}\,\mathrm{m}$. U središtu atoma je atomska jezgra koju čine protoni i neutroni. Promjer jezgre je mnogo puta manji od promjera atoma i iznosi $10^{-14}\,\mathrm{m}$, dok je promjer elektrona oko $10^{-15}\,\mathrm{m}$. Masa elektrona je najmanja i iznosi $m_e = 9.1083 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, a masa protona $m_p = 1.6724 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, dok je masa neutrona nešto veća od mase protona $m_n = 1.6747 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Neutron je električki neutralan, elektron nosi negativni jedinični naboj, a proton pozitivni jednakog apsolutnog iznosa. Atom vodika je najlakši jer sadrži samo jedan proton i jedan elektron koji kruži oko jezgre po strogo određenoj kružnoj putanji kružnom frekvencijom oko 10^{15} rad/sek. Na taj način taj kružeći elektron štiti jezgru tako da joj se nijedan elektron ne može približiti. Kod atoma koji sadrže više elektrona, njihova se kretanja oko jezgre odvijaju po određenim slojevima. Osim toga elektroni imaju spin, tj. vrte se oko svoje osi. Slojevi su diskretno raspoređeni oko atoma, a između jezgre i tih slojeva je vakuum.

Tih slojeva ima sedam, a označavaju se slovima K, L, M, N, O, P i Q. Sloj K je najbliži jezgri. Svakom sloju pripada određeni nivo energije. Da bi prešao iz bližeg na dalji sloj elektron mora izvana primiti određenu energiju koja je jednaka razlici energija ta dva sloja, a pri povratku na bliži sloj elektron oslobađa toliku energiju. U K sloju može biti najviše 2 elektrona, u L 8, u M 28 itd. Prvo se popunjava prvi sloj pa se tek onda može popunjavati drugi sloj i tako redom. Vanjski sloj atoma nekog elementa može biti popunjen ili nepopunjen elektronima.

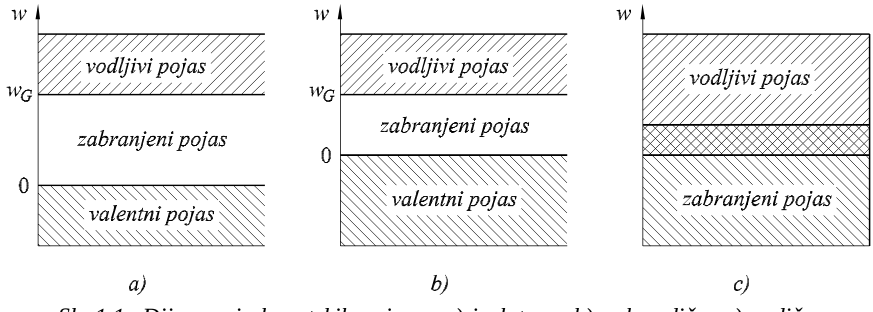
Atomi onih elemenata čiji vanjski sloj nije popunjen združuje se s okolnim atomima u molekule da bi postigli veću stabilnost.

Zbog toga ti elementi imaju molekularnu strukturu. Koliko će se atoma združiti u molekulu zavisi od broja elektrona u vanjskom sloju. Isto tako atomi različitih elemenata mogu se združiti u molekulu, što također ovisi o broju elektrona u njihovim vanjskim slojevima.

Broj elektrona u vanjskom sloju atoma nekog elementa određuje valentnost toga elementa. Ti elektroni zovu se valentni elektroni, a odgovarajući sloj valentni sloj.

Samo elektron iz valentne ljuske pod utjecajem vanjske sile može napustiti atom. Minimalni rad te sile jednak je razlici energija između valentnog sloja i daljnjeg sloja. Povratkom elektrona u valentnu ljusku, atom se vraća u normalno stanje, a elektron se oslobađa ranije primljene energije u vidu svjetlosti ili topline. Kako je već rečeno kod pojedinačnog atoma svaki elektron ima diskretni energetski nivo, koji određuje dozvoljene energije elektrona u atomu. Kada se atomi pojedinog elementa udruže u kristal, tada se umjesto jednog energetskog nivoa stvara se onoliko energetskih nivoa koliko je atoma združeno, pa se zbog toga kaže da nastaju pojasi energije kristala. Pojasi dozvoljenih energija obično su međusobno odijeljeni intervalima ili pojasima energija, tzv. **pojasima zabranjenih energija,** koje elektroni ne mogu zaposjesti.

Energetski nivoi, odnosno pojasi slikovito se prikazuju pomoću tzv. **dijagrama energetskih pojasa** (slika 1.1). Za električna svojstva čvrstih tijela interesantan je energetski pojas valentnih elektrona tzv. **valentni pojas** i viši energetski pojas tzv. **vodljivi pojas** u kome se mogu pojaviti samo **slobodni elektroni** koji se oslobode valentne veze. Niži energetski pojasi koji su nastali iz konkretnih nivoa koji čine popunjenje ljuske atomskih ostataka nisu prikazani jer nisu bitni za električna svojstva čvrstih tijela.



Sl. 1.1. Dijagrami elergetskih pojasa: a) izolatora; b) poluvodiča; c) vodiča.

Između valentnog i vodljivog pojasa je **zabranjeni pojas,** tj. pojas kojega ne može zaposjesti niti jedan elektron. Energija zabranjenoga pojasa W_G je različita za različite elemente.

Valentni elektron koji dobije dodatnu energiju najmanjeg iznosa W_G prelazi u viši energetski vodljivi pojas. Takav elektron se oslobodi valentnih veza, postaje slobodan i kreće se kroz vakuum koji se nalazi između susjednih atoma koji čine rešetku.

Električna svojstva materijala zavise o širini zabranjenog pojasa (W_G) te se materijali dijele se na: izolatore, poluvodiče i vodiče. Kod izolatora i poluvodiča pri apsolutnoj nuli valentni pojas je popunjen elektronima, a vodljivi pojas potpuno je prazan. Porastom temperature pojedini elektroni dobivaju energiju W_G i oslobađaju se valentne veze i prelaze u vodljivi pojas. Broj elektrona u vodljivom pojasu očito ovisi o temperaturi tijela. Za razliku od izolatora i poluvodiča kod vodiča se valentni i provodni pojas preklapaju (slika 1.1c), tako da vodiči imaju puno veći broj tzv. slobodnih elektrona na sobnoj temperaturi nego izolatori i poluvodiči. Pod utjecajem vanjskog električnog polja, ti slobodni elektroni se usmjereno gibaju kroz kristalnu rešetku koju čine atomi pa se kaže da teče električna struja. Elektroni koji imaju energiju valentnog opsega ne sudjeluju u električnoj struji. Svi metali ubrajaju se u vodiče i smatra se da kod njih na svaki atom dolazi po jedan slobodni elektron. Tako npr. bakar (Cu) ima oko $8.5 \cdot 10^{28}$ slobodnih elektrona u m^3. Širina zabranjenog pojasa kod poluvodiča puno je manja nego kod izolatora. Kod poluvodiča broj slobodnih elektrona u m^3 kreće se od 10^{11} do 10^{18}, dok je kod izolatora ta brojka ispod 10^{10}.

1.3. Fizikalne veličine i jedinice

Pomoću fizikalnih veličina izražavaju se odgovarajuća fizikalna svojstva. Fizikalne veličine, kao što su npr. put, vrijeme, masa, sila itd., su mjerljive veličine, a označavaju se malim i velikim slovima latinske abecede i grčkog alfabeta.

Fizikalne pojave se opisuju pomoću fizikalnih zakona, koji se precizno izražavaju pomoću fizikalnih jednadžbi u kojima su povezane odgovarajuće fizikalne veličine.

Svaka fizikalna veličina ima svoju mjernu jedinicu. Mjeriti neke veličine znači odrediti broj koji pokazuje koliko puta ta veličina sadrži mjernih jedinica te veličine. Dakle, nije dovoljno znati brojčanu vrijednost neke fizikalne veličine, već treba znati i njezinu mjernu jedinicu. Stoga se svaka fizikalna veličina izračunava pomoću brojčane vrijednosti i mjerne jedinice:

$$\boxed{F = \{F\} \cdot [F]}, \tag{1.2}$$

gdje je: $\{F\}$ – brojčana vrijenost, a $[F]$ mjerna jedinica dotične fizikalne veličine F.

Mjernim jedinicama i mjerenjem bavi se metrologija. Svaka država ima svoje organizacije koje se bave tom problematikom, koje su udružuju u međunarodne metrološke organizacije. U listopadu 1960. godine na zasjedanju Generalne konferencije za utege i mjere (CGPM) prihvaćen je Međunarodni sistem jedinica, tzv. SI (*Systeme International d'Unités*) koji je kod nas obvezan.

Odobreno je **sedam osnovnih mjernih jedinica** Međunarodnog sistema iz kojih se matematičkim putem izvode sve ostale tzv. **izvedene jedinice**.

U elektrotehnici je prihvaćen sistem jedinica MKSA koji je dio potpunog Međunarodnog sistema jedinica (SI), a kao osnovne veličine dogovorom su usvojene dužina, masa, vrijeme i struja, čije su jedinice metar (m), kilogram (kg), sekunda (s) i amper (A).

Preostale tri jedinice SI su: za temperaturu **kelvin** (K), za jakost svjetlosti **kandela** (cd) i za količinu (množinu) tvari **mol** (mol).

Neke jedinice , kao što su minuta (min), sat (h), vatsat (Wh), elektronvolt (eV), Celzijev stupanj ($^\circ$ C), i još neke, makar su izvan SI mogu se i dalje upotrebljavati.

Pregled svih fizikalnih veličina i odgovarajućih jedinica koje se upotrebljavaju u elektrotehnici dan je na kraju knjige.

Tablica 1. Predmetci za tvorbu decimalnih jedinica.

n	10^n	Predmetak (i njegova skraćenica)	Primjer
-18	10^{-18}	ato (a)	$\mathrm{aJ} = 10^{-18}$ J
-15	10^{-15}	femto (f)	$\mathrm{fm} = 10^{-15}$ m
-12	10^{-12}	piko (p)	$\mathrm{pJ} = 10^{-12}$ J
-9	10^{-9}	nano (n)	$\mathrm{ns} = 10^{-9}$ s
-6	10^{-6}	mikro (μ)	$\mu\,\mathrm{m} = 10^{-6}$ m
-3	10^{-3}	mili (m)	$\mathrm{mV} = 10^{-3}$ V
-2	10^{-2}	centi (c)	$\mathrm{cm} = 10^{-2}$
-1	10^{-1}	deci (d)	$\mathrm{dl} = 10^{-1}$ l
1	10^1	deka (da)	$\mathrm{dkg} = 10^1$ g
2	10^2	hekto (h)	$\mathrm{hl} = 10^2$ l
3	10^3	kilo (k)	$\mathrm{kV} = 10^3$ V
6	10^6	mega (M)	$\mathrm{MW} = 10^6$ W
9	10^9	giga (G)	$\mathrm{GJ} = 10^9$ J
12	10^{12}	tera (T)	$\mathrm{TW} = 10^{12}$ W
15	10^{15}	peta (P)	$\mathrm{Ps} = 10^{15}$ s
18	10^{18}	ekra (E)	$\mathrm{Em} = 10^{18}$ m

U elektrotehnici se često susreću razne fizikalne veličine čije su brojčane vrijednosti mnogo manje ili mnogo veće od jedinica kojom se mjeri. Radi toga su uvedene pomoćne jadinice koje se razlikuju od osnovnih jedinica za faktor 10^n, gdje je n cijeli broj koji može biti pozitivan i negativan. Te pomoćne jedinice imaju isto ime, samo se uz naziv jedinice dodaje određeni predmetak, kako je prikazano u tablici 1.

Primjer 1.1. *Koliko elektrona ima u naboju $Q = 1\,C$? Kolika je masa tih elektrona?*

Rješenje. Broj elektrona naboja Q je

$$n = \frac{Q}{e_0} = \frac{1}{1.6021 \cdot 10^{-19}} = 6.24 \cdot 10^{18}.$$

Ukupna masa tih elektrona je

$$m = n \cdot m_e = 6.24 \cdot 10^{18} \cdot 9.1083 \cdot 10^{-31} = 56.83 \cdot 10^{-13}\,\text{kg}.$$

Primjer 1.2. *Koliko slobodnih elektrona ima u m^3 bakra? Koliki je ukupni volumen svih atoma u m^3?*

Rješenje. Smatra se da kod metala na jedan atom dolazi jedan slobodni elektron. Bakar ima specifičnu gustoću $\rho_{\text{Cu}} = 8.9\ \text{g}/\text{cm}^3$. Iz periodičkog sustava elemenata slijedi da je molarna masa bakra $M(\text{Cu}) = 63.55\,\text{g}/\,\text{mol}$. Poznato je da u jednom gramu atoma ima $L = 6.022 \cdot 10^{23}$ atoma (Avogadrov broj). Iz ovih podataka slijedi da u cm^3 bakra ima atoma, odnosno slobodnih elektrona

$$N(\text{Cu}) = \frac{\rho_{(\text{Cu})}}{M_{(\text{Cu})}} \cdot L = \frac{8.9}{63.55} \cdot 6.022 \cdot 10^{23} = 8.434 \cdot 10^{22} \frac{\text{atoma}}{\text{cm}^3}$$

odnosno

$$N(\text{Cu}) = 8.434 \cdot 10^{28} \frac{\text{atoma}}{\text{m}^3}.$$

Volumen jednog atoma bakra je

$$V' = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{10^{-10}}{2}\right)^3 = 0.524 \cdot 10^{-30}\,\text{m}^3,$$

a ukupni volumen je

$$V_1 = V' \cdot N(\text{Cu}) = 0.524 \cdot 10^{-30} \cdot 8.434 \cdot 10^{28} = 0.0442\,\text{m}^3.$$

Iz ovoga se može zaključiti da između atoma bakra ima također mnogo praznog prostora, kao i između elektrona i jezgre. Nema te sile koja bi sabila sve čestice atoma i sve atome jedne do drugih. Kada bi se sabile sve čestice atoma bakra jedna do druge, tada bi njihov volumen bio približno $V'' = (10^{-14})^3\,\text{m}^3$. Ako bi se isto tako sabili svi atomi bakra, tada bi bakar od $1\,\text{m}^3$ bio sveden na volumen $V_2 = (10^{-14})^3 \cdot 8.434 \cdot 10^{28} = 8.434 \cdot 10^{-14}\,\text{m}^3$.

Taj podatak ukazuje da čestice atoma zauzimaju vrlo mali dio volumena, a najveći dio je vakuum.

Primjer 1.3. *Koliki je ukupni naboj svih protona koji se nalaze u $1\,cm^3$ bakra?*

Rješenje. Iz prethodnog zadatka je vidljivo da u $1\,\text{cm}^3$ bakra ima $N(\text{Cu}) = 8.434 \cdot 10^{22}$ atoma. Svaki atom bakra ima $Z = 29$ protona pa je ukupan naboj svih protona u $1\,\text{cm}^3$ bakra

$$Q = Z \cdot N(\text{Cu}) \cdot e_0 = 29 \cdot 8.434 \cdot 10^{22} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 3.91 \cdot 10^5\,\text{C}.$$

To je ogromna količina naboja, koja se ne može ostvariti u laboratoriju kao višak naelektriziranosti nekog tijela.

2. Coulombov zakon

2.1. Statički naboj. Raspodjele statičkog naboja

U popunjenom atomu svakog elementa je broj pozitivnih i negativnih naboja jednak. Između tih naboja atoma djeluju električne sile. Da bi se oslobodile te sile, potrebno je prvo izračunati sile između svaka dva elementarna naboja da bi se dobila ukupna sila za svaki naboj. Broj tih djelovanja, kao i različitih putanja čestica u atomu je velik tako da je praktično to nemoguće izvesti, stoga se to radi statistički pomoću srednjih vrijednosti, koje karakteriziraju elementarne naboje. U ovoj knjizi takva se analiza neće provoditi. Činjenica je da je tijelo električno neutralno kada su svi atomi popunjeni elektronima. U tom slučaju, izvan atoma nema električnog djelovanja. Kod spojeva, atomi spojeva se udružuju u molekule koje mogu i ne moraju biti električki neutralne. Ukupna električna djelovanja molekula koje nisu električki neutralne u nekom tijelu se poništavaju, tako da je to tijelo također elektično neutralno.

Pri određenim uvjetima neki elektroni iz valentne ljuske atoma mogu se odvojiti i smjestiti se u prazni prostor između ostalih atoma. Tako npr., trljanjem staklenog štapa krznom s površine stakla su neki elektroni istrgnuti i ostali su na krznu. Na taj način stakleni je štap postao pozitivno naelektriziran, jer ima višak pozitivnog naboja, a krzno negativno naelektrizirano, jer ima višak otrgnutih elektrona. Višak pozitivnog naboja na štapu miruje, a isto tako i višak negativnog naboja na krznu miruje. Stoga se tako stvoreni višak naboja zove **statički naboj**. Staklo i krzno se ubrajaju u izolatore. Na vodičima se praktički na taj način ne može stvoriti višak naboja, ali ako se vodičem prijeđe preko naelektriziranog štapa, slobodni elektroni s vodiča lako prijeđu na štap tako da vodič postane pozitivno naelektriziran, a stakleni štap se električki neutralizira. Dva tijela koja su se naelektrizirala trljanjem jedno o drugom imaju istu količinu naboja ali suprotnih predznaka.

Statički naboj se također javlja kao višekratnik elementarnog naboja, tj. kvanta naboja e_0. To znači da je skup većeg broja točkastog naboja pozitivnog ili negativnog. Na naelektriziranom tijelu ima ogroman broj elementarnog statičkog naboja, pa je nemoguće uzeti u obzir svaki elementarni naboj kao i njegov položaj posebno. Umjesto da se promatra svaki elementarni naboj za sebe, uvodi se pojam **gustoća naboja.** Statički naboj ili kraće samo naboj, može biti raspoređen jednoliko ili nejednoliko po liniji, površini i volumenu.

Kad se naboj raspodijeli po liniji, tada se govori o linijskom naboju (sl. 2.1a).

U slučaju jednolike raspodjele naboja Q na liniji duljine l, tada je **linijska gustoća naboja** (λ) konstanta čiji je iznos

$$\lambda = \frac{Q}{l}, \qquad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}. \tag{2.1}$$

Linijski naboj se može svesti na n točkastih naboja, tako da se linija l podijeli na n jednakih dijelova. Tada se na svakom elementu duljine $\Delta l = l/n$ nalazi količina naboja

$$\Delta Q = \lambda \Delta l \tag{2.1a}$$

koja je smještena u sredinu nekog elementa (sl. 2.1a). Na taj način se raspodjela naboja svodi na **diskretnu raspodjelu naboja**, i cijeli se problem svodi na n-točkastih naboja. U slučaju nejednolike raspodjele naboja potrebno je odrediti linijsku gustoću svakog od n elemenata. Elementi duljine ne moraju biti jednaki. Tako se npr. na elementu duljine Δl_i nalazi količina naboja ΔQ_i, pa je srednja vrijednost gustoće naboja toga elementa

$$\lambda_i = \frac{\Delta Q_i}{\Delta l_i}. \tag{2.2}$$

Uz poznatu linijsku gustoću naboja svakog elementa dobije se da je ukupan naboj linije

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \Delta l_i. \tag{2.2a}$$

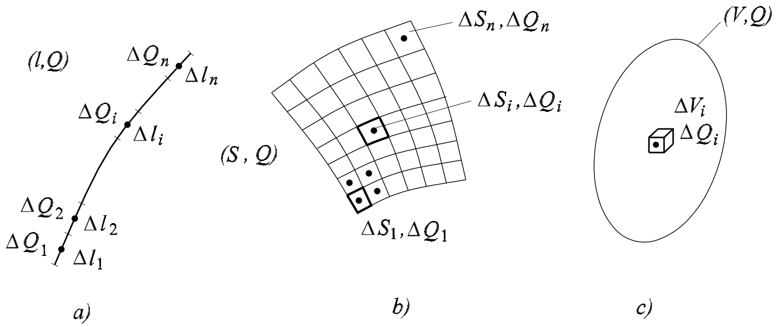
Točnost takvog proračuna povećava se ako se linija podijeli na puno veći broj elemenata, pri čemu se element duljine smanjuje i teži k nuli ($\Delta l \to 0$). U tom slučaju linijska gustoća naboja definira se derivacijom naboja po dužini

$$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl}, \tag{2.2b}$$

a ukupan naboj integralom po duljini linije

$$Q = \int_l dQ = \int_l \lambda \, dl. \tag{2.2c}$$

Na taj način linija je podijeljena na mnoštvo točaka koje se dodoiruju, a nastala raspodjela zove se **kontinuirana raspodjela naboja**.



Sl. 2.1. Raspodjela naboja: a) linijska; b) površinska; c) volumna.

Naboj može biti raspoređen samo po površini tijela. U slučaju jednolike raspodjele naboja Q na površini S, **površinska gustoća naboja** σ je konstanta i iznosi

$$\sigma = \frac{Q}{S}, \qquad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}. \tag{2.3}$$

Podjelom površine S na n jednakih elementarnih površina ΔS (sl. 2.1b), tako da svaki element sadrži naboj

$$\Delta Q = \sigma \Delta S, \tag{2.3a}$$

koji je smješten u sredinu svakog elementa (sl. 2.1b). Na taj način ukupni se naboj Q može svesti na n točkastih naboja, tj. na diskretnu raspodjelu plošnog naboja.

U slučaju nejednolike raspodjele naboja, potrebno je odrediti plošnu gustoću svake elementarne površine. Elementi površine ne moraju biti jednaki. Tako npr. element površine ΔS_i nosi količinu naboja ΔQ_i pa je plošna gustoća naboja toga elementa

$$\sigma_i = \frac{\Delta Q_i}{\Delta S_i}. \tag{2.3b}$$

Uz poznatu plošnu gustoću naboja svakog elementa dobije se da je ukupan naboj na površini S

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \Delta S_i. \tag{2.3c}$$

Ako broj podjela raste, elementarna površina ΔS se smanjuje, pa se u graničnom slučaju dobije da je plošna gustoća

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS}, \tag{2.3d}$$

a ukupan naboj na površini S

$$Q = \int_S dQ = \int_S \sigma dS. \tag{2.3e}$$

Na taj način se prešlo iz diskretne u kontinuiranu raspodjelu naboja na površini S.

Naboj Q može biti raspodijeljen i po volumenu V nekog tijela (sl. 2.1c). U slučaju jednolike raspodjele naboja, konstanta **prostorna gustoća naboja** je

$$\rho = \frac{Q}{V}, \quad \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}. \tag{2.4}$$

Podjelom volumena V na n jednolikih elementarnih volumena ΔV prostorni naboj se može prikazati kao n točkasti naboj, a iznos naboja u svakoj točki, odnosno elementarnom volumenu ΔV je

$$\Delta Q = \rho \Delta V. \tag{2.4a}$$

U slučaju nejednolike prostorne raspodjele potrebno je odrediti prostornu gustoću naboja svakog elementa

$$\rho_i = \frac{\Delta Q_i}{\Delta V_i}. \tag{2.4b}$$

Ako je poznata prostorna gustoća svakog elementa, tada je ukupan naboj u volumenu V

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \Delta Q_i = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \Delta V_i. \tag{2.4c}$$

Na taj način se ukupan naboj Q može prikazati pomoću diskretne raspodjele naboja sa n točaka u volumenu V.

U slučaju kontinuirane raspodjele prostorna gustoća naboja se definira relacijom

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}, \tag{2.4d}$$

a ukupan naboj računa se pomoću integrala po volumenu V, ovako

$$Q = \int_V dQ = \int_V \rho dV. \tag{2.4e}$$

Primjer 2.1. *Stakleni tanki štap duljine $l = 0.75\,m$ naelektriziran je jednoliko nabojem $Q = 1.5 \cdot 10^{-11}\,C$. Kolika je linijska gustoća naboja na štapu? Ako se štap podijeli na $n = 25$ dijelova, koliki je naboj na svakom elementu?*

Rješenje. Linijska gustoća naboja je

$$\lambda = \frac{Q}{l} = 2 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{C/\,m}.$$

Dužina elementa je

$$\Delta l = \frac{l}{n} = \frac{0.75}{25} = 0.03\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{cm},$$

koji sadrži količinu naboja

$$\Delta Q = \lambda \Delta l = 2 \cdot 10^{-11} \cdot 0.03 = 0.06 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{C}.$$

Primjer 2.2. *Kuglica polumjera* $R = 1\,cm$ *jednoliko je naelektrizirana po površini nabojem* $Q = 3 \cdot 10^{-10}\,C$. *Kolika je površinska gustoća naboja na kuglici?*

Rješenje. Površinska gustoća naboja na površini kuglice je

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{3 \cdot 10^{-10}}{4\pi \cdot (10^{-2})^2} = 0.239 \frac{\mu\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}.$$

Primjer 2.3. *Kugla polumjera* $a = 1\,cm$ *jednoliko je naelektrizirana nabojem gustoće* $\rho = 5 \cdot 10^{-3}\,C/\,m^3$. *Treba odrediti ukupni naboj na kugli, kao i broj elementarnih naboja.*

Rješenje. Ukupan naboj na kugli volumena $V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$ iznosi

$$Q = \rho \frac{4\pi}{3} a^3 = 5 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot (10^{-2})^3 = 20.94 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C}.$$

Broj elementarnih naboja je

$$n = \frac{Q}{e_0} = \frac{20.94 \cdot 10^{-9}}{1.6 \cdot 10^{-19}} = 13 \cdot 10^{10}.$$

Primjer 2.4. *Ako svaki atom bakrene kugle polumjera* $a = 1\,cm$ *izgubi po jedan elektron, kugla postane pozitivno naelektrizirana. Kolika je prostorna gustoća naboja kugle i koliki je ukupni statički naboj kugle?*

Rješenje. U primjeru 1.2. izračunato je da u $1\,\mathrm{cm}^3$ bakra ima $N = 8.4343 \cdot 10^{28}$ atoma/ m^3. Prostorna gustoća naboja u zadanoj kugli je

$$\rho = N \cdot e_0 = 8.434 \cdot 10^{28} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 13.5 \cdot 10^9\,\mathrm{C}/\,\mathrm{m}^3,$$

pa ukupan statički naboj iznosi

$$Q = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = 13.5 \cdot 10^9 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot (10^{-2})^3 = 56.52 \cdot 10^3\,\mathrm{C}.$$

Primjer 2.5. *Linija duljine* $l = 50\,cm$ *i debljine atoma, sastavljena je od atoma bakra tako da je svaki atom bakra izgubio jedan elektron. Kolika je linijska gustoća statičkog naboja i koliki je ukupni naboj linije?*

Rješenje. U kocki bakra volumena $1\,\mathrm{m}^3$ nalazi se $N = 8.434 \cdot 10^{28}$ atoma. Ako je svaki atom smješten u centru zamišljene elementarne kockice, tada u bridu kocke duljine $1\,\mathrm{m}$ ima $\sqrt[3]{N}$ atoma, a kockica u kojoj je smješten svaki atom ima brid duljine $\sqrt[3]{1/N} = 0.228 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}$. Iz toga slijedi da je linijska gustoća zadane linije

$$\lambda = \sqrt[3]{N} \cdot e_0 = \sqrt[3]{8.434 \cdot 10^{28}} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} = 7 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}/\,\mathrm{m},$$

a ukupana količina statičkog naboja

$$Q = \lambda \cdot l = 7 \cdot 10^{-10} \cdot 0.5 = 3.5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{C}.$$

Primjer 2.6. *Pločica od bakra površine* $S = 10\,cm^3$ *i debljine atoma bakra* $d = 2.28 \cdot 10^{-9}\,m$. *Kolika je plošna gustoća naboja i ukupni naboj ako svaki atom bakra izgubi jedan elektron?*

Rješenje. Na osnovu prethodnog zadatka slijedi da na površini $1\,\mathrm{m}^2$ ima $(\sqrt[3]{N})^2$ atoma, pa slijedi da je plošna gustoća statičkog naboja

$$\sigma = (\sqrt[3]{N})^2 \cdot e_0 = 3.078\,\mathrm{C}/\,\mathrm{m}^2,$$

a ukupan naboj na pločici površine $S = 10\,\mathrm{cm}^2$ iznosi

$$Q = \sigma \cdot S = 3.078 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 3.078 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{C}.$$

Primjer 2.7. *Ako svi atomi na površini bakrene kugle polumjera* $a = 1\,cm$ *izgube jedan elektron, koliki je statički naboj kugle?*

Rješenje. Gustoća naboja na površini bakrene kugle je

$$\sigma = \sqrt[3]{N^2} \cdot e_0 = 30.78 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{C}/m^2,$$

pa je ukupni statički naboj kugle

$$Q = \sigma \cdot 4\pi a = 30.78 \cdot 10^{-5} \cdot 4\pi \cdot (10^{-2})^2 = 386.8\,\mathrm{nC}.$$

2.2. Coulombov zakon

Prva kvantitativna istraživanja sila između dvaju naelektriziranih tijela izveo je 1785. g. francuski fizičar *Charles Augustin Coulomb* (1736. – 1806.) eksperimentalno. Za mjerenje sile upotrebljavao je vrlo osjetljivu torzionu vagu, sličnu onoj kakvu je upotrebljavao engleski fizičar *Cavendish* za mjerenje gravitacionih sila. Coulomb je svoj zakon formulirao ovako:

Dva se mirna električna naboja odbijaju ili privlače silom koja je razmjerna umnošku njihovih naboja, a obrnuto je razmjerna kvadratu udaljenosti između njih.

Taj se zakon može matematički napisati ovako:

$$\boxed{F = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}}, \tag{2.5}$$

gdje su Q_1 i Q_2 naboji na tijelima, koja su mala u odnosu na njihovo rastojanje r (sl. 2.2a), a konstanta k ovisi o izboru mjernog sustava i sredine u kojoj se određuje Coulombova sila. U MKSA sustavu sila se mjeri u njutnima (N), naboj u kulonima (C), a udaljenost u metrima (m).

Za vakuum ta konstanta je jednaka:

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \cdot 10^9\,\mathrm{N\,m}^2/\,\mathrm{C}^2, \tag{2.6}$$

a do sada najtočnija vrijednost te konstante za vakuum je

$$k_0 = 8.98755 \cdot 10^9 \, \mathrm{N\,m^2/\,C^2}. \tag{2.6a}$$

Konstanta ε_0 (jed. 2.6) zove se **dielektrična konstanta** ili **dielektrična permitivnost (propustljivost)** vakuuma, a ona iznosi

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9} = 8.85419 \cdot 10^{-12} \, \mathrm{C^2/\,N\,m^2}. \tag{2.7}$$

Kasnije će se pokazati da se umjesto jedinice $\mathrm{C^2/\,N\,m^2}$ za permitivnost koristi jedinica $\mathrm{F/\,m}$ (farad po metru), pri čemu je farad ($1\,\mathrm{F} = 1\ \mathrm{As/V}$) jedinica za električni kapacitet.

Permitivnost ostalih sredina jednaka je

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \tag{2.8}$$

gdje je ε_r relativna permitivnost neke sredine. Ta veličina je bez dimenzije, a svaka sredina ima različitu vrijednost. Za sada će se razmatrati Cuolombova sila samo u vakuumu, a kasnije će biti riječi i o ostalim sredinama.

U jednakosti (2.5) pretpostavlja se da su tijela na kojima se nalaze naboji malih dimenzija u usporedbi s razmakom r, zbog toga se smatra da je naboj na takvim malim tijelima koncentriran u jednu točku pa se stoga zove **točkasti naboj**.

Još je 1911. godine engleski fizičar *Ernest Rutherford* eksperimentalno utvrdio da Coulombov zakon vrijedi i za razmake $10^{-14}\,\mathrm{m}$, a kasnije je potvrđeno i za manje razmake, kao i za razmake do mnogo kilometara. Neka indirektna mjerenja pokazala su da je eksponent 2 kvadratni zakon udaljenosti u granicama točnosti (2 ± 10^{-9}), na osnovu čega se zaključilo da je zakon sile između dva točkasta naboja proporcionalan s r^{-2}. Opisi svih tih mjerenja mogu se naći u udžbenicima fizike, a eksperimentalne provjere Coulombovog zakona, kako za vrlo male tako i za vrlo velike udaljenosti i dalje se provode. Iz teorije elektromagnetskog polja i kvantne teorije svjetlosti proizlazi da Coulombov zakon vrijedi i za najveće udaljenosti.

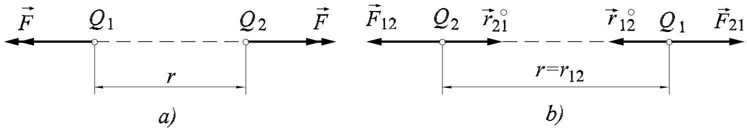
Coulombov zakon, bez dodatnih objašnjenja, može se puno preciznije iskazati u vektorskom obliku. Tako npr. naboj Q_1 djeluje na naboj Q_2 istog predznaka silom:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}^{\,0}_{12}}, \tag{2.9}$$

gdje je $r = r_{12}$ udaljenost između naboja, a

$$\vec{r}^{\,0}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r} \tag{2.10}$$

jedinični vektor usmjeren od naboja Q, tj. od izvora djelovanja, prema naboju Q_2 (slika 2.2b).



Sl. 2.2. Sile između dvaju točkastih naboja: a) skalarni oblik; b) vektorski oblik.

Isto tako naboj Q_2 djeluje na naboj Q_1 silom

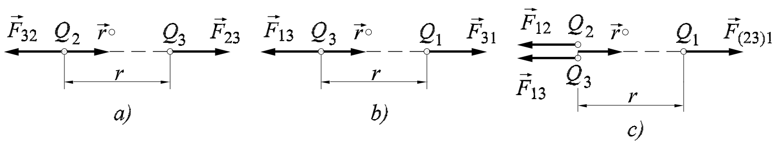
$$\boxed{\vec{F}_{21} = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \cdot \vec{r}_{21}^{\,0}}, \tag{2.11}$$

gdje je $\vec{r}_{21}^{\,0} = -\vec{r}_{12}^{\,0}$, pa slijedi da je $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, što znači da za kulonovske sile vrijedi zakon akcije i reakcije. Relacije (2.9) i (2.11) u sebi objedinjuju konvencije o algebarskim predznacima naboja i karakteru sila međusobnog djelovanja.

U slučaju da su naboj i suprotnih predznaka, tada je produkt naboja negativan, pa sila $\vec{F}_{12}$ djeluje u smjeru $-\vec{r}_{12}^{\,0}$. Dakle, smjerovi sila na slici (slika 2.2b) su tada suprotni, tj. djeluju privlačne sile.

Električni naboj može se opažati i mjeriti jedino promatranjem međusobnog djelovanja toga naboja i drugih električnih naboja. Coulombov zakon osim ovisnosti sila o inverznoj "kvadratnoj" udaljenosti, u sebi uključuje da su djelovanja električnih naboja aditivna.

Dva naboja Q_1 i Q_2 nisu dovoljna da se mogu odrediti njihove vrijednosti, već samo produkt $Q_1 \cdot Q_2$. Već s tri tijela koja nose naboje Q_1, Q_2 i Q_3 moguće je odrediti njihove iznose. Prvo se izmjeri sila samo između naboja Q_1 i Q_2, koji su na razmaku r (slika 2.2b, jed. 2.11), a zatim se izmjeri sila



Sl. 2.3. Sila između: a) Q_2 i Q_3; b) Q_1 i Q_3; c) Q_1 i $(Q_2 + Q_3)$

samo između naboja Q_2 i Q_3 (sl. 2.3a), koja iznosi

$$\vec{F}_{23} = k_0 \frac{Q_3 Q_2}{r^2} \vec{r}^{\,0}. \tag{2.12}$$

Konačno se izmjeri sila između naboja Q_1 i Q_3 (sl. 2.3b) čiji je iznos

$$\vec{F}_{31} = k_0 \frac{Q_1 Q_3}{r^2} \vec{r}^{\,0}. \tag{2.13}$$

Traženi naboji Q_1, Q_2 i Q_3 mogu se izračunati iz sistema jednadžbi (2.11, 2.12 i 2.13).

Sada ćemo razmotriti i svojstvo aditivnosti.

Ako se sada naboji Q_2 i Q_3 blisko spoje i stave na udaljenost r (sl. 2.3c), tada je sila na naboj Q_1

$$\vec{F}_{(23)1} = k_0 \frac{Q_1(Q_2+Q_3)}{r^2}\vec{r}^0 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31}, \tag{2.14}$$

tj. jednake zbroju dvaju ranije izmjerenih sila.

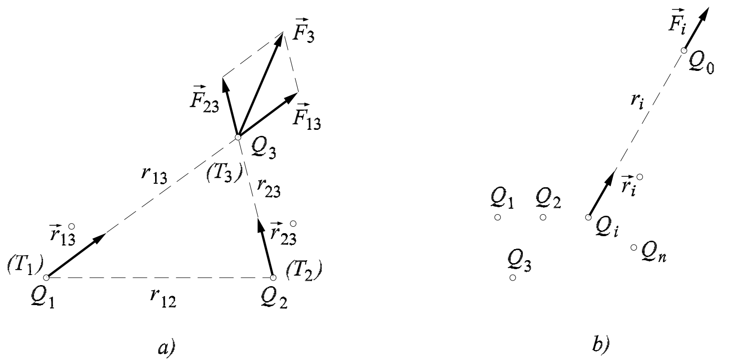
Na osnovu pokazanog može se zaključiti da se **sila kojom dva električna naboja međusobno djeluju ne mijenja zbog prisutnosti trećeg naboja**.

Prema tome u nekom sustavu s više naboja Coulombov zakon vrijedi za svaki par u tom sustavu. To je osnova za primjenu **principa superpozicije (pridodavanja)**, koji se često u tehnici primjenjuje.

Tako npr. tri naboja, koje proizvoljno razmjestimo u prostoru (sl. 2.4a), na osnovu Coulombova zakona i principa superpozicije, vrijedi da je rezultirajuća sila na naboj Q_3

$$\vec{F}_3 = k_0 \frac{Q_1Q_3}{r_{13}^2}\vec{r}_{13}^0 + k_0 \frac{Q_2Q_3}{r_{23}^2}\vec{r}_{23}^0 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}, \tag{2.15}$$

jednaka sumi sila $\vec{F}_{13}$ i $\vec{F}_{23}$ (slika 2.4a).



Sl. 2.4. Coulombova sila u sustavu: a) tri naboja; b) n-naboja.

Bez obzira koliko naboja ima promatrani sustav, Coulombov zakon vrijedi za svaki par. Ako se želi utvrditi sila na neki pokusni naboj Q_0 koji se donese u blizinu skupa od n-naboja (sl. 2.4b), tada je rezultirajuća sila na pokusni naboj Q_0

$$\boxed{\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} k_0 \frac{Q_iQ_0}{r_i^2}\vec{r}_i^0}, \tag{2.16}$$

gdje je $\vec{F}_i$ sila i-tog naboja na pokusni naboj Q_0, r_i udaljenost i-tog naboja od pokusnog naboja, a $\vec{r}_i^0$ jedinični vektor usmjeren od i-tog naboja prema pokusnom naboju.

Primjer 2.8. *Kolika je električna i gravitaciona sila između elektrona i protona u atomu vodika?*

Rješenje. Razmak između jezgre i elektrona je $R = 0.5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$ pa je električna privlačna sila između elektrona i protona

$$F_e = k_0 \frac{e_0^2}{R^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(1.6 \cdot 10^{-19})^2}{(0.5 \cdot 10^{-10})^2} = 92.16 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{N}.$$

Gravitacijska konstanta $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\mathrm{Nm}^2/\,\mathrm{kg}^2$, a masa elektrona $m_e = 9.1083 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ i protona $m_p = 1.6724 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, pa je

$$F_g = \gamma \cdot \frac{m_e m_p}{R^2} = 4.064 \cdot 10^{-47}\,\mathrm{N}.$$

Odnos električne sile i gravitacione $F_e/F_g = 2.37 \cdot 10^{39}$, tj. električna sila je $2.37 \cdot 10^{39}$ puta veća.

Primjer 2.9. *Dvije kuglice od bakra polumjera $R = 1\,cm$ razmaknute su na udaljenost $d = 2\,m$. Ako bi se svakom atomu bakra oduzeo po jedan elektron, kolika je u tom slučaju sila između kuglica?*

Rješenje. U zadatku 2.4. izračunato je da bi svaka kuglica imala višak pozitivnog naboja $Q = 56.52 \cdot 10^3\,\mathrm{C}$ pa je sila između kuglica

$$F = k_0 \frac{Q^2}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{(56.52 \cdot 10^3)^2}{2^2} = 7.19 \cdot 10^{18}\,\mathrm{N}.$$

Pomoću te sile mogao bi se podići ogromni teret od $0.733 \cdot 10^{15}$ tona. Ako je prosječna masa čovjeka $73.3\,\mathrm{kg}$, tada bi se moglo podići 10^{16} ljudi, kad bi bilo toliko ljudi. To ukazuje da je nemoguće oduzeti svakom atomu bakrene kuglice po jedan atom. Naelektrizirana tijela sadrže daleko manje količine naboja.

Primjer 2.10. *Između točkastih naboja $Q_1 = 8 \cdot 10^{-7}\,C$ i $Q_2 = 2 \cdot 10^{-7}\,C$ djeluje odbojna sila $F = 0.1\,N$. Koliki je razmak između naboja ako je mjerenje provedeno u vakuumu?*

Rješenje. Iz jednadžbe (2.5) slijedi da je traženi razmak

$$r = \sqrt{\frac{k \cdot Q_1 Q_2}{F}} = 0.12\,\mathrm{m} = 12\,\mathrm{cm}.$$

Primjer 2.11. *Točkasti naboj $Q_1 = 5\,nC$ smješten je u točki $T_1(1, 2, 5)$ i naboj $Q_2 = \sqrt{3}\,nC$ u točki $T_2(11, 12, 15)$. Kolika je sila $\vec{F}_{12}$ ako su zadane koordinate u centimetrima?*

Rješenje. Prvo treba odrediti vektor $\vec{r}_{12}$

$$\vec{r}_{12} = (11-1)\vec{\imath} + \vec{\jmath}(12-2) + \vec{k}(15-5) = 10(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}),$$

čiji je modul

$$r_{12} = \sqrt{10^2 + 10^2 + 10^2} = 10\sqrt{3}\,\mathrm{cm} = 0.1 \cdot \sqrt{3}\,\mathrm{m},$$

a jedinični vektor

$$\vec{r}^{\,0}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}).$$

Tražena sila je

$$\vec{F_{12}} = k_0 \frac{Q_1 Q_2}{r_{12}^2} \cdot \vec{r^0_{12}} = 9 \cdot 10^9 \frac{5 \cdot 10^{-9} \cdot \sqrt{3} \cdot 10^{-9}}{(0.1\sqrt{3})^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})$$

$$\vec{F_{12}} = 15 \cdot 10^{-7}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})$$

odnosno

$$\vec{F_{12}} = 15\sqrt{3} \cdot 10^{-7}\,\mathrm{N}.$$