

# 1. MEHANIKA S MEHANIKOM TEKUĆINA

## 1.1. KLASIČNA MEHANIKA

1. Prvu polovicu puta automobil prijeđe brzinom od  $80 \text{ kmh}^{-1}$ , a drugu polovicu puta brzinom od  $40 \text{ kmh}^{-1}$ . Odredite srednju brzinu automobila.

Rješenje:  $\bar{v} = 53,3 \text{ kmh}^{-1} = 14,8 \text{ ms}^{-1}$

2. Vlak se kreće brzinom od  $35 \text{ ms}^{-1}$ . U nekom trenutku vremena započinje kočenje i pri tome se brzina vlaka jednoliko mijenja do iznosa od  $15 \text{ ms}^{-1}$  na putu od 500 m. Izračunajte:

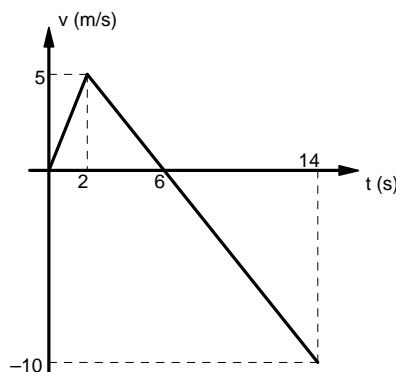
- a) akceleraciju kojom vlak usporava (deceleraciju),  
b) iznos puta koji vlak prijeđe do potpunog zaustavljanja uz pretpostavku konstantnog usporavanja.

Rješenje: a)  $a = -1 \text{ ms}^{-1}$ , b)  $s = 112,5 \text{ m}$

3. Gibanje tijela je zadano jednačbom  $s = a \cdot t - b \cdot t^2 + c \cdot t^3$ , gdje su  $a = 2 \text{ ms}^{-1}$ ,  $b = 3 \text{ ms}^{-2}$ ,  $c = 4 \text{ ms}^{-3}$ . Nađite srednju brzinu tijela unutar intervala  $0,5 \text{ s} \leq t \leq 1 \text{ s}$  i vrijeme u kojemu je akceleracija veća od nule.

Rješenje:  $\bar{v} = 4,5 \text{ ms}^{-1}$ ,  $t > 0,25 \text{ s}$

4. Zavisnost brzine o vremenu za gibanje nekog tijela, prikazano je dijagramom. Izračunajte akceleraciju kojom se tijelo ubrzava u vremenu do 2 sekunde i deceleraciju u intervalu  $2 \text{ s} \leq t \leq 14 \text{ s}$ . Koliki je put tijelo prevalo u vremenu do 14 sekundi?



Rješenje:  $a_1 = 2,5 \text{ ms}^{-2}$ ,  $a_2 = -1,25 \text{ ms}^{-2}$ ,  $s = 55 \text{ m}$

5. Rijekom koja teče brzinom  $v_1 = 1 \text{ ms}^{-1}$  plovi brod čija brzina u odnosu na rijeku iznosi  $v_2 = 2 \text{ ms}^{-1}$ . Izračunajte brzinu kretanja broda ako:
- brod plovi nizvodno,
  - brod plovi uzvodno,
  - brod plovi okomito na smjer toka rijeke (s jedne obale na drugu).

Rješenje: a)  $v = 3 \text{ ms}^{-1}$ , b)  $v = 1 \text{ ms}^{-1}$ , c)  $v = 2,24 \text{ ms}^{-1}$

6. Brod koji vozi iz mjesta A u mjesto B u jednome pravcu plovi brzinom od  $v_1 = 10 \text{ km/h}$ ; u suprotnome pravcu plovi brzinom od  $v_2 = 16 \text{ km/h}$ . Izračunajte:
- srednju brzinu broda,
  - brzinu rijeke kojom brod plovi!

Rješenje: a)  $v_b = 12,3 \text{ kmh}^{-1}$ , b)  $v_r = 0,83 \text{ ms}^{-1}$

7. Brod plovi od jedne prema drugoj obali rijeke brzinom od  $7,2 \text{ km/h}$  okomito na obalu (na tijek rijeke). Na drugu obalu pristane  $150 \text{ m}$  niže od početnog usmjerenja. Izračunajte:
- brzinu rijeke,
  - vrijeme potrebno da brod stigne na drugu obalu, ako je rijeka široka  $500 \text{ m}$ .

Rješenje: a)  $v = 0,60 \text{ ms}^{-1}$ , b)  $t = 250 \text{ s}$

8. Dvojica biciklista, otac i sin, vozeći paralelno dolaze na netom otvoreno pravokutno križanje. Sin je nastavio u istom smjeru, prema školi, jednolikom brzinom od  $10 \text{ km/h}$ , a otac je morao skrenuti desno, u smjeru PBF-a gdje radi. U času skretanja brzina mu je iznosila  $6 \text{ km/h}$ , pa se odmah počeo ubrzavati akceleracijom  $0,9 \text{ m/s}^2$ . Izračunajte relativnu brzinu sina prema ocu,  $\vec{v}_s - \vec{v}_o$ , 10 sekundi nakon razdvajanja na križanju.

Rješenje:  $|\vec{v}_s - \vec{v}_o| = 39,7 \text{ km/h}$

9. Plivač prema rijeci ima brzinu  $v$ , a brzina rijeke je  $u$ . Ako je započeo preplivavanje s jedne obale brzinom  $v$  pod kutom  $\alpha$  s obzirom na okomicu između dviju obala, koliki je kut  $\beta$  koji cijela njegova staza do druge obale zatvara prema okomici? Izračunajte kut  $\beta$ , ako je  $v = 1 \text{ m/s}$ ,  $u = 1,5 \text{ m/s}$ ,  $\alpha = 15^\circ$ , a širina rijeke  $d = 50 \text{ m}$ .

Rješenje:  $\beta = 61,23^\circ$

10. Sa zgrade visoke  $15 \text{ m}$  bačena je vertikalno prema tlu kuglica početnom brzinom od  $10 \text{ m/s}$ . Izračunajte vrijeme padanja kuglice. Koliko dugo bi kuglica slobodno padala? Kolika je brzina kuglice pri udaru u tlo? Zanimarite otpor zraka.

Rješenje:  $t = 1 \text{ s}$ ,  $t' = 1,7 \text{ s}$ ,  $v_u = 19,8 \text{ m/s}$

11. Materijalna točka (sitno tijelo) krenuvši iz mirovanja giba se po pravcu tako da joj je akceleracija proporcionalna s vremenom. Koliki je prevaljni put nakon  $8 \text{ s}$ , ako je nakon  $4 \text{ s}$  brzina točke  $8 \text{ m/s}$ ?

Rješenje:  $s = 85,3 \text{ m}$

12. Zdrobljenja željezna ruda pada na vodoravnu dugačku transportnu traku i to 300 kg u svakoj sekundi. Traka se kreće stalnom brzinom od 2 m/s. Nađite silu koja mora djelovati na traku da bi se ona kretala stalnom brzinom, zanemarujući trenje.

Rješenje:  $F = 600 \text{ N}$

13. Dva tijela s masama  $m_1 = 4 \text{ kg}$  i  $m_2 = 8 \text{ kg}$  vezana su s niti i nalaze se na kosini čiji je kut  $\alpha = 30^\circ$ . Faktori trenja su  $\mu_1 = 0,1$  i  $\mu_2 = 0,2$ . Koja sila nateže nit, ako se tijelo  $m_1$  giba ispred tijela  $m_2$ ?

Rješenje:  $T = 2,3 \text{ N}$

14. Na česticu mase  $m$  djeluje sila  $F = F_0 \left[ 1 - \left( \frac{2t - T}{T} \right)^2 \right]$  u intervalu vremena  $0 \leq t \leq T$ , gdje je  $F_0$  konstantna. Potrebno je odrediti brzinu čestice na svršetku vremenskog intervala, ako čestica na početku miruje.

Rješenje:  $v = \frac{2}{3} \cdot \frac{F_0 \cdot T}{m}$

15. Cesta na zavoju većinom je nagnuta prema unutrašnjoj strani zavoja tako da bi za određenu brzinu horizontalna komponenta reakcijske sile ceste na automobil bila jednaka potrebnoj centripetalnoj sili.

- a) Koliki mora biti nagib ceste na zavoju polumjera zakrivljenosti 100 m da bi automobil mogao voziti brzinom od 60 km/h neovisno o trenju?  
b) Kada cesta ne bi bila nagnuta, koliki bi trebao biti minimalni faktor trenja pri toj brzini?

Rješenje: a)  $\alpha = 15,8^\circ$ , b)  $\mu = 0,28$

16. Na mirnoj vodi nalazi se splav dugačka 10 m, mase 900 kg. Na jednom kraju mirne splavi nalazi se čovjek mase 70 kg, a na drugom kraju dječak mase 30 kg. Potrebno je odrediti novi položaj splavi prema obali ako dječak dođe na sredinu, a čovjek na drugu stranu splavi. Otpornost vode je zanemariva!

Rješenje:  $\Delta x = 0,55 \text{ m}$

17. Čelična kuglica mase  $m_1$ , gibajući se brzinom  $v_1 = 9 \text{ m/s}$ , centralno udara u drugu mirnu kuglicu mase  $m_2 = 0,5 m_1$ . Nakon toga, ova druga kuglica centralno udara u treću mirnu kuglicu mase  $m_3 = 0,5 m_2$ . Kojim se brzinama gibaju kuglice nakon srazova?

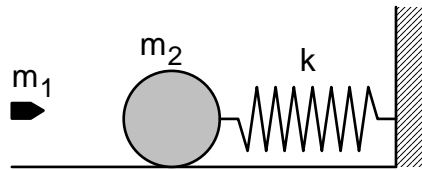
Rješenje:  $v_1' = 3 \text{ m/s}$ ,  $v_2' = 12 \text{ m/s}$ ,  $v_2'' = 4 \text{ m/s}$ ,  $v_3' = 16 \text{ m/s}$

18. Plastična loptica pada s visine od 2 m na pod, i odbija se nekoliko puta uzastopce. Koliki je koeficijent restitucije, ako je do drugog sraza loptice s podom prošlo 1,8 sekundi?

Uputa: koeficijent restitucije je omjer brzina neposredno prije i poslije sraza.

Rješenje:  $k = 0,91$

19. Na glatkoj horizontalnoj podlozi leži kugla mase  $m_2 = 4,5 \text{ kg}$  spojena preko opruge konstante  $k = 500 \text{ N/m}$  s čvrstim zidom (vidi sliku). Metak mase  $m_1 = 10 \text{ g}$  i brzine  $v_1 = 600 \text{ m/s}$  zabije se u kuglu i ostane u njoj. Koliko će se sabiti opruga?



Rješenje:  $\Delta x = 0,126 \text{ m}$

20. Sitno tijelo mase  $1 \text{ kg}$  može se gibati u smjeru  $x$ -osi. Pod djelovanjem sile  $F = (3 + 4 \cdot x) \text{ N}$  pri čemu je  $x$  u jedinicama metar, tijelo prijeđe put od  $3 \text{ m}$ . Gibanje tijela započelo je iz točke  $x = 0$  u trenutku  $t = 0$ . Izračunajte:
- brzinu koju tijelo ima na kraju puta,
  - ubrzanje što ga tijelo postigne na kraju puta,
  - snagu tijela na kraju puta.

Rješenje: a)  $v = 7,35 \text{ m/s}$ , b)  $a = 15 \text{ m/s}^2$ , c)  $P = 110,25 \text{ W}$

21. Na horizontalnoj gredi dugoj  $12 \text{ metara}$  mase  $100 \text{ kg}$  nalazi se valjak mase  $200 \text{ kg}$  udaljen  $3 \text{ m}$  od jednog njenog kraja. Greda je poduprta na krajevima tako da je sila reakcije oslonca okomita na gredu. Kolike su sile reakcije?

Rješenje:  $F_A = 1962 \text{ N}$ ,  $F_B = 981 \text{ N}$

22. Homogeni štap je naslonjen na glatki zid i nalazi se na hrapavom podu. Ako štap zatvara kut od  $45^\circ$  s podlogom i masa mu je  $10 \text{ kg}$ , pronađi silu trenja između štapa i poda.

Rješenje:  $F_{tr} = 49,1 \text{ N}$

23. Šuplji valjak tankih stijenki zarotiran je do  $10$  okretaja u sekundi i postavljen na tlo uz vertikalnu stijenu. Ako je faktor trenja klizanja  $\mu = 0,1$ , potrebno je odrediti nakon koliko će se vremena valjak zaustaviti? Koliko okretaja valjak napravi, ako mu je polumjer  $R = 30 \text{ cm}$ ?

Rješenje:  $t = 17,64 \text{ s}$ ,  $n = 88$

24. Na zamašnjak momenta tromosti  $I = 1 \text{ kgm}^2$ , koaksijalno je provučen valjčić polumjera  $4 \text{ cm}$  i mase  $200 \text{ grama}$ . Na valjčić je namotan konac s utegom od  $5 \text{ kg}$  obješenim na slobodnom kraju konca.

- Uteg propadne visinu  $h$ . Kolika je brzina utega na kraju ovog puta? Početna brzina utega je nula. Masa konca se zanemaruje!
- Izračunajte vrijeme u kojem će uteg propasti visinu  $h = 2 \text{ m}$ .

Rješenje: a)  $v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I + I_v}{r^2}}}$ , b)  $t = 7,17 \text{ s}$

25. Izračunajte jakost gravitacijskog polja i gravitacijski potencijal Zemlje u točki na visini od 1000 km iznad Zemljine površine. Pretpostavite da je Zemlja homogena kugla. Koliko je u toj točki gravitacijsko polje Sunca?

Rješenje:  $\gamma_Z = 7,3 \text{ ms}^{-2}$ ,  $\varphi = -5,4 \cdot 10^7 \text{ Jkg}^{-1}$ ,  $\gamma_S = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$

26. Satelit mase 100 kg kruži oko Zemlje na visini od 1000 km. Odredite brzinu, ophodno vrijeme, kinetičku, potencijalnu i ukupnu energiju satelita.

Rješenje:  $v = 7,3 \text{ km/s}$ ,  $T = 6,3 \cdot 10^3 \text{ s}$ ,  $E_k = 27 \text{ GJ}$ ,  $E_p = -54 \text{ GJ}$ ,  $E = -27 \text{ GJ}$

27. Kolika centrifugalna sila djeluje na tijelo mase 1 kg na Zemljinoj površini:

- a) na ekvatoru,
- b) na geografskoj širini  $45^\circ$  i
- c) na polu?

Rješenje: a)  $F_e = 0,034 \text{ N}$ , b)  $F_{45^\circ} = 0,024 \text{ N}$ , c)  $F_p = 0 \text{ N}$

28. Kolikom silom čovjek mase 100 kg djeluje na pod lifta kada se lift:

- a) diže stalnom brzinom,
- b) diže akceleracijom  $1 \text{ ms}^{-2}$  i
- c) spušta akceleracijom od  $1 \text{ ms}^{-2}$ ?

Rješenje: a)  $F = 981 \text{ N}$ , b)  $F = 1081 \text{ N}$ , c)  $F = 881 \text{ N}$

29. Inercijalni sustav  $S'$  giba se brzinom  $v = 0,6 c$  u odnosu na inercijalni sustav  $S$ . U sustavu  $S'$  nalazi se štap koji zatvara kut  $\theta' = 45^\circ$  sa smjerom gibanja. Koji kut zatvara taj štap sa smjerom gibanja u sustavu  $S$ ?

Rješenje:  $\theta = 51^\circ 20'$

30. Inercijalni sustavi  $S_1$  i  $S_2$  kreću se u smjeru osi  $x$  brzinama  $v_1 = 0,8 c$  i  $v_2 = 0,6 c$  u odnosu na inercijalni sustav  $S$ . Ako na satu koji miruje u sustavu  $S_1$  prođe 1 s, koliko vremena prođe za opažača u sustavu  $S_2$ ?

Rješenje:  $\Delta t_2 = 1,084 \text{ s}$

31. Brzina elektrona se u jednolikom električnom polju mijenja od  $v_1 = 0,97 c$  do  $v_2 = 0,99 c$ . Izračunajte potencijal koji ubrzava elektron!.

Uputa: potencijal  $V = \frac{\Delta E}{Q}$ ,  $Q$  je naboj čestice.

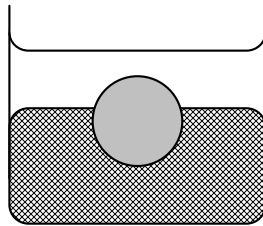
Rješenje:  $U = 1,52 \cdot 10^6 \text{ V}$

## 1.2. MEHANIKA TEKUĆINA

32. Ako je tlak na podnožju planine (nadmorska visina 300 m) 101 kPa, koliki je tlak na vrhu planine visoke 1000 m? Pretpostavite da je temperatura svuda jednaka i da iznosi  $0^{\circ}\text{C}$ .

Rješenje:  $p = 92,5\text{ kPa}$

33. U posudi je živa, a iznad nje voda (vidi sliku). Homogena željezna kugla pliva na granici između žive i vode. Koliki je dio volumena kugle u živi, a koliki u vodi?



Rješenje:  $V_{\text{živa}} = 0,55 V$ ,  $V_{\text{voda}} = 0,45 V$

34. U moru pliva santa leda tako da joj viri volumen  $195\text{ m}^3$  iznad površine mora. Koliki je ukupni volumen sante ako je gustoća mora  $1,03\text{ g/cm}^3$ , a gustoća leda  $0,9\text{ g/cm}^3$ ?

Rješenje:  $V = 1545\text{ m}^3$

35. Homogenim drvenim štapom duljine  $l = 5\text{ m}$ , težine  $G = 40\text{ N}$ , gustoće  $\rho_1 = 796\text{ kg/m}^3$  izmjeri se dubina jezera  $H = 4,75\text{ m}$ . Koliki je izvršeni rad ako je štap uranjan vertikalno? (Gustoća vode je  $\rho_2 = 10^3\text{ kg/m}^3$ ).

Rješenje:  $W = 2,98\text{ J}$

36. U  $U$ -cijev kojoj krakovi imaju različite polumjere ulivena je čista voda. Kolika je razlika nivoa ako su polumjeri  $r_1 = 4\text{ mm}$  i  $r_2 = 0,6\text{ mm}$ . Pretpostavite da voda potpuno moči stijenku cijevi.

Rješenje:  $\Delta h = 2,1\text{ cm}$

37. Areometar pliva u vodi što potpuno moči njegove stijenke. Promjer cijevi areometra jest  $9\text{ mm}$ . Koliko će se promijeniti dubina uronjenosti  $\Delta h$  areometra ako po površini vode kapnemo nekoliko kapi alkohola? Koeficijent površinske napetosti alkohola jest  $0,02\text{ Nm}^{-1}$ , a vode  $0,073\text{ Nm}^{-1}$ .

Rješenje:  $\Delta h = 2,4\text{ mm}$

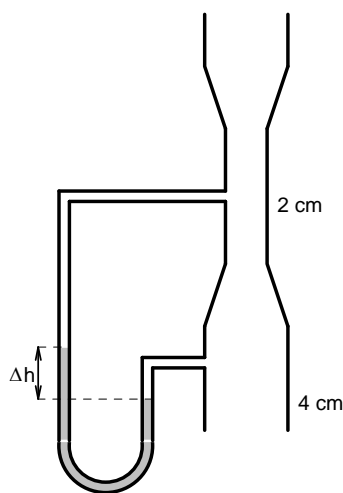
38. Poprečni presjek klipa u vodoravno položenoj štrcaljki jest  $1,6\text{ cm}^2$ , a presjek otvora je  $1\text{ mm}^2$ . Za koliko vremena će isteći voda iz štrcaljke, ako na klip djeluje sila od  $5\text{ N}$  i ako je hod klipa  $4\text{ cm}$ ?

Rješenje:  $t = 0,81\text{ s}$

39. Pitot–Prandtlova cijev je u struji zraka gustoće  $1,2 \text{ kg/m}^3$  i brzine  $v$  i tlaka  $p$ . Kolika je brzina zraka ako je razlika stupaca vode u diferencijalnom manometru spojenom na Pitot–Prandtlovu cijev  $6 \text{ cm}$ ?

Rješenje:  $v = 31 \text{ m/s}$

40. Voda prolazi kroz okomitu Venturijevu cijev koja na ulazu ima promjer  $4 \text{ cm}$ , a na suženom dijelu, koji je  $0,5 \text{ m}$  iznad ulaznog, promjer je  $2 \text{ cm}$  (vidi sliku). Na ulazu je tlak  $160 \text{ kPa}$ , a na suženom dijelu je tlak  $80 \text{ kPa}$ . Izračunajte brzinu protjecanja vode i protok vode kroz cijev. Kolika bi bila razlika stupca žive u živinom manometru u obliku  $U$ -cijevi, spojenom između ulaza i suženja cijevi? Zanemarite unutrašnje trenje.



Rješenje:  $v_1 = 3,164 \text{ m/s}$ ,  $q = 3,974 \text{ l/s}$ ,  $\Delta h = 0,607 \text{ m}$

41. Kapljice vode u nekom oblaku imaju polumjer od  $5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ . Kojom najvećom brzinom mogu te kapljice padati kroz zrak? Za viskoznost zraka uzmite  $1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Pas}$ .

Rješenje:  $v = 0,3 \text{ m/s}$

## 2. TITRANJE I VALOVI

---

42. Tijelo obješeno o spiralnu oprugu uzrokuje produljenje opruge za 4 cm. Koliko titraja napravi ovo tijelo u 1 minuti kada ga se pobudi na vertikalno harmoničko titranje?

Rješenje:  $n = 150$

43. Kuglica mase  $2 \cdot 10^{-2}$  kg, pričvršćena na oprugu s konstantom elastičnosti  $8 \text{ Nm}^{-1}$ , harmonički titra s amplitudom  $A$ . Na udaljenosti  $A/2$  od ravnotežnog položaja postavi se masivna ploča, od koje se kuglica odbija savršeno elastično. Nađite titrajno vrijeme u ovom slučaju.

Rješenje:  $T = 0,21 \text{ s}$

44. Matematičko njihalo duljine 60 cm njiše u avionu koji se uspinje pod kutem od  $30^\circ$  prema horizontalnoj ravnini, s ubrzanjem od  $4 \text{ ms}^{-2}$ . Nađite period njihanja tog matematičkog njihala.

Rješenje:  $T = 1,39 \text{ s}$

45. Materijalna točka izvodi istovremeno dva međusobno okomita harmonička gibanja opisana jednadžbama:

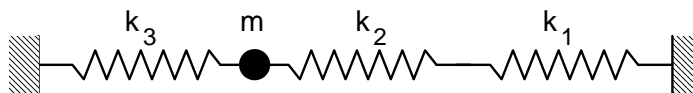
$$x = 1 \cdot \cos(\pi \cdot t) \text{ cm},$$

$$y = 2 \cdot \cos(0,5\pi \cdot t) \text{ cm}.$$

Odredite jednadžbu staze materijalne točke te nacrtajte sliku staze gibanja.

Rješenje: Dio parabole  $y^2 = 2x + 2$  unutar pravokutnika sa vrhovima  $A(1, 2)$ ,  $B(1, -2)$ ,  $C(-1, -2)$ ,  $D(-1, 2)$ .

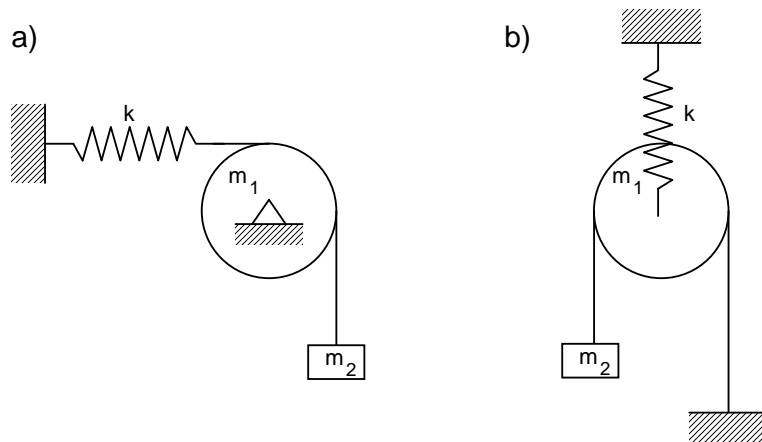
46. Izračunajte kružnu frekvenciju titrajnog sustava koji se sastoji od materijalne točke mase  $m$  i triju opruga konstanti  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  spojenih kao na slici.



$$\text{Rješenje: } \omega = \sqrt{\frac{k_3(k_1 + k_2) + k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$



47. Titrajni sustav sastoji se od homogenog diska mase  $m_1$  polumjera  $R$  koji se okreće oko horizontalne osi, opruge konstante  $k$  i utega mase  $m_2$  kao što prilazuju slike a) i b). Pretpostavivši jednostavno harmoničko titranje, odredite frekvenciju sustava.



Rješenje: a)  $\omega = \sqrt{\frac{2k}{2m_2 + m_1}}$ , b)  $\omega = \sqrt{\frac{k}{4m_2 + 3m_1}}$

48. Tanki homogeni štap obješen je oko osi kroz jedan kraj. Koliki je odnos titrajnih vremena za štap duljine  $L$  i za isti štap duljine  $2L$ ?

Rješenje:  $T_L : T_{2L} = 0,707$

49. Puni homogeni disk polumjera  $R$  njiše oko horizontalne osi koja je okomita na bazu diska i udaljena je za  $r$  od središta baze. Koliki mora biti  $r$  da bi titrajno vrijeme mali oscilacija bilo minimalno?

Rješenje:  $r = 0,707 \cdot R$

50. Površinom vode se širi transverzalni ravni sinusni val, čija je amplituda 5 mm a valna duljina 2 cm. Kolika je elongacija čestice  $s(x, t)$  koja je od ishodišta udaljena 0,5 cm u trenu  $t = 0$ ? Predočite sliku vala i označite na slici elongaciju čestice!

Rješenje:  $s(0,5; 0) = -5 \text{ mm}$