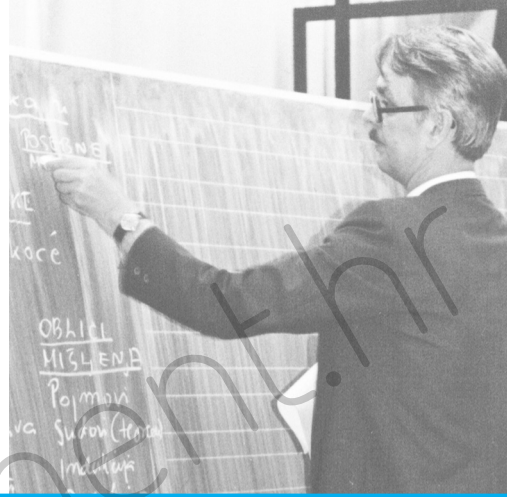


I.

MATEMATIČKI POJMOVI



Nastava matematike je složen proces. Na njezinu uspješnost utječu mnogi čimbenici. Neki od njih odnose se na važna pitanja jezika nastave matematike. Jezik nastave matematike sam po sebi je složen, jer sadrži dvije komponente: govorni jezik i matematički jezik. Oba jezika koriste se određenim simbolima, ali se uporabe simbola u matematičkom i govornom jeziku bitno razlikuju. Uporabom simbola u matematičkom jeziku postiže se kratkoća.

Osnovni pojmovi teorije skupova

U ovom odjeljku najprije ukratko opisujemo neke osnovne pojmove teorije skupova i operacije s njima, koji u nastavi matematike dopunjuju i obogaćuju matematički jezik i doprinose boljoj metodičkoj obradi, kratkoći zapisa i boljem razumijevanju nastavnog gradiva.

Pojam skupa

Pojam skupa je toliko jednostavan, da ga nije moguće i ne treba definirati. **Skup** je osnovni pojam.

Tijekom školovanja učenici upoznaju mnoge skupove. Izdvajamo one važnije: skup prirodnih brojeva \mathbf{N} , skup cijelih brojeva \mathbf{Z} , skup racionalnih brojeva \mathbf{Q} , skup iracionalnih brojeva \mathbf{I} , skup realnih brojeva \mathbf{R} , skup kompleksnih brojeva \mathbf{C} , skup mnogokuta, skup izometrija i dr.

Objekti koji tvore dani skup nazivaju se **elementi** ili **članovi** toga skupa. Činjenicu da neki objekt x pripada skupu X označavamo s $x \in X$.

Za skupove A i B kažemo da su **jednaki** i pišemo $A = B$ ako se oni sastoje od istih elemenata.

Ako su A i B skupovi sa svojstvom da je svaki element skupa A ujedno element skupa B , onda kažemo da je A **podskup** od B , odnosno da je B **nadskup** skupa A .



Operacije sa skupovima

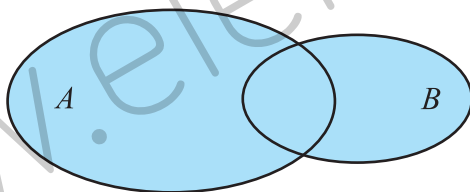
Među operacijama sa skupovima izdvajaju se tri: unija, presjek i razlika ili diferencija. Ove operacije omogućuju da se od zadanih skupova izgrađuju novi skupovi.

UNIJA SKUPOVA

Neka su A i B dani skupovi. Skup svih elemenata koji imaju svojstvo da pripadaju barem jednom od tih skupova naziva se **unija skupova** A i B i označava s $A \cup B$.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ili } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$



Svojstva:

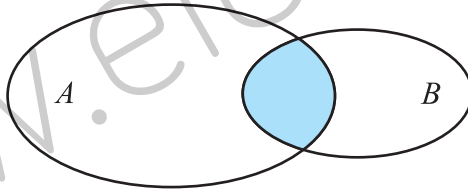
- 1) $A \cup B = B \cup A$ (zakon komutacije).
- 2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (zakon asocijacije).

PRESJEK SKUPOVA

Neka su A i B dani skupovi. Skup svih elemenata koji imaju svojstvo da pripadaju i skupu A i skupu B naziva se **presjek skupova** A i B i označava s $A \cap B$.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$



Svojstva:

- 1) $A \cap B = B \cap A$ (zakon komutacije).
- 2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (zakon asocijacije).

Vrijede još dva zajednička svojstva:

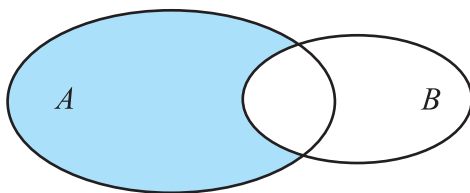
- 3) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (zakon distribucije presjeka s obzirom na uniju).
- 4) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (zakon distribucije unije s obzirom na presjek).

RAZLIKA ILI DIFERENCIJA SKUPOVA

Neka su A i B dani skupovi. Skup svih elemenata skupa A koji ne pripadaju skupu B naziva se **razlika** ili **diferencija skupova** A i B i označava s $A - B$.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}$$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$



KARTEZIJEV PRODUKT SKUPOVA

U ovoj točki opisujemo još jedan način gradnje novih skupova.

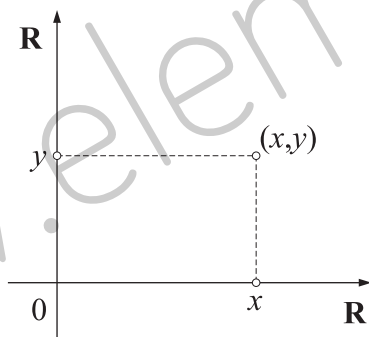
Neka su X i Y dani skupovi. Skup svih uređenih parova kod kojih je prvi element iz skupa X , a drugi iz skupa Y naziva se **Kartezijev produkt skupova** X i Y i označava s $X \times Y$.

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Ako je $Y = X$, onda kažemo da je produkt $X \times X$ **Kartezijev kvadrat** i označavamo ga na uobičajeni način zapisa kvadrata s X^2 . Prema tome je

$$X^2 = X \times X = \{(x, y) \mid x, y \in X\}.$$

Kao jednostavnu i važnu ilustraciju Kartezijskva kvadrata možemo promatrati **koordinatnu ravninu**. Nju dobijemo ako uzmemo da je $X = Y = \mathbf{R}$. Tada je $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$. Ovaj slučaj predočen je na donjoj slici.



Zaključak: Kartezijev produkt dvaju pravaca geometrijski gledano je ravnina.

Osnovni pojmovi matematičke logike

U nastavnom se procesu tijekom nastavnih sati matematike često iskazuju različite tvrdnje. Izdvajamo neke jednostavnije:

“ $\sqrt{2}$ nije racionalan broj”, “svi su prosti brojevi neparni”, “trokut s duljinama stranica 5, 12 i 13 jest pravokutan”, “broj π jednak je 3.14”, “aritmetička sredina dvaju različitih pozitivnih realnih brojeva veća je od geometrijske sredine istih brojeva”, “kvadrat je vrsta pravokutnika”, “visine trokuta uvijek se sijeku u jednoj točki”.

Pojam izjave

Sve navedene rečenice su matematičke izjave. Neke od njih su istinite, a neke neistinite, lažne.

Kad god se za neku tvrdnju može ustanoviti je li istinita ili neistinita, kažemo da je to **izjava**.

Na izjave asociraju i mnoge rečenice iz svakodnevnog govora:

“zaključak je ispravan”, “tvrdnja nije istinita”, “nije točno”, “to ima za posljedicu”, “ova tvrdnja implicira”, “vrijedi i jedno i drugo”, uzmimo da to nije tako”, “ne može biti oboje”.

Ako bismo željeli biti malo precizniji, onda bi za izjavu bila zadovoljavajuća sljedeća opisna definicija:

Izjava (izreka, iskaz, sud) je suvisla deklarativna rečenica koja se u pogledu istinitosti podvrgava načelu isključenog trećeg i načelu kontradikcije, tj. ona je ili istinita, ili neistinita.

Izjava je osnovni pojam matematičke logike, jedne od najvažnijih grana matematike. Ima važnost ne samo za teorijsku nego i primijenjenu matematiku, a velike su njezine primjene i u područjima i znanostima koje su međusobno jako udaljene kao što su tehnika (računski strojevi, automatizacija), biologija, ekonomija, psihologija, lingvistika i dr.



Logičke operacije

Od jednostavnih izjava možemo s pomoću nekoliko logičkih operacija graditi složene izjave. Jasno je da će sve složene izjave biti također istinite (oznaka: T) ili neistinite (oznaka: \perp).

NEGACIJA

Negacija je najjednostavnija logička operacija. U običnom govoru njoj odgovaraju riječi **ne**, **nije**.

Ako je A neka izjava, onda **nije A** nova je izjava koja je istinita onda i samo onda kada je izjava A neistinita. Izjava **nije A** naziva se **negacija** izjave A i označava s $\neg A$ (non A).

Tablica vrijednosti istinitosti:

A	$\neg A$
T	\perp
\perp	T

KONJUNKCIJA

Konjunkcija je složena logička operacija. Ova operacija po smislu odgovara veznicima **i**, **a**, **ali**.

Ako su A i B neke dane izjave, onda je **A i B** nova složena izjava koja je istinita onda i samo onda ako su istinite obje izjave A , B . Izjava **A i B** naziva se **konjunkcija** izjava A i B i označava s $A \wedge B$ (A et B).

Tablica vrijednosti istinitosti:

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	\perp	\perp
\perp	T	\perp
\perp	\perp	\perp

DISJUNKCIJA

Disjunkcija je složena logička operacija. Ova operacija po smislu odgovara vezniku **ili**. U mnogim europskim jezicima veznik ili ima dva različita značenja. U prvom slučaju veznik ili ne isključuje jednu izjavu, a u drugom isključuje.

Razlike u značenjima možete uočiti u sljedećim jednostavnim izjavama u svakodnevnom govoru:

“Svaka izjava je istinita ili neistinita”.

“Idući tjedan pitat će me matematiku ili fiziku”.

“Treba se pridržavati prometnih propisa ili platiti kaznu”.

“Danas u 20 sati obitelj ide u kino ili kazalište”.

Ovdje opisujemo ono značenje koje ne isključuje.

Ako su A i B neke dane izjave, onda je A **ili** B nova složena izjava koja je neistinita onda i samo onda kad su neistinite obje izjave A , B . Izjava A **ili** B naziva se **disjunkcija** izjava A i B i označava s $A \vee B$ (A vel B).

Tablica vrijednosti istinitosti:

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	⊥	T
⊥	T	T
⊥	⊥	⊥

IMPLIKACIJA

Ako su A i B neke dane izjave, onda je A **povlači** B nova složena izjava koja je neistinita onda i samo onda kad je izjava A istinita, a izjava B neistinita. Izjava A **povlači** B naziva se **implikacija** izjava A i B i označava s $A \Rightarrow B$ (A implicira B).

Osim “ A povlači B ” implikaciju $A \Rightarrow B$ izgovaramo i na druge načine: “Ako je A , onda je B ”, “ A je dovoljan uvjet za B ”, “ B je nužan uvjet za A ”.

Česta je implikacija složenijeg oblika $A \wedge B \Rightarrow C$, tj. implikacija u kojoj se pretpostavka sastoji od dviju izjava A i B , pa je ona složena izjava, konjunkcija $A \wedge B$ tih izjava.

Tablica vrijednosti istinitosti:

A	B	$A \Rightarrow B$
T	T	T
T	\perp	\perp
\perp	T	T
\perp	\perp	T

EKVIVALENCIJA

Ako su A i B neke dane izjave, onda je A **ekvivalentno** B nova složena izjava koja je istinita onda i samo onda kad izjave A i B imaju jednake vrijednosti istinitosti. Izjava A **ekvivalentno** B naziva se **ekvivalencija** izjava A i B i označava s $A \Leftrightarrow B$.

Tablica vrijednosti istinitosti:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
T	T	T
T	\perp	\perp
\perp	T	\perp
\perp	\perp	T

Što je pojam?

Objekti ili relacije razlikuju se međusobno svojim svojstvima, osobitostima, obilježjima. Od svih svojstava nekog objekta ili odnosa posebno su važna **bitna svojstva**, svojstva koja su njegova osobitost i kojima se on izdvaja iz skupa drugih objekata.

Primjeri:

“Djeljivost samo s 1 i sa samim sobom” osobitost je prostih brojeva u skupu prirodnih brojeva \mathbb{N} .

“Jednakost duljina svih stranica” osobitost je kvadrata u skupu pravokutnika.

“Raspolavljanje dijagonala” osobitost je paralelograma u skupu četverokuta.

“Osnovka je paralelogram” osobitost je paralelepipeda u skupu prizama.

“Jednakost konjugirano kompleksnih brojeva” osobitost je realnih brojeva u skupu kompleksnih brojeva \mathbb{C} .

Pojam je oblik mišljenja u kojem se odražavaju bitna svojstva objekata koji se proučavaju.

Proces formiranja nekoga pojma je postupan proces. Možemo ga u grubim crtama opisati ovako:

Početni i najjednostavniji stupanj spoznavanja pojma je promatranje i upoznavanje konkretnih objekata i njihovih konkretnih svojstava povezanih s pojmom i osjetilna spoznaja – **zapažanje**.

Drugi stupanj je uočavanje nečeg općeg i zajedničkog elementima u promatranom skupu objekata – **predodžba o pojmu**.

Treći stupanj je izdvajanje bitnog općeg svojstva takvih objekata – **formiranje i usvajanje pojma**.

Jedna od značajki pojma kao oblika mišljenja jest to što je formiranje pojma u spoznaji čovjeka neodvojivo od njegovog izražavanja **riječima**, **zapisom** ili **simbolom**. Ova značajka posebno dolazi do izražaja u matematici.

Recimo par riječi o riječi kao nositelju pojma. Nužan zahtjev koji trebaju zadovoljavati simbolika i riječ pri izražavanju danog pojma jest **jednoznačnost**.

Riječ koja označava strogo definirani pojam nekog znanstvenog područja naziva se **znanstveni termin**. Primjeri termina: *kosina*, *sol*, *glagol*, *osmoza*, *polje*, *funkcija*, *elipsa* i dr.

Ponekad imamo više termina koji jednoznačno izražavaju jedan te isti pojam. To ukazuje na bogatstvo jezika, ali i daje jasnije i točnije određenje samog pojma.

Sinonimi

- 1) Termini za najjednostavniji četverokut-kvadrat:
Kvadrat, pravilni četverokut, romb s pravim kutom.
- 2) Dužina s istaknutom početnom i krajnjom točkom:
Usmjerena dužina, vektor.
- 3) Termini za funkcije $f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$):
Linearna funkcija, polinom prvog stupnja.
- 4) Termini za funkciju $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$):
Kvadratna funkcija, polinom drugog stupnja.
- 5) Termini za osnovnu funkciju na skupu poligona:
Površina, ploština.

• • •

Ponekad se odstupa od gornjeg zahtjeva jednoznačnosti, pa se jedna te ista riječ upotrebljuje za izražavanje više pojmova. To može dovesti do nejasnoće i nerazumijevanja, a posebno je nepoželjno u nastavi, gdje učenici tek usvajaju programom propisani sustav pojmova.

Nekoliko terminoloških problema

- 1) Riječ **korijen** se shvaća na različite načine:
korijen iz broja, korijen jednadžbe, korijen biljke, korijen zuba, korijen živca.

Dvoznačnost u nastavi matematike treba se izbjeći dosljednom zamjenom slabog termina **korijen jednadžbe** zaista primjerenim terminom **rješenje jednadžbe**.

- 2) Riječ **rješenje** ima i jednu slabu stranu: uobičajeno je da se postupak obrade nekog problema naziva rješenje, pa tako često imamo rješenje problema u kojemu imamo više rješenja! Metodički ispravnije je da se postupak naziva **rješavanje**, a rezultati **rješenja**.
- 3) Simbol AB često označava ove objekte:
 AB – pravac točkama A i B , AB – dužina s krajevima A i B , AB – udaljenost točaka A i B .

Ova višeznačnost eliminira se dosljednom uporabom za te objekte primjerenih različitih simbola AB , \overline{AB} , $|AB|$.

Opseg, sadržaj i rodovi pojma

Svaki pojam P ima svoj opseg i sadržaj.

Opseg pojma P je skup svih pojedinačnih objekata ili relacija na koji se može primijeniti jezični izraz pojma. Označava se s O_P .

Sadržaj pojma P je skup svih bitnih obilježja koja imaju svi objekti ili relacije iz opsega pojma. Označava se sa S_P .

Sadržaj pojma razotkriva se s pomoću **definicije**, opseg pojma s pomoću **klasifikacije**.

Sadržaj pojma potpuno određuje njegov opseg i obrnuto, opseg pojma potpuno određuje njegov sadržaj. Ako se mijenja sadržaj, mijenja se i opseg. Nije teško vidjeti da tu postoji jedna obrnuta zavisnost (što je bogatiji sadržaj, to je manje objekata koji imaju sva ta svojstva i obrnuto).

Pomoću opsega pojma možemo sada uvesti pojmove **rod** i **vrsta**, koji su posebno važni prilikom definiranja pojma.

Ako je opseg O_{P_1} pojma P_1 sadržan u opsegu O_{P_2} pojma P_2 , onda se kaže da je pojam P_2 **rod** u odnosu na pojam P_1 , a pojam P_1 **vrsta** u odnosu na pojam P_2 .

Vrste i rodovi

- 1) Za pojam **prirodan broj** rodovi su cijeli nenegativan broj, cijeli broj, racionalan broj, realan broj i kompleksan broj.
- 2) Za pojam **kvadrat** rodovi su pravokutnik, romb, paralelogram, trapez, četverokut, mnogokut i skup točaka ravnine.
- 3) Za pojam **srednjica trokuta** rodovi su dužina i skup točaka pravca.
- 4) Za pojam **paralelepiped** rodovi su četverostrana prizma, prizma, poliedar i skup točaka prostora.

- 5) Pojmovi **pravokutnik** i **romb** imaju iste rodove. To su: paralelogram, trapez, četverokut, mnogokut i skup točaka ravnine.

Pojam P , sadržaj S_P , opseg O_P , rodovi, vrste

P : **elipsa**

S_P : zbroj udaljenosti bilo koje točke krivulje od dviju čvrstih točaka ravnine je konstantan, krivulja se u ravninskom pravokutnom koordinatnom sustavu predočuje jednadžbom $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

Rodovi: krivulja drugog reda, ravninska krivulja, geometrijsko mjesto točaka ravnine, krivulja koja se analitički predočuje jednadžbom drugog stupnja s dvjema nepoznicama, skup točaka ravnine i dr.

• • •

P : **krivulja drugog reda**

S_P : pravac siječe krivulju u najviše dvjema točkama, iz točke u ravnini mogu se na krivulju povući najviše dvije tangente, krivulja se analitički predočuje jednadžbom drugog stupnja s dvjema nepoznicama i dr.

O_P : kružnice, elipse, parabole, hiperbole.

Rodovi: ravninska krivulja, skup točaka ravnine.

• • •

P : **kvadar**

S_P : strane su pravokutnici, susjedne strane su okomite, bridovi iz istog vrha su međusobno okomiti i dr.

O_P : kvadri, uspravne kvadratne prizme, kocke.

Rodovi: paralelepiped, uspravna četverostrana prizma, četverostrana prizma, prizma, poliedar, uglato geometrijsko tijelo, skup točaka prostora.

• • •

P : **obujam poliedra**

S_P : nenegativna funkcija, aditivna funkcija, sukladnim poliedrima pridružuje isti broj, bar jednoj kocki pridružuje broj 1 i dr.

O_P : obujam tetraedra, obujam piramide, obujam prizme i dr.

Rodovi: obujam tijela, obujam skupa točaka prostora.



P : paralelni pravci

S_P : leže u istoj ravnini, jednako su udaljeni jedan od drugog, nemaju zajedničkih točaka ili se podudaraju i dr.

Rodovi: skup parova pravaca ravnine.



P : paralelogram

S_P : nasuprotne stranice su paralelne, nasuprotne stranice su sukladne, nasuprotni kutovi su sukladni, kutovi uz istu stranicu su suplementni, dijagonale se raspolavljaju i dr.

O_P : romboidi, rombi, pravokutnici, kvadrati.



P : površina mnogokuta

S_P : nenegativna funkcija, aditivna funkcija, sukladnim mnogokutima pridružuje isti broj, bar jednom kvadratu pridružuje broj 1 i dr.

O_P : površina trokuta, površina četverokuta, . . . , površina n -terokuta.

Rodovi: površina skupa točaka ravnine.



P : relacija ekvivalencije

Relacija ekvivalencije ρ na skupu S je važan matematički pojam. Susrećemo ga u raznim područjima matematike, pa je opseg toga pojma dosta širok. Navest ćemo neke njegove elemente koji su poznati i u školskoj matematici.

S_P : refleksivnost, simetričnost, tranzitivnost.

O_P : jednakost skupova, jednakost brojeva, jednakost vektora, sukladnost likova, sličnost likova, paralelnost pravaca, paralelnost ravnina i dr.

Rodovi: relacija, skup.