Uvod

Logika je grčka riječ koja označava učenje o govoru, riječi, umu, razumu, razlogu, mišljenju... Kao primarno značenje obično se uzima *govor*.

Što je matematička logika? Je li matematička logika primjena matematike prilikom logičkih zaključivanja, ili pak neka "stroža" primjena logike prilikom matematičkih dokaza? Je li logika grana matematike ili obrnuto, ne slažu se ni svi logičari u odgovoru. Posebno se razlikuju odgovori koje daju logičari koji se bave intuicionističkom logikom, te odgovori koje su dali logičari nazivani logicistima.

Intuicionisti smatraju da su matematičke konstrukcije osnova, a logičko rasuđivanje je sekundarno. Logicisti pak smatraju da se matematika zasniva na logici, tj. da je matematika grana logike. O svemu tome nešto ćemo detaljnije reći kasnije. Jedno je sigurno: matematička je logika jedna od matematičkih teorija. Neki njeni veliki dijelovi su: teorija skupova, teorija modela, teorija dokaza, teorija rekurzije...

Sada ćemo navođenjem najvažnijih činjenica iz povijesti zapadno-europske logike pokušati opisati njezin nastanak. Na razvitak europske matematike i mišljenja uopće gotovo je jedino utjecala grčka matematika i filozofija. Povijest se logike može grubo podijeliti na razdoblja stvaranja i razdoblja zastoja. Stvaralačka su razdoblja logike 4. i 3. st. pr. Kr., zatim od 12. do 15. st., te od sredine 19. st. do naših dana. Dakle, podjela povijesti zapadne logike slijedi pet velikih razdoblja: tri razdoblja stvaranja i dva razdoblja stagnacije. Opisat ćemo kratko redom svako razdoblje stvaranja. Uz razvoj matematičke logike svakako je blisko povezan i razvoj aksiomatske metode u matematici. Za bolje razumijevanje povijesti matematičke logike ujedno ćemo paralelno opisivati i razvoj aksiomatske metode.

Početak grčke logike datira od četvrtog stoljeća pr. Kr. Prvim većim logičarima smatraju se Parmenid, Zenon, Sokrat, Platon i Euklid iz Megare. To razdoblje razvoja dostiže vrhunac genijalnim stvaranjem Aristotela[1]. Njemu je prvom uspjelo sistematizirati metode rasuđivanja koje su do tada bile poznate, te je proučavanjem silogizama[2] pokušao sustavno opisati sva logička zaključivanja. Glavna Aristotelova teza bila je da se svako korektno rasuđivanje može svesti na sistematsku primjenu nevelikog broja određenih pravila, koja ne zavise od prirode objekata na koji se odnosi rasuđivanje. U okvirima do danas razvijenih dijelova matematičke logike Aristotelova je silogistika samo malen i prilično elementaran dio koji pripada logici jednomjesnih predikata. U istom je stoljeću Euklid u svojim radovima *Elementi* prvi pokušao aksiomatski zasnovati geometriju.

[1] Aristotel, 384.–322. pr. Kr.

[2] Aristotelova silogistika ima veliku povijesnu vrijednost jer je bila prvi primjer stroge izgradnje jednog formalno-logičkog sustava. Tijekom dvaju tisućljeća (do pojave matematičke logike) ona je zapravo bila jedina formalna logika. Još je krajem 18. stoljeća njemački filozof Kant (1724.–1804.) smatrao da je Aristotel rekao sve što se uopće može reći o zakonima formalne logike, i da je zbog toga formalna logika u nekom smislu mrtva nauka koja se ne može više uopće razvijati. No, logička istraživanja Aristotela i njegovih sljedbenika nisu se završila samo na silogistici. Aristotel i njegov učenik Teofrast (372.–287. pr. Kr.) dali su temelje modalnoj logici. Burni razvoj matematičke logike, koji je počeo sredinom prošlog stoljeća, opovrgnuo je Kantovo mišljenje.

Kasnogrčko i rimsko razdoblje u razvitku logike odlikuju se uglavnom poboljšavanjem i sistematiziranjem onoga što je već ranije napravljeno. To razdoblje završava oko 6. stoljeća naše ere. Sljedećih šest stoljeća za logiku u Europi znače potpuni mir. Od 12. do 15. stoljeća nastupa doba skolastičke logike. Novo doba, doba tzv. klasične logike, u znaku je vraćanja Aristotelu kao jedinom autoritetu.

Matematička simbolika koju su u 16. stoljeću uveli Viète[3] i Descartes[4] inspirirala je mnoge pokušaje simboličkih zapisa logičkih rasuđivanja i matematičkih dokaza. Do Leibniza,[5] svi su ti pokušaji vrlo površni i bez velikog značenja. Leibnizova osnovna filozofska ideja bila je stvaranje jednog općeg simboličkog jezika uz čiju bi se pomoć svi procesi rasuđivanja i zaključivanja mogli zapisati simbolima i formulama. Radio je na algebraizaciji Aristotelove logike i tako se približio onom što danas zovemo Booleova algebra.

Osnivačem suvremene simboličke formalne logike može se smatrati Boole[6]. Booleov krajnji cilj bio je stvaranje odgovarajuće simbolike i oblikovanje zakona za manipuliranje simbolima po uzoru na aritmetiku. Neinterpretirane jednadžbe u dokazima smetale su čistom logičkom razumijevanju osnovnih zakona, pa je počelo "čišćenje" od aritmetike.

Dedekind[7] je dao aksiomatizaciju prirodnih brojeva. Treba spomenuti da se ta aksiomatizacija prirodnih brojeva obično naziva Peanovi aksiomi. Peano[8] je sveo čitavu aritmetiku na tri primitivna pojma: "broj", "nula" i "sljedbenik", te pet aksioma. Ti aksiomi preuzeti su iz Dedekindova rada *Was sind und was sollen die Zahlen?* iz 1888. godine. Međutim, Dedekind ih u svom radu ne korisiti kao aksiome.

Frege[9] je odgovarajući na pitanje što je logika formulirao predikatni račun kao formalnu teoriju. U radu *Begriffschrift eine der aritmetischen nachgebildeten Formelsprache des reinen Denkens* iz 1879. Frege je formalizirao matematičko argumentiranje u peanovskom smislu, ali u potpunosti kakvu Peano nikad nije postigao. Redukciju matematike na logiku, koja predstavlja veliku ambiciju logicizma, opisao je i obranio Frege u svom radu *Die Grundlagen der Arithmetik* iz 1884., a to je realizirao sistematski u radu *Grundgesetze der Arithmetik*. Prije završetka drugog toma svog djela *Grundgesetze der Arithmetik* Frege je primio pismo od Russella[10] u kojem je opisan paradoks[11] skupa svih skupova koji nisu elementi sebe samih. Frege je taj Russellov paradoks tumačio kao sasvim poražavajući za sistem koji je konstruirao. Fregeovi radovi naišli su na potpuno nerazumijevanje suvremenika. Frege je postao općepriznat tek pedesetak godina nakon objavljivanja svojih radova.

Frege je prvi uspio objediniti aksiomatiku i logiku, te dati formalni sistem za potpuni opis logike prvog reda. Sljedećom skicom prikazujemo do sada opisani paralelni razvoj aksiomatske metode i logike.

---

[3] F. Viète, 1540.–1603.

[4] R. Descartes, 1596.–1650.

[5] G. W. Leibniz, 1646.–1716.

[6] G. Boole, 1815.–1864.

[7] W. Dedekind, 1831.–1916.

[8] G. Peano, 1858.–1932.

[9] G. Frege, 1848.–1925.

[10] B. Russell, 1872.–1970.

[11] Russellov paradoks: Označimo s A kolekciju skupova $\{x : x \notin x\}$. Dakle, A sadrži sve skupove koji ne sadrže sebe same. Ako pretpostavimo da je A skup, tada je smisleno pitanje pripada li A skupu A. No, ako je A element od A, tada skup A ima dano svojstvo, tj. $A \notin A$. Na isti način iz pretpostavke $A \notin A$ slijedi $A \in A$, što sve zajedno vodi na kontradikciju. U prvi tren moglo bi se reći da A nije skup, pa zapravo ni nema paradoksa. No, onda se postavlja pitanje koji će biti kriterij prilikom definicije skupa. Kako ćemo znati slijedi li kontradikcija iz pretpostavke o egzistenciji nekog skupa?

AKSIOMATIKA		**LOGIKA**
Euklid (4. *st. pr. Kr.*)		*Aristotel* (4. *st. pr. Kr.*)
$\vdots$		$\vdots$
Dedekind (1888.)		*Boole* (1847.)
	G. Frege (1879.)	

U svrhu zasnivanja osnova matematike Cantor[12] je razvio novu teoriju – naivnu teoriju skupova. U vrlo kratkom vremenu dobiveno je mnogo važnih rezultata. Činilo se da je teorija skupova upravo traženi temelj matematike. No, nažalost, dogodilo se upravo suprotno, tj. ne samo da nova teorija nije mogla biti temelj matematike, već se u okviru nje pojavilo nešto što matematičari nikako nisu mogli dopustiti. U Cantorovoj teoriji skupova otkriveni su paradoksi (prije smo već istaknuli Russellov paradoks), štoviše čitavo mnoštvo[13]. Činilo se da je matematika u velikoj krizi. No, to je bio snažan poticaj za istraživanje osnova matematike.

Russell je od 1910. do 1913. u suradnji s Whiteheadom[14] izdao tri toma knjige *Principia mathematica* u kojoj primjenjuju veoma precizan logički jezik, inspiriran Peanovom simbolikom, te ostvaruju tako većinu Fregeovih ideja: paradoksi koje sadrži Fregeov sistem izbjegnuti su uvođenjem teorije tipova.

Hilbert[15], za razliku od Fregeova i Russellova logicizma, zalagao se za koncepciju da simboli i operacije na simbolima čine centralno osnovno mjesto matematike. Takva filozofija matematike naziva se formalizam. Hilbert je smatrao da je centralni problem za svaku granu matematike dokazati da dokazni postupci neće nikada rezultirati s nekom izjavom i istovremeno negacijom iste izjave. Za ostvarenje ovog programa (nazvanog Hilbertovim programom) Hilbert zasniva novu granu matematičke logike koja se naziva teorija dokaza. Uz nekoliko iznimaka, Russellovo djelo *Principia Mathematica* nije imalo većih neposrednih sljedbenika, a to znači ni logicizam. Formalizam[16] je postao dominatna težnja u matematici.

Kao neposredno suprotstavljenu koncepciju formalizmu treba svakako navesti intuicionizam. Začetnici te filozofije matematike su L. Kronecker[17] i L. E. J. Brouwer[18]. Za intuicioniste je egzistencija nekog matematičkog objekta ekvivalentna s poznavanjem metode kojom se taj objekt može konstruirati. Oni ne priznaju indirektni dokaz u općem slučaju. Heyting[19] je dao aksiomatizaciju intuicionističke logike koja se razlikuje od klasične logike po tome što su ispušteni zakoni isključenja trećeg $(P \vee \neg P)$ i dvostruke negacije $(\neg\neg P \rightarrow P)$.

Gödel[20] je 1930. dokazao potpunost logike prvog reda. Njegov rad *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und Verwandter Systeme* iz 1931. srušio je sve

[12] G. Cantor, 1845.–1918.

[13] Uz već spominjani Russelov paradoks među najpoznatije paradokse ubrajaju se Cantorov paradoks skupa svih skupova i Burali-Fortijev paradoks (C. Burali-Forti, 1861.–1931.).

[14] A. N. Whitehead, 1861.–1947.

[15] D. Hilbert, 1862.–1943.

[16] U Burbakijevim Elementima matematike, koji na neki način predstavljaju kraj i kulminaciju formalizma, osnove matematike predstavljene su kao simbolička logika i aksiomatska teorija skupova.

[17] L. Kronecker, 1823.–1891.

[18] L. E. J. Brouwer, 1881.–1966.

[19] A. Heyting, 1898.–1980.

[20] K. Gödel, 1906.–1978.

nade u ostvarenje Hilbertova programa u prvotnom obliku. U tom radu Gödel je dokazao da je svaki formalni sistem, koji sadrži barem elementarnu aritmetiku, nužno nepotpun, tj. da postoji tvrdnja koja se ne može dokazati ni opovrgnuti u tom formalnom sistemu. Taj se rezultat naziva prvi Gödelov teorem nepotpunosti. Drugi Gödelov teorem tvrdi da se konzistentnost nijednog formalnog sistema ne može dokazati u njemu samom, tj. mora se posegnuti za jačim sredstvima od onih kojima raspolaže sam sistem.

Rezultate drugih logičara nakon Gödela ovdje ne navodimo jer smatramo da više nisu u tako bliskoj vezi sa sadržajem ovog udžbenika, tj. s klasičnom logikom sudova i logikom predikata.

Može se reći da je matematička logika na početku imala za cilj istražiti pravilna logička zaključivanja, a zatim je osnovna preokupacija bila ispitati osnove matematike (npr. Hilbertov program). Danas matematička logika predstavlja i teorijske osnove računarstva. Zapravo, može se reći da određena formalna teorija opisuje “stanje stroja”, odnosno formalni se dokaz može promatrati kao program za računalo.

Udžbenik je podijeljen na dva poglavlja. U prvom poglavlju proučavamo klasičnu logiku sudova. Prvo definiramo jezik i semantiku teorije. U četvrtoj točki definiramo pojam normalne forme i dokazujemo teorem o egzistenciji normalnih formi, te promatramo baze propozicionalnih veznika. Peta točka posvećena je testovima valjanosti za logiku sudova. Posebno je važan tzv. glavni test. U ovoj ga točki promatramo za logiku sudova kako bi onda bilo lakše razumjeti glavni test za logiku prvog reda. Ostale točke prvog poglavlja posvećene su formalnom dokazu. U šestoj točki definiramo jedan hilbertovski sistem za logiku sudova. Dokazujemo adekvatnost i potpunost sistema u odnosu na prije definiranu semantiku. Zatim razmatramo sistem prirodne dedukcije za logiku sudova, te dokazujemo teoreme dedukcije, adekvatnosti i potpunosti. U osmoj točki navodimo neke alternativne aksiomatizacije logike sudova. U posljednjoj točki prvog poglavlja razmatramo dvije neklasične logike sudova. To su intuicionistička logika i modalna logika.

Drugo poglavlje knjige posvećeno je klasičnoj logici predikata, odnosno logici prvog reda. Kao i kod logike sudova, u početnim točkama definiramo jezik i semantiku. U četvrtoj točki dokazujemo teorem o egzistenciji preneksne normalne forme za proizvoljnu formulu. Peta je točka posvećena glavnom testu za ispitivanje valjanosti formula prvog reda. U šestoj točki definiran je račun logike prvog reda, te s pomoću toga pojam proizvoljne teorije prvog reda. U sedmoj točki dokazan je generalizirani teorem potpunosti za proizvoljnu teoriju prvog reda, te su navedene razne posljedice (Gödelov teorem potpunosti, teorem kompaktnosti, Löwenheim-Skolemov teorem...). U sljedećoj točki razmatrani su neki primjeri teorija prvog reda. U posljednoj točki drugog poglavlja bavimo se konstrukcijom modela s pomoću ultraprodukata.

Na kraju ovog uvoda želimo još samo istaknuti da za skupove brojeva koristimo sljedeće oznake:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ skup prirodnih brojeva (uočite da smo definirali da je 0 prirodan broj)

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, \}$ skup cijelih brojeva

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ skup racionalnih brojeva

$\mathbb{R}$ skup realnih brojeva

$\mathbb{C}$ skup kompleksnih brojeva

1. Logika sudova

1.1. Uvod

Jedan od osnovnih problema u matematičkoj logici jest ispitati istinitost neke rečenice, bolje reći logičke forme, promatrajući samo oblik rečenice, a ne i sadržaj. Logika sudova je jedna od najjednostavnijih formalnih teorija. U njoj rečenice promatramo kao forme koje su sastavljene od "atomarnih" dijelova koji su povezani veznicima: *ne, i, ili, ako ... onda* i *ekvivalentno.* U logici sudova ne vršimo daljnju analizu rečenice (npr. u odnosu na kvantifikatore). Intuitivno, sud je svaka suvisla izjavna rečenica koja je istinita ili lažna, ali ne oboje. No, to svakako ne može biti definicija suda jer tada se postavlja pitanje npr. što je rečenica, ili pak što je istinita rečenica. Pokušat ćemo objasniti pojam suda s pomoću nekoliko primjera.

(1) Rečenica *"Dva plus dva jednako je četiri."* jest sud, i to istinit.

(2) Rečenica *"Dva plus dva jednako je pet."* jest sud, i to lažan.

(3) Rečnica *"x plus dva jednako je osam."* nije sud jer za ovu rečenicu ne možemo reći je li istinita ili lažna dok nismo rekli koliko je x.

(4) Rečenica *"Ja sada lažem."* nije sud jer, pretpostavimo li da je istinita, onda sam zaista lagao, pa je ono što sam rekao lažno. Obrnuto, pretpostavimo li da je ta rečenica lažna onda nisam lagao, pa je ono što sam rekao istina. Dakle, za ovu rečenicu ne možemo reći ni da je istinita, a ni da je lažna.

(5) Rečenica *"Koliko je sati?"* nije sud jer nije izjavna rečenica.

Sudovi (1) i (2) jednostavnog su oblika. S pomoću veznika *i, ili, ako ... onda* i *nije* možemo iz jednostavnih sudova graditi složene. Na primjer, rečenica *"Ako Vanja uči, onda Ivona* *gleda crtane filmove."* primjer je složenog suda jer je nastala s pomoću veznika *ako ... onda* iz jednostavnih sudova.

U logici sudova, osim što se ispituje istinitost rečenica, proučavaju se i logička zaključivanja, te se određuje koja su korektna, a koja nisu. Promotrimo dva primjera.

$$\begin{array}{l} \text{Ako si nabavio ulaznice tada idemo na utakmicu.} \\ \text{Nabavio sam ulaznice.} \\ \hline \text{Idemo na utakmicu.} \end{array}$$

Ovo je, naravno, primjer korektnog zaključivanja. Formalno zapisano, ono je oblika:

$$\begin{array}{l} A \to B \\ A \\ \hline B \end{array}$$

Nadamo se da se slažete da zaključivanje:

$$\begin{array}{l} \text{U subotu ću dugo spavati.} \\ \text{Danas nije subota.} \\ \hline \text{Danas sam rano ustao.} \end{array}$$

nije korektno. Formalno ga možemo zapisati u obliku:

$$\begin{array}{l} A \to B \\ \neg A \\ \hline \neg B \end{array}$$

U ovom ćemo poglavlju definirati što je logička posljedica, tj. koje zaključivanje smatramo korektnim. Kao što smo već u Uvodu spomenuli, još je Aristotel pokušao s pomoću nevelikog broja pravila opisati svako logičko zaključivanje. Time se i mi bavimo u ovom poglavlju za logiku sudova.

Budući da ćemo definirati nekoliko formalnih teorija, sada ćemo kratko objasniti u nekoliko rečenica što znači zadati neku teoriju. Na početku se polazi od nekog broja pojmova koji se ne definiraju, a nazivaju se *osnovni pojmovi.* (Primjerice, prilikom aksiomatizacije geometrije Hilbert ne definira točku, pravac i ravninu; za razliku od Euklida.) To zapravo znači da smo zadali jezik teorije. Zatim se popišu osnovne tvrdnje o danim osnovnim pojmovima koje se smatraju istinitima. Te tvrdnje čiju istinitost ne dokazujemo nazivamo *aksiomima.* Svaki novi pojam uvodimo definicijom s pomoću osnovnih pojmova. Svaku novu tvrdnju dokazujemo logičkim zaključivanjem na osnovi aksioma, definicija i tvrdnji koje smo već ranije dokazali. Obično se želi da izabrani aksiomi zadovoljavaju sljedeća tri principa:

a) **konzistentnost**, tj. iz sistema aksioma ne smije se moći dokazati istovremeno neka tvrdnja i njena negacija;

b) **potpunost**, tj. svaka tvrdnja, ili njena negacija, dokaziva je u danom sistemu aksioma;

c) **nezavisnost**, tj. niti jedan aksiom ne može se dobiti kao posljedica ostalih.

1.2. Jezik logike sudova

U ovoj točki definiramo što su osnovni znakovi teorije koju proučavamo, tj. logike sudova, te kako gradimo nama zanimljive nizove znakova – formule. Kada je to zadano, smatramo da je zadan **jezik** teorije. Prije definicije formula moramo uvesti još neke pojmove. **Alfabet** je proizvoljan neprazan skup. Svaki element alfabeta nazivamo **simbolom** ili **znakom**. **Riječ** alfabeta je svaki konačan niz danog alfabeta. **Duljina riječi** je broj simbola koji dolaze u riječi. Ako je s A označen neki alfabet, tada se skup svih riječi obično označava s A^*. Po dogovoru smatramo da skup svih riječi proizvoljnog alfabeta sadrži **praznu riječ**, tj. prazan niz simbola. Najvažnija operacija na skupu riječi jest **konkatenacija.** Konkatenacija je binarna operacija na A^*, koja je definirana na sljedeći način: ako su a i b riječi (bolje reći oznake za riječi!), tada kažemo da je riječ ab nastala konkatenacijom riječi a i b. Kažemo da je b **podriječ** riječi a ako postoje riječi c i d tako da je riječ a nastala konkatenacijom riječi c, b i d, tj. a je jednaka cbd.

Navodimo neke primjere alfabeta. Neka je $A_1 = \{\alpha, \beta\}$. Neke riječi tog alfabeta su npr. $\alpha\alpha\alpha$, $\alpha\beta\alpha\beta\beta\beta$, $\alpha\alpha\beta\beta\alpha\alpha\beta$. Iz riječi $\alpha\alpha\beta\beta$ i $\beta\beta\alpha\beta$ konkatenacijom dobivamo riječ $\alpha\alpha\beta\beta\beta\beta\alpha\beta$.

Neka je, zatim, $A_2 = \{+,\ \cdot,\ s,\ 0,\ =\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Tada su riječi alfabeta A_2 npr. $x_1 + x_2 = x_2$, $x_1 \cdot x_4 + 0 = x_5$, ali i $++\cdot x_4 ===$.

U sljedećoj propoziciji ističemo činjenicu koju ćemo kasnije često koristiti. Ne dokazujemo je jer smatramo da je poznata (npr. vidi [34]).

Propozicija 1.1. *Skup svih riječi konačnog ili prebrojivog alfabeta je prebrojiv.*

Mi se nećemo baviti proizvoljnim alfabetima, ili pak problemom prepoznavanja riječi. Definirat ćemo jedan konkretan alfabet nad kojim ćemo dalje graditi formalnu teoriju – logiku sudova. Naravno, logika prvog reda imat će drukčiji alfabet.

Definicija 1.2. **Alfabet logike sudova** *je unija skupova* A_1, A_2 *i* A_3, *pri čemu je:*

$A_1 = \{P_0, P_1, P_2, \ldots\}$	*prebrojiv skup čije elemente nazivamo* **propozicionalnim varijablama**;
$A_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$	*skup* **logičkih veznika**;
$A_3 = \{(,)\}$	*skup pomoćnih simbola (zagrade).*

Uočite da smo u definiciji naveli da alfabet logike sudova sadrži znakove koje nazivamo propozicionalnim varijablama. Možete zamišljati da se propozicionalne varijable interpretiraju sudovima, ali to ne mora nužno biti tako. Jedna interpretacija logike sudova jest i npr. elektronički logički sklopovi. U sljedećoj ćemo točki formalno definirati interpretacije propozicionalnih varijabli.

Logički veznici redom se nazivaju: $\neg$ **negacija**, $\wedge$ **konjunkcija**, $\vee$ **disjunkcija**, $\rightarrow$ **kondicional** i $\leftrightarrow$ **bikondicional**. Ponekad se definira da alfabet sadrži i znakove $\top$ i $\perp$, koji se nazivaju **logičke konstante** *istina* i *laž.* Mi ovdje smatramo da ih alfabet ne sadrži. Naravno, ne zanimaju nas sve riječi alfabeta. Primjerice, svakako nećemo promatrati riječ $\neg\wedge)P_2()$. Sada definiramo najvažnije riječi alfabeta logike sudova, a to su formule.

Definicija 1.3. **Atomarna formula** *je svaka propozicionalna varijabla. Pojam* **formule** *definiramo induktivno:*

a) svaka atomarna formula je formula;

b) ako su A *i* B *formule, tada su i riječi* $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ *i* $(A \leftrightarrow B)$ *također formule;*

c) riječ alfabeta logike sudova je formula ako je nastala primjenom konačno mnogo koraka uvjeta a) i b).

Napomena 1.4. Primijetimo da u prethodnoj definiciji A i B nisu formule već oznake za formule, tj. to nisu simboli jezika već su metasimboli. Po dogovoru ćemo s velikim slovima (npr. A, B, C, F, G, F_1, F_2, ...) označavati formule. Za propozicionalne varijable upotrebljavat ćemo oznake P, Q, R, S, ...

Način zapisivanja formula s obzirom na zagrade, kako smo prethodno definirali, naziva se sistem vanjskih zagrada. Zapis formula može se definirati i u sistemu unutarnjih zagrada ili pak u poljskoj notaciji, tj. bez zagrada. Ako su A i B formule, u sistemu unutarnjih zagrada definirali bismo da su tada $\neg(A)$, $(A) \wedge (B)$, $(A) \vee (B)$, $(A) \rightarrow (B)$, i $(A) \leftrightarrow (B)$ formule. U daljnjem tekstu nećemo se strogo držati zapisivanja formula s pomoću zagrada, već ćemo uvesti prioritet logičkih veznika. Najveći prioritet ima negacija, zatim veznici $\wedge$ i $\vee$, a najmanji prioritet (ali isti) imaju veznici $\rightarrow$ i $\leftrightarrow$. No, to ne znači da ćemo se potpuno odreći zagrada prilikom zapisivanja formula. U nekim ćemo situacijama pisati zagrade kako bismo istaknuli prioritet nekog veznika. Tako bi zapis formule $(((\neg P) \wedge Q) \rightarrow R)$ u sistemu unutarnjih zagrada izgledao $((\neg(P)) \wedge (Q)) \rightarrow (R)$, dok ćemo je mi obično zapisivati kao $(\neg P \wedge Q) \rightarrow R$.

Kažemo da je formula B **potformula** formule A ako je riječ B podriječ od A. Promotrimo nekoliko primjera formula i potformula. Najjednostavniji primjer formule je P_k, tj. po definiciji svaka propozicionalna varijabla je formula. Formula $P \vee Q$ je potformula formule $(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg Q \wedge P)$. Ako alfabet logike sudova sadrži i logičke konstante, tada su po definiciji i $\top$, odnosno $\bot$, također atomarne formule. Tada **zatvorenom formulom** nazivamo svaku formulu koja ne sadrži propozicionalne varijable. Primjerice, $(\top \wedge \bot) \rightarrow (\bot \vee (\top \wedge (\bot \rightarrow \top)))$ jedna je zatvorena formula.

Složenost formule je broj veznika koji nastupaju u toj formuli. Ako je A formula, tada ćemo s $k(A)$ označavati složenost od A. Složenost svake atomarne formule je nula, dok je, na primjer, složenost formule $(\neg P \wedge Q) \rightarrow (\neg\neg R \leftrightarrow Q)$, jednaka šest.

Ako su A i B oznake za istu formulu, tada pišemo $A \equiv B$ i govorimo da su formule A i B jednake. Znak $\equiv$ nije znak alfabeta logike sudova već je pomoćni, tj. metasimbol. Za jednakost formula ne upotrebljavamo znak $=$ jer ćemo ga kod logike predikata koristiti kao osnovni znak alfabeta.

Neka je A formula te neka je $\{P_1, \ldots, P_n\}$ skup svih propozicionalnih varijabli koje se pojavljuju u A. To kratko označavamo s $A(P_1, \ldots, P_n)$. Ponekad ćemo skup svih varijabli koje se javljaju u formuli A označavati s $Var(A)$.

Neka je zatim B neka formula. Formulu dobivenu zamjenom neke varijable P_i s B u formuli A označavamo s $A(B/P_i)$. Ako su pak $B_1, \ldots, B_n$ proizvoljne formule, tada simultanu zamjenu varijabli P_i s formulama B_i označavamo s $A(B_1/P_1, \ldots, B_n/P_n)$, ili pak kratko $A(B_1, \ldots, B_n)$.

1.3. Interpretacije

U prethodnoj točki definirali smo sintaksu logike sudova. U ovoj ćemo točki definirati semantiku, tj. definirati što znači da je neka formula istinita, odnosno neistinita.

Definicija 1.5. *Svako preslikavanje sa skupa svih propozicionalnih varijabli u skup* $\{0,1\}$, *tj.* $I : \{P_0, P_1, \ldots\} \to \{0,1\}$ *nazivamo* **totalnom interpretacijom** *ili kratko* **interpretacijom**. *Ako je preslikavanje definirano na podskupu skupa propozicionalnih varijabli, tada kažemo da je to* **parcijalna interpretacija.**

Kažemo da je parcijalna interpretacija I **adekvatna** *za formulu* $A(P_1, \ldots, P_n)$ *ako je funkcija I definirana na* P_i *za svaki* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Sada indukcijom po složenosti formule definiramo vrijednost interpretacije na proizvoljnoj formuli, tj. istinitost, odnosno neistinitost formule za danu interpretaciju.

Definicija 1.6. *Neka je I interpretacija (totalna ili parcijalna). Ako je riječ o parcijalnoj interpretaciji I, smatramo da je I adekvatna za formule na kojima se definira njena vrijednost. Tada vrijednost interpretacije I na proizvoljnoj formuli definiramo induktivno:*

$$\begin{aligned}
I(\neg A) = 1 &\quad \textit{ako i samo ako} \quad I(A) = 0; \\
I(A \wedge B) = 1 &\quad \textit{ako i samo ako} \quad I(A) = 1 \ \textit{ i } \ I(B) = 1; \\
I(A \vee B) = 1 &\quad \textit{ako i samo ako} \quad I(A) = 1 \ \textit{ ili } \ I(B) = 1; \\
I(A \to B) = 1 &\quad \textit{ako i samo ako} \quad I(A) = 0 \ \textit{ ili } \ I(B) = 1; \\
I(A \leftrightarrow B) = 1 &\quad \textit{ako i samo ako} \quad I(A) = I(B).
\end{aligned}$$

Ako alfabet sadrži i konstante $\top$ i $\bot$, tada za svaku interpretaciju I definiramo $I(\top) = 1$ i $I(\bot) = 0$.

Istaknimo da veznik *ili* shvaćamo inkluzivno, tj. da "$I(A) = 1$ ili $I(B) = 1$" znači da je ili $I(A) = 1$, ili $I(B) = 1$, ili oboje.[1]

Preglednije je vrijednost interpretacije na formulama definirati s pomoću tablica koje se nazivaju **semantičke tablice.** Tada se vrijednosti interpretacije za složenije formule mogu definirati i ovako:

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Ovdje smo zbog preglednosti upotrijebili semantičku tablicu. No, smatramo da semantičke tablice stvaraju prebrzo kod čitatelja dojam da je razumio što u njima piše, te da se veći

[1] U prirodnom se jeziku veznik *ili* obično promatra ekskluzivno. Tako na primjer rečenica "*Danas ću ići u kino ili ću doma gledati televiziju.*" znači da ću ili ići u kino, ili ću pak gledati televiziju, ali ne i oboje.

dio matematičke logike svodi na sematičke tablice. Iz tog su razloga semantičke tablice u ovoj knjizi korištene samo radi preglednijeg zapisa.

Ako je vrijednost interpretacije I na formuli jednaka 1, tj. $I(F) = 1$, tada kažemo da je formula F **istinita za interpretaciju** I. Ako je $I(F) = 0$, tada kažemo da je formula F **neistinita za interpretaciju** I. Ako je S skup formula i I neka interpretacija, s $I(S) = 1$ ćemo kratko označavati činjenicu da je $I(F) = 1$, za svaku formulu $F \in S$. Analogno s $I(S) = 0$ označavamo činjenicu da je svaka formula iz skupa S neistinita za interpretaciju I.

Napomena 1.7. Smatramo da je semantička interpretacija veznika $\neg$, $\wedge$, $\vee$ i $\leftrightarrow$ prirodna i jasna. Možda je u prvi mah pomalo čudna definicija interpretacije veznika $\rightarrow$, posebno uvjet da iz $I(P) = 0$ i $I(Q) = 1$ slijedi $I(P \rightarrow Q) = 1$.
Upravo ovaj uvjet bio je izložen mnogim kritikama. To je rezultiralo proučavanjem logika sa "strogom implikacijom", odnosno modalnim logikama (vidi stranu 99.). Zašto je upravo ovako definirana interpretacija veznika $\rightarrow$ objasnit ćemo nakon definicije relacije logičke posljedice.[2]

Neka je zadana parcijalna interpretacija I s $I(P) = I(Q) = 1$ i $I(R) = 0$. Odredimo radi primjera vrijednost interpretacije I na formuli $F \equiv (\neg P \vee Q) \rightarrow \neg(R \leftrightarrow (Q \vee \neg R))$. Određivanje vrijednosti provest ćemo s pomoću semantičke tablice. Radi kraćeg i jasnijeg zapisa uvodimo pokrate $F_1 \equiv (\neg P \vee Q)$ i $F_2 \equiv (R \leftrightarrow (Q \vee \neg R))$.

P	Q	R	$\neg P$	F_1	$\neg R$	$Q \vee \neg R$	F_2	$\neg F_2$	$F_1 \rightarrow \neg F_2$
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1

Očito je $F \equiv F_1 \rightarrow \neg F_2$. Dakle, iz tablice čitamo da je $I(F) = 1$, tj. formula F je istinita za danu interpretaciju I.

Sada ćemo za istu formulu F odrediti sve moguće vrijednosti istine s obzirom na vrijednost interpretacije na varijablama P, Q i R.

P	Q	R	$\neg P$	F_1	$\neg R$	$Q \vee \neg R$	F_2	$\neg F_2$	$F_1 \rightarrow \neg F_2$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	1	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	0	0

Uočimo da smo prethodnom semantičkom tablicom formuli F pridružili funkciju sa skupa $\{0,1\}^3$ u skup $\{0,1\}$. Općenito bismo formuli s n ($n \in \mathbb{N}$) različitih propozicionalnih varijabli pridružili funkciju sa skupa $\{0,1\}^n$ u skup $\{0,1\}$. Takve funkcije nazivaju se

[2] Do ovakova poimanja kondicionala došao je starogrčki logičar Filon iz Megare (4. st. pr. Kr.). Učenje o ovoj logičkoj operaciji, koja je dobila naziv materijalna implikacija, razvijalo se u staroj Grčki u megaro-stoičkoj školi u 4. i 3. st. pr. Kr., u logici skolastika, te u radovima drugih logičara sve do naših dana.

istinosne funkcije. Zbog toga se ponekad logika sudova naziva logika istinosno propozicionalnih funkcija.

Definicija 1.8. *Neka je S skup formula, a F neka formula. Kažemo da formula F* **logički slijedi** *iz skupa S, u oznaci $S \models F$, ako za svaku interpretaciju I, za koju je $I(S) = 1$, vrijedi $I(F) = 1$. Relaciju $\models$ nazivamo* **relacijom logičke posljedice***. Ako je S jednočlan skup, tj. $S = \{A\}$, tada činjenicu $\{A\} \models B$ zapisujemo i kao $A \Rightarrow B$.*

Lako je provjeriti da vrijedi $\{P \to Q,\ Q \to P\} \models P \leftrightarrow Q,\ \ P \wedge Q \Rightarrow P$ i $P \Rightarrow P \vee Q$. No, formula P ne slijedi iz skupa $\{P \vee Q\}$. To ćemo kratko označavati s $\{P \vee Q\} \not\models P$.

Sada ćemo pokušati opravdati prije definiranu semantičku interpretaciju veznika $\to$. Neka su A i B proizvoljne formule. Odredimo logički veznik $\circ$, odnosno dvomjesnu istinosnu funkciju, koja za svaku interpretaciju I ima sljedeće svojstvo:

$$I(A \circ B) = 1 \qquad \text{ako i samo ako} \qquad I(A) = 1 \ \text{ povlači } \ I(B) = 1.$$

Lako je vidjeti da za veznik $\circ$ vrijedi:

A	B	$A \circ B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

No, to je upravo semantička tablica za veznik $\to$. Problem interpretacije kondicionala razmatrat ćemo i na stranici 99.

Definicija 1.9. *Kažemo da su formule A i B* **logički ekvivalentne** *i označavamo $A \Leftrightarrow B$ ako za svaku interpretaciju I vrijedi $I(A) = I(B)$.*

Napišimo nekoliko parova logički ekvivalentnih formula:

$$\begin{array}{l}
A \ \Leftrightarrow\ A; \\
(A \wedge (B \vee C)) \ \Leftrightarrow\ ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)); \\
(A \wedge (B \vee A)) \ \Leftrightarrow\ A; \\
(A \to B) \ \Leftrightarrow\ (\neg A \vee B); \\
(A \wedge B) \ \Leftrightarrow\ \neg(\neg A \vee \neg B); \\
(A \leftrightarrow B) \ \Leftrightarrow\ \neg(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(A \vee \neg B)).
\end{array}$$

Definicija 1.10. *Za formulu F kažemo da je* **ispunjiva***, odnosno* **oboriva***, ako postoji interpretacija I tako da vrijedi $I(F) = 1$, odnosno $I(F) = 0$.*

Za formulu F kažemo da je **valjana** (**tautologija** *ili* **identički istinita**) *ako je istinita za svaku interpretaciju.*

Za formulu F kažemo da je **antitautologija** *ili* **identički neistinita** *ako je neistinita za svaku interpretaciju.*

Na primjer, formule $\neg(P \to \neg P)$ i $(P \to Q) \to (Q \to P)$ ispunjive su i oborive. U sljedećoj listi navodimo neke valjane formule i njihove nazive.[3] [4]

$\neg\neg P \leftrightarrow P$	princip dvojne negacije;
$P \to P$	princip refleksivnosti za kondicional;
$P \vee \neg P$	princip isključenja trećeg;
$\neg(P \wedge \neg P)$	princip neproturječnosti;
$((P \to Q) \to P) \to P$	Peiercov princip;
$(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$	princip kontrapozicije;
$\neg P \to (P \to Q)$	princip negacije premise;
$P \vee P \leftrightarrow P$	princip idempotentnosti za disjunkciju;
$P \wedge P \leftrightarrow P$	princip idempotentnosti za konjunkciju;
$(P \vee Q) \vee R \leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	princip asocijativnosti za disjunkciju;
$(P \wedge Q) \wedge R \leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	princip asocijativnosti za konjunkciju;
$\neg(P \vee Q) \leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$	De Morganov princip;
$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	De Morganov princip.

Uočimo da su valjane formule upravo forme koje su istinite bez obzira na istinitost svojih atomarnih dijelova. No, valjane formule su važne i zbog drugog razloga. Nije teško vidjeti da za proizvoljne formule A i B vrijedi:

$$A \Rightarrow B \quad \text{ako i samo ako je} \quad A \to B \text{ valjana formula.}$$

(Vidi zadatak 3.) To znači da je za ispitivanje vrijedi li $A \Rightarrow B$ dovoljno vidjeti je li formula $A \to B$ valjana.

Zadaci

1. Odredite barem jednu formulu A tako da formula:

a) $((A \wedge Q) \to \neg P) \to ((P \to \neg Q) \to A)$ bude valjana;

b) $((P \to (Q \to (A \wedge R))) \to (A \to (A \vee R))) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R)$ bude valjana.

2. Za proizvoljnu interpretaciju I sa S_I označimo skup $\{F : F \text{ je formula i } I(F) = 1\}$. Neka su I i J interpretacije takve da je $S_I \subseteq S_J$. Dokažite da je tada $S_I = S_J$.

3. Neka su $F_1, \ldots, F_n$ i A formule logike sudova. Dokažite da su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:

a) $\{F_1, \ldots, F_n\} \models A$;

b) formula $F_1 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg A$ je antitautologija;

c) formula $(F_1 \wedge \ldots \wedge F_n) \to A$ je valjana;

d) formula $F_1 \to (F_2 \to (\ldots (F_n \to A) \ldots)$ je valjana.

[3] Peierce, 1839.–1914.
[4] A. de Morgan, 1806.–1871.

4. Za formulu kažemo da je **pozitivna** ako je propozicionalna varijabla ili pak u njoj nastupaju samo veznici $\wedge$ i $\vee$. Dokažite da niti jedna pozitivna formula nije valjana, a ni antitautologija.

Rješenje. Označimo s I interpretaciju definiranu s $I(P) = 1$, za svaku propozicionalnu varijablu P. Analogno, s J označimo interpretaciju definiranu s $J(P) = 0$. Indukcijom po složenosti pozitivne formule F lako je dokazati da vrijedi $I(F) = 1$, te $J(F) = 0$. Dakle, svaka je pozitivna formula ispunjiva i oboriva.

5. Neka je s $F(A)$ označena neka formula logike sudova u kojoj je A možda potformula. Neka je, zatim, B proizvoljna formula tako da vrijedi $A \Leftrightarrow B$. Označimo s $F(B)$ formulu koja je dobivena zamjenom nekih, a možda i svih, nastupa potformule A u formuli $F(A)$ s B. Dokažite da tada vrijedi $F(A) \Leftrightarrow F(B)$. (Ova se činjenica naziva **teorem o zamjeni** za logiku sudova.)

Rješenje. Dokaz tvrdnje provodimo indukcijom po složenosti formule $F(A)$. Ako je $k(F(A)) = 0$, tj. ako je $F(A)$ propozicionalna varijabla, tada je potformula A jednaka F, te je $F(B)$ jednaka formuli A ili B. Tada iz $A \Leftrightarrow B$ trivijalno slijedi $F(A) \Leftrightarrow F(B)$. Pretpostavimo sada da za svaku formulu $G(A)$, čija je složenost strogo manja od n $(n \geq 1)$, tvrdnja zadatka vrijedi. Neka je $F(A)$ proizvoljna formula čija je složenost jednaka točno n. Uočimo prvo da za proizvoljne formule C_1, C_2, D_1, D_2 vrijedi: ako je $C_1 \Leftrightarrow D_1$ i $C_2 \Leftrightarrow D_2$, tada je $\neg C_1 \Leftrightarrow \neg D_1$ i $(C_1 \circ C_2) \Leftrightarrow (D_1 \circ D_2)$, za svaki veznik $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Sada promatramo slučajeve s obzirom na oblik formule $F(A)$. Formula $F(A)$ može biti oblika $\neg G(A)$ ili pak $G_1(A) \circ G_2(A)$, gdje je $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$. Primjenom pretpostavke indukcije na formule $G(A)$, $G_1(A)$ i $G_2(A)$, te prethodno navedenih ekvivalencija, slijedi tražena tvrdnja.

6. Neka je $A(P_1, \ldots, P_n)$ formula i I proizvoljna interpretacija. Zatim, neka su B_1, $\ldots$, B_n formule tako da vrijedi $I(P_i) = I(B_i)$, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dokažite da je tada:

$$I(A(P_1, \ldots, P_n)) = I(A(B_1, \ldots, B_n)).$$

7. Neka je $A(P_1, \ldots, P_n)$ formula, te I i J proizvoljne interpretacije. Zatim, neka su A_1, $\ldots$, A_n formule tako da vrijedi $J(P_i) = I(A_i)$, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ako vrijedi $J(A(P_1, \ldots, P_n)) = 1$, dokažite da je tada $I(A(A_1, \ldots, A_n)) = 1$.

8. Za konačan niz formula $A_1, \ldots, A_n$ kažemo da je **nepadajući** ako je formula $A_i \rightarrow A_{i+1}$ valjana za svaki $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Neka je $A(P_1, \ldots, P_n)$ formula i $A_1, \ldots, A_n$ nepadajući niz formula. Ako je formula $A(P_1, P_1 \vee P_2, P_1 \vee P_2 \vee P_3, \ldots, P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n)$ valjana dokažite da je tada i formula $A(A_1, \ldots, A_n)$ valjana.

Rješenje. Neka je I proizvoljna interpretacija. Budući da je niz $A_1, \ldots, A_n$ nepadajući tada postoji $k \in \{1, \ldots, n\}$ tako da je $I(A_1) = \ldots = I(A_k) = 0$ i $I(A_{k+1}) = \ldots = I(A_n) = 1$. Definiramo parcijalnu interpretaciju $J : \{P_1, \ldots, P_n\} \rightarrow \{0, 1\}$ sa $J(P_1) = \ldots = J(P_k) = 0$ i $J(P_{k+1}) = \ldots = J(P_n) = 1$. Uočite da vrijedi $J(P_i) = J(P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_i)$, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Iz pretpostavke zadatka imamo $J(A(P_1, \ldots, P_1 \vee \ldots \vee P_n)) = 1$, a tada iz zadatka 6. slijedi $J(A(P_1, \ldots, P_n)) = 1$. Iz prethodnog zadatka 7. tada slijedi da je $I(A(A_1, \ldots, A_n)) = 1$.

9. Neka je formula $A(P_1,\ldots,P_n)$ valjana, te neka su B_1, $\ldots$, B_n proizvoljne formule. Dokažite da je tada i formula $A(B_1,\ldots,B_n)$ valjana.

10. Neka su F, G i A formule logike sudova, pri čemu vrijedi $F \Leftrightarrow G$. Označimo sa $F(A/P)$ formulu dobivenu zamjenom svih nastupa varijable P s formulom A ako formula F sadrži varijablu P. Inače, neka je $F(A/P) \equiv F$. Analogno upotrebljavamo oznaku $G(A/P)$. Dokažite da tada vrijedi $F(A/P) \Leftrightarrow G(A/P)$. (Ova činjenica se naziva **teorem o supstituciji** za logiku sudova).

Rješenje. Lako je provjeriti da iz činjenice $F \Leftrightarrow G$ slijedi da je formula $F \leftrightarrow G$ valjana. Po prethodnom zadatku 9. slijedi da je i formula $F(A/P) \leftrightarrow G(A/P)$ valjana. Iz toga lako slijedi da su formule $F(A/P)$ i $G(A/P)$ logički ekvivalentne.

11. Neka je A formula logike sudova koja ne sadrži drugih veznika osim $\leftrightarrow$. Dokažite: formula A je valjana ako i samo ako svaka propozicionalna varijabla, koja nastupa u formuli A, dolazi paran broj puta.

Rješenje. Lako je provjeriti da za sve formule F, G i H vrijedi:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & (F \leftrightarrow F) \Leftrightarrow (G \leftrightarrow G); \\ \text{b)} & (F \leftrightarrow (G \leftrightarrow H)) \Leftrightarrow ((F \leftrightarrow G) \leftrightarrow H); \\ \text{c)} & (F \leftrightarrow G) \Leftrightarrow (G \leftrightarrow F). \end{array}$$

Ako je $\{P_1,\ldots,P_n\}$ skup svih varijabli koje nastupaju u formuli A, tada primjenom ekvivalencija b) i c) slijedi da je formula A logički ekvivalentna s:

$$P_1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow P_1 \leftrightarrow P_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow P_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow P_n \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow P_n.$$

Pretpostavimo prvo da je A valjana, te da se neka varijabla P_i pojavljuje neparan broj puta. Definirajmo interpretaciju I s $I(P_i) = 0$ i $I(P_j) = 1$, za sve $j \neq i$. Tada primjenom gornje ekvivalencije odmah slijedi da je $I(A) = 0$, što je kontradikcija s pretpostavkom da je A valjana formula.
Pretpostavimo sada da se svaka varijabla u A javlja točno paran broj puta. Primjenom ekvivalencija a), b) i c) slijedi da je A logički ekvivalentna s formulom $P_1 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow P_1$, gdje se varijabla P_1 pojavljuje paran broj puta. Lako je provjeriti da je posljednja formula valjana.

12. Neka je A formula logike sudova koja ne sadrži drugih veznika osim $\leftrightarrow$ i $\neg$. Dokažite: formula A valjana je ako i samo ako svaka propozicionalna varijabla i znak negacije dolaze paran broj puta u A.

13. Kažemo da je formula $A(P)$ **nepadajuća**, odnosno **nerastuća**, s obzirom na varijablu P ako za sve formule F i G vrijedi da pretpostavka $F \Rightarrow G$ povlači $A(F/P) \Rightarrow A(G/P)$, odnosno $A(G/P) \Rightarrow A(F/P)$. Dokažite da je formula $P \rightarrow Q$ nerastuća s obzirom na varijablu P, a nepadajuća s obzirom na varijablu Q.

14. Neka je S skup formula logike sudova (konačan ili beskonačan), te F neka formula. Označimo s $Var(S)$ skup svih propozicionalnih varijabli koje se pojavljuju u formulama iz S. Zatim neka vrijedi $S \models F$ i $Var(S) \subseteq Var(F)$. Dokažite da postoji konačan podskup $\{F_1,\ldots,F_n\}$ od S tako da je formula $F_1\wedge \ldots \wedge F_n \wedge\neg F$ antitautologija.

Rješenje. Ako je formula F valjana, tada tvrdnja odmah slijedi. Neka je F oboriva formula. Tada postoji konačno mnogo parcijalnih interpretacija I definiranih na $Var(F)$ tako da vrijedi $I(\neg F)=1$. Označimo te interpretacije s $I_1,\ldots,\ I_n$. Budući da po pretpostavci zadatka vrijedi $Var(S)\subseteq Var(F)$, tada je za svaki $k\in\{1,\ldots,\ n\}$ interpretacija I_k adekvatna za svaku formulu iz skupa S. Uočimo da za svaki $k\in\{1,\ldots,n\}$ postoji $F_k\in S$ tako da vrijedi $I_k(F_k)=0$ (jer bi inače vrijedilo $I_k(S)=1$, pa iz pretpostavke $S\models F$ slijedi $I_k(F)=1$, što nije). Lako je provjeriti da je formula $F_1\wedge\ldots\wedge F_n\wedge\neg F$ antitautologija.

(Iz činjenice da je formula $F_1\wedge\ldots\wedge F_n\wedge\neg F$ antitautologija, i zadatka 3., slijedi $\{F_1\wedge\ldots\wedge F_n\}\models F$. Tvrdnja ovog zadatka, ali bez pretpostavke da je $Var(S)\subseteq Var(F)$, naziva se teorem kompaktnosti. Taj ćemo teorem dokazati u točki 1.6.)

15. Neka je F formula logike sudova izgrađena samo s pomoću veznika $\vee$, $\wedge$ i $\neg$. Označimo s F^* formulu dobivenu iz F međusobnom zamjenom znakova $\vee$ i $\wedge$. Za proizvoljnu interpretaciju I s $\overline{I}$ označimo interpretaciju definiranu s: $\overline{I}(P)=1$ ako i samo ako $I(P)=0$. Dokažite da tada za sve formule A i B, koje su izgrađene samo s pomoću veznika $\vee$, $\wedge$ i $\neg$, i svaku interpretaciju I, vrijedi:

a) $A(P_1,\ \ldots\ ,P_n)\ \Leftrightarrow\ \neg A^*(\neg P_1,\ \ldots\ ,\neg P_n)$;

b) $I(A)=1$ ako i samo ako $\overline{I}(A^*)=0$;

c) ako je $A\Leftrightarrow B$, tada je i $A^*\Leftrightarrow B^*$;

d) formula A je valjana ako i samo ako je $\neg A^*$ valjana;

e) formula $A\to B$ je valjana ako i samo ako je $B^*\to A^*$ valjana;

f) formula $A\leftrightarrow B$ je valjana ako i samo ako je $A^*\leftrightarrow B^*$ valjana.

1.4. Normalne forme

Sada želimo dokazati da za svaku formulu logike sudova postoje njoj logički ekvivalentne dvije formule u zadanim formama – konjunktivnoj normalnoj formi i disjunktivnoj normalnoj formi. Za razna proučavanja određene formule može biti korisno odrediti njoj logički ekvivalentnu formulu koja je u jednostavnijem obliku.

Definicija 1.11. *Atomarnu formulu i njezinu negaciju nazivamo* **literalom**. *Formulu oblika $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n$ nazivamo konjunkcijom (A_i su proizvoljne formule). Formulu oblika $A_1\vee A_2\vee\ldots\vee A_n$ nazivamo disjunkcijom.* **Elementarna konjunkcija** *je konjunkcija literala, a* **elementarna disjunkcija** *je disjunkcija literala.* **Konjunktivna normalna forma** *je konjunkcija elementarnih disjunkcija.* **Disjunktivna normalna forma** *je disjunkcija elementarnih konjunkcija.*

Promotrimo neke primjere formula koje su normalne forme. Formula $(P_2 \vee \neg P_3 \vee P_4) \wedge (P_7 \vee \neg P_8) \wedge (P_2 \vee P_3 \vee \neg P_3)$ je jedna konjunktivna normalna forma, a formula $(P_3 \wedge \neg P_7 \wedge P_9) \vee (\neg P_3 \wedge P_7 \wedge P_9) \vee (P_3 \wedge P_7 \wedge P_9)$ je disjunktivna normalna forma.

Neka je A neka formula, te B konjunktivna normalna forma i C disjunktivna normalna forma. Kažemo da je B **konjunktivna normalna forma za** A ako vrijedi $A \Leftrightarrow B$. Kažemo da je C **disjunktivna normalna forma za** A ako vrijedi $A \Leftrightarrow C$.

Lako je vidjeti da ako za neku formulu postoji konjunktivna normalna (ili disjunktivna), tada za nju postoji beskonačno konjunktivnih normalnih formi. Dakle, normalne forme, ako postoje, nisu jedinstvene.

Kako bismo lakše razumjeli dokaz teorema o egzistenciji normalnih formi, dajemo sljedeći primjer.

Primjer 1.12. Neka je $F \equiv ((P \to Q) \to (R \to \neg P)) \to (\neg Q \to \neg R)$. Kako bismo odredili sve parcijalne interpretacije za koje je formula F neistinita, napišimo prvo semantičku tablicu za formulu F.

P	Q	R	$P \to Q$	$R \to \neg P$	$(P \to Q) \to (R \to \neg P)$	$\neg Q \to \neg R$	F
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1	1

Da bismo odredili jednu konjunktivnu normalnu formu za formulu F promotrimo redove u tablici, tj. interpretacije gdje je vrijednost formule F jednaka 0. To su drugi i šesti redak tablice. U drugom retku pripadna interpretacija I definirana je s $I(P) = I(Q) = 0$ i $I(R) = 1$. Ta interpretacija određuje elementarnu disjunkciju $P \vee Q \vee \neg R$ u konjunktivnoj normalnoj formi. Analogno, promatrajući šesti redak tablice, tj. interpretaciju $I(P) = I(R) = 1$ i $I(Q) = 0$, dobivamo elementarnu disjunkciju $\neg P \vee Q \vee \neg R$. S dobivene dvije elementarne disjunkcije definiramo sljedeću konjunktivnu normalnu formu:

$$(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R).$$

Lako je vidjeti da je dobivena konjunktivna normalna forma logički ekvivalentna početnoj formuli F.

Možemo kratko reći da smo konjunktivnu normalnu formu za formulu F dobili promatrajući u njenoj semantičkoj tablici "nule, a zatim smo negirali propozicionalne varijable koje su jedan". Analogno bismo disjunktivnu normalnu formu za F dobili promatrajući u njenoj semantičkoj tablici "jedinice, a zatim bismo negirali propozicionalne varijable koje su nule". Primjenom tog postupka dobivamo sljedeću disjunktivnu normalnu formu za F :

$$(\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee$$
$$\vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R).$$

Sada dokazujemo teorem o egzistenciji normalnih formi za proizvoljnu formulu.

Teorem 1.13. *Za svaku formulu logike sudova postoji konjunktivna i disjunktivna normalna forma.*

DOKAZ. Dokazat ćemo da za proizvoljnu formulu postoji konjunktivna normalna forma. Dokaz egzistencije disjunktivne normalne forme je sličan. Ako je A valjana formula, tada je npr. formula $(P \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg P)$ konjunktivna normalna forma za A. Promotrimo sada slučaj kada je formula $A(P_1, \ldots, P_n)$ oboriva. Neka su $I_1, \ldots, I_m$ sve parcijalne interpretacije, čija je domena $\{P_1, \ldots, P_n\}$ i za koje vrijedi $I_1(A) = \ldots = I_m(A) = 0$. Za sve $i \in \{1, \ldots m\}$ i sve $j \in \{1, \ldots n\}$ definiramo literale P_{ij} ovako:

$$P_{ij} \equiv \begin{cases} \neg P_j, & \text{ako je } I_i(P_j) = 1; \\ \\ P_j, & \text{ako je } I_i(P_j) = 0. \end{cases}$$

Uočite da vrijedi $I_i(P_{ij}) = 0$. Neka je sada formula B definirana kao:

$$(P_{11} \vee \ldots \vee P_{1n}) \wedge \ldots \wedge (P_{m1} \vee \ldots \vee P_{mn}),$$

što ćemo obično kratko zapisivati s:

$$B \equiv \bigwedge_{i=1}^{m} \bigvee_{j=1}^{n} P_{ij}.$$

Očito je B konjunktivna normalna forma. Preostalo je još dokazati da vrijedi $A \Leftrightarrow B$. Za ilustraciju ćemo dokazati da vrijedi $A \Rightarrow B$. Obrat ćemo prepustiti čitatelju. Neka je I interpretacija takva da $I(B) = 0$. Budući da je B konjunkcija, tada postoji $i \in \{1, \ldots, m\}$ tako da vrijedi $I(P_{i1} \vee \ldots \vee P_{in}) = 0$. Tada dalje imamo $I(P_{ij}) = 0$, za sve $j \in \{1, \ldots, n\}$. No, tada je $I/\{P_1, \ldots, P_n\} = I_i$. To znači da je $I(A) = I_i(A) = 0$. □

Već smo spomenuli da normalne forme za danu formulu nisu jedinstvene. Štoviše, za svaku formulu postoji beskonačno mnogo konjunktivnih i disjunktivnih formi. Da bismo imali barem jedinstvenost u nekom smislu, malo ćemo modificirati definiciju normalnih formi.

Definicija 1.14. *Neka je $A(P_1, \ldots, P_n)$ konjunktivna normalna forma. Kažemo da je to* **savršena konjunktivna normalna forma** *ako u svakoj njezinoj elementarnoj disjunkciji svaka propozicionalna varijabla P_i nastupa točno jednom (s negacijom ili bez nje), te su sve elementarne disjunkcije međusobno logički neekvivalentne.*

Neka je $A(P_1, \ldots, P_n)$ disjunktivna normalna forma. Kažemo da je to **savršena disjunktivna normalna forma** *ako u svakoj njezinoj elementarnoj konjunkciji svaka propozicionalna varijabla P_i nastupa točno jednom (s negacijom ili bez nje), te su sve elementarne konjunkcije međusobno logički neekvivalentne.*

Pozornim čitanjem dokaza teorema 1.13. može se vidjeti da je dokazan sljedeći korolar.

Korolar 1.15. *Za svaku oborivu formulu postoji savršena konjunktivna normalna forma. Za svaku ispunjivu formulu postoji savršena disjunktivna normalna forma. Savršene forme su jedinstvene do na permutaciju varijabli u elementarnim disjunkcijama, odnosno konjunkcijama, te do na permutaciju elementarnih konjunkcija, odnosno disjunkcija.*

Tvrdnje iz prethodnog korolara koristit ćemo u dokazu sljedećeg teorema. Napominjemo da je Craigova interpolacijska lema jako važna[5] za razne logičke formalne teorije.

Teorem 1.16. *(Craigova interpolacijska lema)*
Neka je A ispunjiva i B oboriva formula logike sudova, te neka vrijedi $A \Rightarrow B$. Tada postoji formula C tako da je $Var(C) \subseteq Var(A) \cap Var(B)$, te vrijedi $A \Rightarrow C$ i $C \Rightarrow B$.

DOKAZ. Budući da je po pretpostavci formula A ispunjiva, tada iz prethodnog korolara 1.15. slijedi da postoji savršena disjunktivna normalna forma za A. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je A savršena disjunktivna normalna forma, tj. $A \equiv A_1 \vee \ldots \vee A_s$, gdje su A_i elementarne konjunkcije. Analogno, neka je formula B savršena konjunktivna normalna forma (to je moguće jer je po pretpostavci formula B oboriva). Dakle, $B \equiv B_1 \wedge \ldots \wedge B_t$, gdje su B_j elementarne disjunkcije.

Neka je $i \in \{1,\ldots,s\}$ proizvoljan. Zatim, neka je I interpretacija takva da je $I(A_i) = 1$. No, onda je $I(A) = 1$. Iz pretpostavke $A \Rightarrow B$ slijedi $I(B) = 1$. Budući da je formula B konjunkcija, tada je $I(B_j) = 1$, za sve $j \in \{1,\ldots,t\}$. Time smo dokazali da za sve $i \in \{1,\ldots,s\}$ i $j \in \{1,\ldots,t\}$ vrijedi $A_i \Rightarrow B_j$.

Sada tvrdimo da za sve i, j u A_i postoji literal, označimo ga s C_{ij}, koji nastupa kao disjunktivni član u formuli B_j. U svrhu dokaza te pomoćne tvrdnje označimo $A \equiv A(P_1,\ldots,P_n)$ i $B \equiv B(Q_1,\ldots,Q_m)$, te $A_i \equiv \overline{P_1} \wedge \ldots \wedge \overline{P_n}$, gdje je $\overline{P_k} \equiv P_k$ ili $\overline{P_k} \equiv \neg P_k$. Zatim, neka je $B_j \equiv \overline{Q_1} \vee \ldots \vee \overline{Q_m}$. Pretpostavimo da su literali $\overline{P_k}$ i $\overline{Q_l}$ različiti za sve k i l. Definirajmo interpretaciju:

$$I\ :\ \{P_1,\ldots,P_n\} \cup \{Q_1,\ldots,Q_m\} \to \{0,1\}$$

tako da je $I(P_k)$ zadano tako da vrijedi $I(\overline{P_k}) = 1$, a $I(Q_l)$ je zadano tako da je ispunjeno $I(\overline{Q_l}) = 0$. (Definicija interpretacije I je dobra, bez obzira na to što je moguće $\{P_1,\ldots,P_n\} \cap \{Q_1,\ldots,Q_m\} \neq \emptyset$, jer smo pretpostavili da su literali $\overline{P_k}$ i $\overline{Q_l}$ različiti za sve k i l.) Za tako definiranu interpretaciju I vrijedi $I(A_i) = 1$ i $I(B_j) = 0$. No, to je u kontradikciji s prije dokazanom činjenicom $A_i \Rightarrow B_j$. Time je dokazana pomoćna tvrdnja.

Sada definiramo traženu formulu C kao:

$$C \equiv \bigvee_i \bigwedge_j C_{ij}.$$

Očito formula C sadrži samo varijable koje nastupaju istovremeno u formulama A i B. Preostalo je dokazati $A \Rightarrow C$ i $C \Rightarrow B$.

Neka je I interpretacija tako da vrijedi $I(A) = 1$. Budući da je A disjunkcija, tada postoji $i \in \{1,\ldots,s\}$ tako da je $I(A_i) = 1$. No, A_i je konjunkcija, pa je $I(C_{ij}) = 1$ za sve $j \in \{1,\ldots,t\}$. Iz toga odmah slijedi $I(C) = 1$.

Na sličan način dobivamo $C \Rightarrow B$. □

[5] L. L. Maksimova 80.-ih je godina prošlog stoljeća dala klasifikaciju određenih modalnih logika primjenom interpolacijskog svojstva.