1. Matrice

Matrica je svaka pravokutna tablica realnih ili kompleksnih brojeva. Ako ona ima m redaka i n stupaca, tada kažemo da je **tipa** $m \times n$ i zapisujemo je u obliku

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ili kraće $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Element a_{ij} naziva se **opći element** matrice $\mathbf{A}$. To je realan ili kompleksan broj. Opći element označavamo često i na način $(\mathbf{A})_{ij}$.

Skup svih matrica tipa $m \times n$ označavamo s $\mathscr{M}_{mn}$.

* * *

Za **kvadratnu** matricu tipa $n \times n$ kažemo da je **reda** n. Skup svih kvadratnih matrica toga reda označavamo s $\mathscr{M}_n$. Elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ čine **dijagonalu** kvadratne matrice.

Kvadratna matrica je **gornja trokutasta** ako je $a_{ij} = 0$ za $i > j$ (svi elementi ispod dijagonale jednaki su nuli), **donja trokutasta** ako je $a_{ij} = 0$ za $i < j$ (svi elementi iznad dijagonale jednaki su nuli), **dijagonalna** ako je $a_{ij} = 0$ za $i \neq j$, **skalarna** ako je dijagonalna i svi su joj dijagonalni elementi jednaki. **Jedinična matrica** je dijagonalna matrica s jedinicama na dijagonali. Označavamo ju s $\mathbf{I}$. Nul matricu, čiji su svi elementi jednaki nuli, označavamo s $\mathbf{0}$.

Transponirana matrica $\mathbf{A}^\top$ matrice $\mathbf{A}$ ima elemente $(\mathbf{A}^\top)_{ij} = a_{ji}$. Ona se dobiva iz matrice $\mathbf{A}$ zamjenom redaka i stupaca, što se kod kvadratne matrice može interpretirati i kao zrcaljenje s obzirom na dijagonalu. Kvadratna matrica je **simetrična** ako vrijedi $\mathbf{A} = \mathbf{A}^\top$, tj. $a_{ij} = a_{ji}$ za sve i, j; **antisimetrična** ako vrijedi $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$, tj. $a_{ij} = -a_{ji}$ za sve i, j.

1.1. Operacije s matricama

Operacija **množenja skalara s matricom** definira se za svaki $\lambda \in \mathbf{R}$ i $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_{mn}$ na način

$$(\lambda \mathbf{A})_{ij} := \lambda a_{ij}.$$

To je ponovo matrica istoga tipa.

Operacija **zbrajanja matrica** definira se za matrice istoga tipa na način

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} := a_{ij} + b_{ij}.$$

(Dvije se matrice zbrajaju tako da im se zbroje odgovarajući elementi.)

Množenje matrica definirano je samo za **ulančane** matrice: broj stupaca prve mora se podudarati s brojem redaka druge matrice. Ako je $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$, i $\mathbf{B}$ tipa $n \times p$, tada je umnožak $\mathbf{AB}$ definiran i ima tip $m \times p$,

$$(\mathbf{AB})_{ik} := \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}.$$

1.1. Izračunaj $2\mathbf{A} + \frac{1}{3}\mathbf{B} - \mathbf{C}$ ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 12 \\ 21 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 10 & 8 & 5 \\ -7 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Izračunajmo prvo umnoške matrice i skalara (pomnožimo svaki element matrice skalarom)

$$2\mathbf{A} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 & -4 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\tfrac{1}{3}\mathbf{B} = \tfrac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 0 & 12 \\ 21 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 7 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Sve su matrice istoga tipa 2×3 pa je

$$\begin{aligned} 2\mathbf{A} + \tfrac{1}{3}\mathbf{B} - \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 2 & 10 & -4 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 7 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 8 & 5 \\ -7 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2-1-10 & 10+0-8 & -4+4-5 \\ -6+7+7 & 0+\frac{1}{3}+2 & 4+0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & -5 \\ 8 & \frac{7}{3} & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.2. Izračunaj umnožak matrica $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}10 & 2\\ 14 & -1\\ 2 & -5\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 8 & 1 & 4\\ 2 & -2 & 3 & 0\end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Matrica $\mathbf{A}$ je tipa 3×2, $\mathbf{B}$ tipa 2×4 te je umnožak $\mathbf{AB}$ definiran i bit će tipa 3×4:

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix}10 & 2\\ 14 & -1\\ 2 & -5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 8 & 1 & 4\\ 2 & -2 & 3 & 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}10\cdot 2+2\cdot 2 & 10\cdot 8+2\cdot(-2) & 10\cdot 1+2\cdot 3 & 10\cdot 4+2\cdot 0\\ 14\cdot 2+(-1)\cdot 2 & 14\cdot 8+(-1)\cdot(-2) & 14\cdot 1+(-1)\cdot 3 & 14\cdot 4+(-1)\cdot 0\\ 2\cdot 2+(-5)\cdot 2 & 2\cdot 8+(-5)\cdot(-2) & 2\cdot 1+(-5)\cdot 3 & 2\cdot 4+(-5)\cdot 0\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}24 & 76 & 16 & 40\\ 26 & 114 & 11 & 56\\ -6 & 26 & -13 & 8\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Primijeti da umnožak $\mathbf{BA}$ nije definiran.

1.3. Za matrice $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ i $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ odredi $\mathbf{AB}$ i $\mathbf{BA}$. Što se može zaključiti?

RJEŠENJE. Vrijedi

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}-3 & 7 & 2\\ 6 & 8 & 4\\ -1 & 11 & 4\end{bmatrix},\quad \mathbf{BA}=\begin{bmatrix}7 & 11 & 9\\ 0 & -6 & 0\\ 6 & 6 & 8\end{bmatrix}.$$

Vidimo da je $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$. Množenje matrica nije komutativno. (Za neke matrice ovakvi umnošci mogu biti jednaki.)

1.4. Ako je $\mathbf{x}=[3,\ 1,\ 2]$, $\mathbf{y}=[2,\ -1,\ 1]$, izračunaj $\mathbf{x}^\top\mathbf{y}$ i $\mathbf{x}\mathbf{y}^\top$.

RJEŠENJE.

$$\mathbf{x}^\top\mathbf{y}=\begin{bmatrix}3\\ 1\\ 2\end{bmatrix}[2,\ -1,\ 1]=\begin{bmatrix}6 & -3 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 4 & -2 & 2\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{x}\mathbf{y}^\top=[3,\ 1,\ 2]\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 1\end{bmatrix}=[7].$$

Matricu s jednim elementom poistovjećujemo s brojem. Zato je $\mathbf{x}\mathbf{y}^\top=7$.

1.5. Izračunaj $f(\mathbf{A})$ ako je

a) $f(x) = x^5 + 2x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 8$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

b) $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$;

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. **a**) Imamo $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^5 = \mathbf{0}$, zato je

$$f(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^5 + 2\mathbf{A}^4 - \mathbf{A}^3 + 5\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} + 8\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 5 \\ 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

b) $\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$, $f(\mathbf{A}) = 2\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 10 & -15 \\ 0 & 40 \end{bmatrix}$.

c) $f(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

1.6. Neka je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$. Odredi matricu $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ takvu da vrijedi $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$. Provjeri da pri tom vrijedi $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

RJEŠENJE. Iz jednakosti

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} 2a-c & 2b-d \\ -5a+3c & -5b+3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izjednačavanjem odgovarajućih elemenata dobiju se dva sustava

$$\begin{cases} 2a - c = 1, \\ -5a + 3c = 0, \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} 2b - d = 0, \\ -5b + 3d = 1. \end{cases}$$

Njihova su rješenja $a = 3$, $c = 5$, $b = 1$, $d = 2$. Dakle $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$. Za ovu matricu vrijedi i

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.7. Za zadanu matricu $\mathbf{A}$ odredi najopćenitiji oblik matrice $\mathbf{B}$ istoga tipa za koju vrijedi $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, ako je **a**) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; **b**) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Označimo elemente matrice $\mathbf{B}$ na način $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

a) Iz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ imamo

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+4c & 3b+4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odavde je

$$\begin{cases} a + 2c = 0, \\ 3a + 4c = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} b + 2d = 0, \\ 3b + 4d = 0. \end{cases}$$

Rješenja ovih sustava su $a = b = c = d = 0$. Stoga je matrica $\mathbf{B}$ nulmatrica.

b) Sada iz $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ slijedi

$$\begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a+6c & 3b+6d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Izjednačavanjem elemenata dobivamo sustave

$$\begin{cases} a + 2c = 0, \\ 3a + 6c = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} b + 2d = 0, \\ 3b + 6d = 0. \end{cases}$$

Rješenje prvoga je $a = -2c$, a drugoga $b = -2d$, pa jednadžbu zadovoljava svaka matrica oblika $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{bmatrix}$ gdje su c i d po volji odabrani realni brojevi.

1.8. Odredi sve matrice koje komutiraju s $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Označimo traženu matricu s $\mathbf{A}$. Da bi oba umnoška $\mathbf{AX}$ i $\mathbf{XA}$ bila definirana, takva matrica mora biti kvadratna, istoga reda kao i $\mathbf{X}$. Dakle, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Iz $\mathbf{AX} = \mathbf{XA}$ slijedi

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ 0 & a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odavde dobivamo niz jednakosti $a_{21} = a_{31} = a_{32} = 0$, $a_{11} = a_{22}$, $a_{21} = a_{32}$, $a_{12} = a_{23}$, $a_{22} = a_{33}$. Označimo li praktičnije $a_{11} = x$, $a_{12} = y$, $a_{13} = z$, dobivamo traženu matricu u sljedećem obliku

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}.$$

1.9. Neka je $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ (broj komponenti n u sljedećim primjerima nije uvijek jednak). Odredi matricu $\mathbf{A}$ ako je poznat umnožak $\mathbf{Ax}$:

a) $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; **b**) $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 - 3x_4 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 - x_4 \\ 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 \\ -x_1 \end{bmatrix}$; **d**) $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 + x_4 \\ x_2 - x_3 \\ 0 \\ x_1 + x_4 \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Matrica $\mathbf{A}$ mora imati onoliko redaka koliko i rezultat $\mathbf{Ax}$. Broj stupaca matrice $\mathbf{A}$ odgovara broju komponenti vektora $\mathbf{x}$. Njih možemo tek naslutiti na osnovu danih umnožaka, tako u primjeru **a**) matrica ima *barem* dva stupca, no može imati i više. Tako npr. uvjet zadovoljavaju sljedeće matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

itd. Mi ćemo izabrati matricu s minimalnim brojem stupaca.

$$\textbf{b}) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}; \qquad \textbf{c}) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \qquad \textbf{d}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.10. Izračunaj $\mathbf{A}^n$ $(n \in \mathbf{N})$ ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Izračunajmo prvih nekoliko potencija.

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} a^2 & 2a \\ 0 & a^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 \\ 0 & a^3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a^4 & 4a^3 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix}.$$

Na osnovu ovog možemo naslutiti da vrijedi $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix}$. Slutnju ćemo provjeriti matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ baza indukcije je ispunjena. Pretpostavimo zato da je $\mathbf{A}^n$ gornjeg oblika. Tada imamo

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^n \cdot a & a^n + na^{n-1} \cdot a \\ 0 & a^n \cdot a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n \\ 0 & a^{n+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Vidimo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n.

1.11. Izračunaj $\mathbf{A}^n$ ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

RJEŠENJE. Direktnim računom dobivamo

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha + \cos^2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}.$$

Slično je $\mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} \cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha \end{bmatrix}$ pa naslućujemo da je $\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$.
Dokazujemo indukcijom. Za $n = 1$ baza indukcije je ispunjena. Dokažimo korak indukcije.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}^n\mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos n\alpha\cos\alpha - \sin n\alpha\sin\alpha & -\cos n\alpha\sin\alpha - \sin n\alpha\cos\alpha \\ \sin n\alpha\cos\alpha + \cos n\alpha\sin\alpha & -\sin n\alpha\sin\alpha + \cos n\alpha\cos\alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(n+1)\alpha & -\sin(n+1)\alpha \\ \sin(n+1)\alpha & \cos(n+1)\alpha \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.12. Koristeći relacije

$$\begin{bmatrix} 43 & -24 \\ 70 & -39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

izračunaj $\begin{bmatrix} 43 & -24 \\ 70 & -39 \end{bmatrix}^{10}$.

RJEŠENJE. Označimo matrice redom s $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ pa vrijedi $\mathbf{A} = \mathbf{BCD}$ i $\mathbf{DB} = \mathbf{I}$. Koristeći asocijativnost matričnog množenja imamo

$$\mathbf{A}^2 = (\mathbf{BCD})(\mathbf{BCD}) = \mathbf{BC}(\mathbf{DB})\mathbf{CD} = \mathbf{BC}^2\mathbf{D}.$$

Slično vrijedi i za sve ostale potencije:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{10} &= (\mathbf{BCD})(\mathbf{BCD})\cdots(\mathbf{BCD}) \\ &= \mathbf{BC}(\mathbf{DB})\mathbf{C}(\mathbf{DB})\cdots(\mathbf{DB})\mathbf{CD} = \mathbf{BCICI}\cdots\mathbf{ICD} = \mathbf{BC}^{10}\mathbf{D} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^{10} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3^{11} & 4 \\ 5\cdot 3^{10} & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\cdot 3^{11} - 20 & -4\cdot 3^{11} + 12 \\ 35\cdot 3^{10} - 35 & -20\cdot 3^{10} + 21 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.2. Zadaci za vježbu

1.13. Zapiši matricu $\mathbf{A}$ tipa 3×3 čiji je opći element a_{ij} dan formulom **a**) $a_{ij} = i+j$; **b**) $a_{ij} = |i-j|$; **c**) $a_{ij} = ij$; **d**) $a_{ij} = (i-j)^2$; **e**) $a_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$; **f**) $a_{ij} = i-j+1$. Koje su među njima simetrične?

1.14. Izračunaj:

a) $3\mathbf{A}+\frac{1}{2}\mathbf{B}$ ako je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 & -10 \\ -8 & -4 & 0 & -6 \\ -2 & 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A}+2\mathbf{B}-\mathbf{C}$ za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 4 \\ 0 & -5 & 1 \\ -3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$;

c) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

d) $\mathbf{A}+\mathbf{A}^\top$ za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 5 & 2 & 7 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Kakve su dobivene matrice?

1.15. Zadane su matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj: **a**) $2\mathbf{A}+\mathbf{B}^\top$; **b**) $\mathbf{A}^\top - 2\mathbf{B}$.

1.16. Odredi umnoške matrica:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$; **b**) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Kakve su dobivene matrice?

1.17. Izračunaj: **a**) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; **b**) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 8 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; **d**) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 10 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

1.18. Izračunaj umnoške:

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$; **b**) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 5 & -3 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; **d**) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & -3 & -4 \\ 7 & 6 & -4 & -5 \\ 6 & 4 & -3 & -2 \\ 8 & 5 & -6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.

1.19. Pomnoži matrice:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$; **b)** $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$;

c) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \end{bmatrix}$; **d)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$;

e) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$; **f)** $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$.

1.20. Uvjeri se neposrednim množenjem da vrijedi $(\mathbf{ABC})^\top = \mathbf{C}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$, ako je

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1.21. Zadane su matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 7 \\ 8 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredi sve umnoške ovih matrica (koji su definirani).

1.22. Zadane su matrice

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$;

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Izračunaj: 1) $\mathbf{AB}$; 2) $\mathbf{A}^\top \mathbf{B}^\top$; 3) $\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$; 4) $\mathbf{BA}$.

1.23. Neka je matrica $\mathbf{A}$ tipa $m \times n$, $\mathbf{I}_m$, $\mathbf{I}_n$ jedinične matrice reda m odnosno n. Dokaži da je $\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$.

1.24. Neka su $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vektor-stupci jednake duljine i $\mathbf{A} = \mathbf{x}\mathbf{y}^\top$. Pokaži da vrijedi $\mathbf{A}^2 = \lambda \mathbf{A}$ za neki skalar λ.

$* * *$

1.25. Neka je matrica $\mathbf{A}$ tipa 5×3, $\mathbf{B}$ tipa 3×3, $\mathbf{C}$ tipa 3×2, $\mathbf{D}$ i $\mathbf{E}$ tipa 2×1. Odredi koji je od sljedećih izraza definiran i koji je tip rezultirajuće matrice
a) $\mathbf{A}^6$; **b)** $\mathbf{B}^4$; **c)** $\mathbf{ABC}$; **d)** $\mathbf{ABCD}$;
e) $\mathbf{ACBD}$; **f)** $\mathbf{CD}+\mathbf{E}$; **g)** $\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$; **h)** $\mathbf{BC}+\mathbf{CB}$.

1.26. Izmnoži sljedeće matrične izraze, pretpostavljajući da su svi oni definirani.
a) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2$; **b)** $(2\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}+2\mathbf{B})$;
c) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}(\mathbf{D}+\mathbf{E})$; **d)** $(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}+3\mathbf{I})$;
e) $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^3$; **f)** $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^3$, ako je $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$.

1.27. Neka je $f(x)=x^4-2x^3+x-1$. Odredi $f(\mathbf{A})$ ako je

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1\\0&3\end{bmatrix}$; **b)** $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&1\end{bmatrix}$; **c)** $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$.

1.28. Odredi $f(\mathbf{A})$ ako je

a) $f(x)=3x^2-2x+5$, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-4&1\\3&-5&2\end{bmatrix}$;

b) $f(x)=x^3-7x^2+13x-5$, $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5&2&-3\\1&3&-1\\2&2&-1\end{bmatrix}$.

1.29. Provjeri da za matricu $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&-1&2\\-1&0&1\\-2&1&3\end{bmatrix}$ i polinom $f(x)=x^3-4x^2+5x+4$ vrijedi $f(\mathbf{A})=\mathbf{0}$.

1.30. Pokaži da matrica $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ zadovoljava jednadžbu

$$\mathbf{A}^2-(a+d)\mathbf{A}+(ad-bc)\mathbf{I}=\mathbf{0}.$$

$* * *$

1.31. Izračunaj matrice

a) $\begin{bmatrix}3&-1\\1&0\end{bmatrix}^5$; **b)** $\begin{bmatrix}2&1\\1&-1\end{bmatrix}^{10}$; **c)** $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}^5$.

1.32. Neka je $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}$, $\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&2\\-3&2\end{bmatrix}$, $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{bmatrix}$.

Izračunaj sljedeće:
a) $\mathbf{A}^{10}$; **b)** $\mathbf{B}^{20}$; **c)** $\mathbf{C}^4$; **d)** $\mathbf{D}^{20}$;
e) $(\mathbf{ABC})^4$; **f)** $(\mathbf{CBA})^4$; **g)** $\mathbf{C}^3\mathbf{B}^3$; **h)** $(\mathbf{CB})^3$.

1.33. Izračunaj: **a)** $\begin{bmatrix}3&-1\\4&2\end{bmatrix}^2$; **b)** $\begin{bmatrix}\sin\alpha&-\cos\alpha\\\cos\alpha&\sin\alpha\end{bmatrix}^3$; **c)** $\begin{bmatrix}1&a\\a&1\end{bmatrix}^4$; **d)** $\begin{bmatrix}4&-1\\5&-2\end{bmatrix}^5$.

1.34. Izračunaj: **a**) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$; **b**) $\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n$; **c**) $\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^n$; **d**) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^n$. **e**) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^n$.

1.35. Neka je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pokaži da za svaki prirodni n vrijedi

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

1.36. Izračunaj zadane potencije matrica n-toga reda:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^n$; **b**) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^3$; **c**) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^{n-1}$.

1.37. Izračunaj $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5$ koristeći $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$.

* * *

1.38. Za zadanu matricu $\mathbf{A}$ odredi najopćenitiji oblik matrice $\mathbf{B}$ za koju vrijedi $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$. **a**) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, **b**) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1.39. Odredi neke ne-nul matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ takve da je $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$, ako je **a**) $\mathbf{A}$ tipa 5×3, $\mathbf{B}$ tipa 3×1, **b**) $\mathbf{A}$ tipa 5×2, $\mathbf{B}$ tipa 2×2, **c**) $\mathbf{A}$ tipa 1×2, $\mathbf{B}$ tipa 2×3.

1.40. Zadane su matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Odredi matricu $\mathbf{X}$ za koju vrijedi **a**) $2\mathbf{A} + 3\mathbf{X} = \mathbf{I}$; **b**) $3\mathbf{A} - 2\mathbf{X} = \mathbf{B}$.

1.41. Odredi sve matrice koje komutiraju s matricom

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; **b**) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$; **c**) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; **d**) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1.42. Odredi sve matrice koje komutiraju s matricom

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; **b**) $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$; **c**) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; **d**) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.43. Odredi sve matrice koje komutiraju sa svim matricama drugoga reda.

1.44. Dokaži da neka matrica komutira sa svim dijagonalnim matricama onda i samo onda ako je i sama dijagonalna.

1.45. Dokaži da matrica $\mathbf{A}$ reda n komutira sa svim matricama istoga reda onda i samo onda ako je oblika $\lambda\mathbf{I}$.

* * *

1.46. Odredi sve matrice drugoga reda čiji je kvadrat jednak nul-matrici.

1.47. Odredi sve matrice drugoga reda čiji je kub jednak nul-matrici.

1.48. Ako za matricu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ vrijedi $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ za neki prirodni broj n, dokaži da je tada $ad - bc = 0$.

1.49. Neka je $\mathbf{A}$ matrica drugoga reda i $n > 2$ prirodan broj. Pokaži da jednakost $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ vrijedi onda i samo onda ako vrijedi i $\mathbf{A}^2 = \mathbf{0}$.

* * *

1.50. Ako je $A^2 = \mathbf{I}$, tada se matrica $\mathbf{A}$ naziva **involutorna**.
a) Odredi sve involutorne matrice drugoga reda.
b) Pokaži da je $\mathbf{A}$ involutorna onda i samo onda ako vrijedi $(\mathbf{I}-\mathbf{A})(\mathbf{I}+\mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

1.51. Matrica $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$ je **nilpotentna** ako za neki pozitivni cijeli broj p vrijedi $\mathbf{A}^p = \mathbf{0}$. Pokaži da je svaka gornja trokutasta matrica s nulama na glavnoj dijagonali nilpotentna.

1.52. Pokaži da je umnožak dviju trokutastih matrica istoga tipa ponovno trokutasta matrica istoga tipa.

1.53. Dokaži da za operaciju transponiranja vrijedi $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top\mathbf{A}^\top$.

1.54. Dokaži da je za svaku matricu $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$ matrica $\mathbf{AA}^\top$ simetrična.

1.55. Svaka se kvadratna matrica dade rastaviti na zbroj simetrične i antisimetrične. Provjeri da su to matrice

$$\mathbf{A}_s = \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top), \qquad \mathbf{A}_a = \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top).$$

Odredi te matrice ako je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & 6 \\ 10 & 4 & -7 \end{bmatrix}.$$

1.56. Pokaži da jednakost $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$ vrijedi onda i samo onda kad matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ komutiraju.

1.57. Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ simetrične matrice. Pokaži na primjeru da $\mathbf{AB}$ ne mora biti simetrična.

1.58. Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ simetrične matrice. Dokaži da je $\mathbf{AB}$ simetrična onda i samo onda ako matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ komutiraju.

1.59. Neka su $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ antisimetrične matrice. Dokaži da je njihov produkt $\mathbf{AB}$ antisimetrična matrica onda i samo onda ako $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ antikomutiraju tj. ako vrijedi $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$.

1.60. Provjeri da množenje dijagonalnom matricom slijeva odgovara množenju redaka s njenim dijagonalnim elementima. Slično, množenje dijagonalnom matricom zdesna za rezultat ima množenje stupaca sa odgovarajućim dijagonalnim elementima.

1.61. Komutatorom $[\mathbf{AB}]$ kvadratnih matrica reda n naziva se matrica $[\mathbf{AB}] := \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$. Pokaži da komutator posjeduje sljedeća svojstva:
a) $[\mathbf{AB}] = \mathbf{0}$ onda i samo onda ako $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ komutiraju;
b) $[\mathbf{AB}] = -[\mathbf{BA}]$ (antikomutativnost);
c) $[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}] + [[\mathbf{BC}]\mathbf{A}] + [[\mathbf{CA}]\mathbf{B}] = \mathbf{0}$ (Jacobijev identitet).

1.62. Za kompleksnu matricu $\mathbf{A}$ definiramo **konjugiranu** matricu $\overline{\mathbf{A}}$ na način $(\overline{\mathbf{A}})_{ij} = \overline{a}_{ij}$, gdje je $\overline{a}_{ij}$ kompleksno konjugirani broj broju a_{ij}. Također definiramo **adjungiranu** matricu $\mathbf{A}^*$ na način $\mathbf{A}^* = (\overline{\mathbf{A}})^\top$.

$$\text{Za matricu } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2-i & 3i & 0 \\ 1+2i & 5 & 6-i \\ 2 & 3-i & -2i \end{bmatrix} \text{ nađi } \overline{\mathbf{A}} \text{ i } \mathbf{A}^*.$$

1.63. Za (kompleksnu) kvadratnu matricu kažemo da je **hermitska** ako vrijedi $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, **antihermitska** ako je $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$. (U realnom slučaju ove se matrice podudaraju s simetričnim i antisimetričnim jer je tada $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^\top$.) Pokaži da je u hermitskoj matrici dijagonala uvijek realna, a u antihermiskoj čisto imaginarna. Pokaži da se svaka kvadratna matrica može prikazati kao zbroj hermitske i antihermitske matrice.

1.64. Neka je $\mathbf{A} \in \mathscr{M}_n$ takva da vrijedi $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$ za sve $\mathbf{B} \in \mathscr{M}_n$. Pokaži da je $\mathbf{A}$ jedinična matrica.

1.65. Za kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ definiramo njen **trag** kao sumu dijagonalnih elemenata:

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} = \ldots + a_{nn}.$$

Dokaži da vrijedi $\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA})$, $\operatorname{tr}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \operatorname{tr}\mathbf{A} + \operatorname{tr}\mathbf{B}$, $\operatorname{tr}(\mathbf{A}) = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^\top)$ za sve $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathscr{M}_n$.

1.66. Dokaži da ne postoje kvadratne matrice $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ takve da vrijedi $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{I}$.

1.67. **Jordanov produkt** kvadratnih matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ definira se na način $\mathbf{A} * \mathbf{B} := \frac{1}{2}(\mathbf{AB} + \mathbf{BA})$. Dokaži sljedeća svojstva: **a**) $\mathbf{A} * \mathbf{B} = \mathbf{B} * \mathbf{A}$; **b**) $\mathbf{A} * \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$; **c**) $\mathbf{A} * \mathbf{I} = \mathbf{A}$; **d**) $\mathbf{A} * (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} * \mathbf{B} + \mathbf{A} * \mathbf{C}$.

1.68. Neka je $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Uvjeri se da vrijedi $\mathbf{J}^2 = -\mathbf{I}$. Pokaži da se skup svih matrica oblika

$$\{\mathbf{Z} = \alpha\mathbf{I} + \beta\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$$

s obzirom na operacije zbrajanja i množenja matrica ponaša identično skupu kompleksnih brojeva $\{z = \alpha + i\beta\}$.

2. Determinante

Determinanta realne kvadratne matrice je funkcija $\det : \mathscr{M}_n \to \mathbf{R}$. Determinantu matrice $\mathbf{A}$ označavamo s

$$\det \mathbf{A} \quad \text{ili} \quad |\mathbf{A}| \quad \text{ili} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Definiramo je induktivno po redu n matrice.

Za $n = 1$ i $\mathbf{A} = [a_{11}]$ je $\det \mathbf{A} = a_{11}$.

Za $n = 2$ i $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$,

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Za matrice višega reda determinanta se definira (i može računati) **razvojem po bilo kojem retku ili stupcu**, na način

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Općenito se determinanta matrice reda n dobije pomoću determinanti reda $n-1$ tako da se zbroje (ili oduzmu) produkti elemenata nekog retka ili stupca s determinantama matrica koje se dobiju uklanjanjem retka i stupca u kojem se taj element nalazi. Točnije zapisano

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij},$$

(rastav po i-tom retku, ili

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}.$$

(rastav po j-tom stupcu). Tu je M_{ij} **minor** elementa a_{ij}: determinanta matrice reda $n-1$ u kojoj se ne nalazi i-ti redak niti j-ti stupac početne matrice.

Definicija determinante je dobra, pošto ovaj **Laplaceov razvoj** ne ovisi o izboru retka ili stupca po kojem vršimo razvoj.

Izbor predznaka $+$ ili $-$ pamtimo po sljedećoj shemi za matrice reda 3 i 4:

$$\begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{bmatrix}.$$

2.1. Laplaceov razvoj i Sarrusovo pravilo

Direktnim razvojem po nekom retku ili stupcu računamo uglavnom determinante matrica maloga reda $(3$ ili $4)$. Specijalno, za determinante trećega reda ponekad je brže dati gotov razvoj:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}). \end{aligned}$$

Ovaj se razvoj pamti iz sljedećeg zapisa kojeg nazivamo **Sarrusovo pravilo**. Prva dva stupca determinante se prepišu iza trećega i potom izmnože po tri broja koja se nalaze na istovrsnim dijagonalama. Padajuće dijagonale nose pozitivan, a rastuće negativan predznak:

$$\begin{array}{c} \\ \det \mathbf{A} = \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccc|cc} + & + & + & & \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & & \end{array} \begin{array}{l} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ \quad -(a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}). \end{array}$$

2.1. Izračunaj determinante:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$; **e)** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

RJEŠENJE. **a**) Determinantu računamo razvojem po trećem retku

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-2-(-1)) + (2-3) = -2. \end{aligned}$$

b) Laplaceovim razvojem po prvom retku dobivamo

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} &= 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 1\cdot(1-4) - 2(2+4) + 2(-4-2) = -27.\end{aligned}$$

c) Sarrusovim pravilom

$$\left|\begin{array}{rrr|rr} -2 & 3 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right. = -12 + 6 + 6 - (6 - 8 + 9) = -7.$$

d) 0.

e) 4.

2.2. Izračunaj determinantu

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE. Razvijamo po trećem retku

$$\begin{aligned}D &= 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 1 & -4 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (\text{Sarrusovim pravilom}) \\ &= 2(-9 - 20 + 6 + 30 + 12 - 3) \\ &\qquad + (-9 - 4 + 50 - 2 - 60 - 15) \\ &\qquad + (9 + 3 - 25 + 1 + 45 + 15) \\ &= 2\cdot 16 - 40 + 48 = 40.\end{aligned}$$

2.2. Svojstva determinanti

Navedimo neka svojstva determinanti.

1) $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^\top$.

2) Zamjenom dva retka (ili stupca) determinanta mijenja predznak.

3) Determinantu množimo skalarom tako da tim skalarom pomnožimo sve elemente nekog retka ili stupca determinante. Ovo se pravilo češće koristi na način da se svi elementi nekog retka ili stupca skrate za zajednički faktor koji se izvlači ispred determinante.

4) Ako su svi elementi nekog retka (ili stupca) jednaki nuli, determinanta je jednaka nuli.

5) Ako su u determinanti dva retka (ili stupca) jednaka (ili proporcionalna), ona je jednaka nuli.

6) Vrijednost determinante se ne mijenja ako se nekom retku (ili stupcu) pribroje elementi nekog drugog retka (ili stupca) pomnoženi skalarom λ.

7) Determinanta trokutaste matrice jednaka je umnošku elemenata na dijagonali.

8) **Binet-Cauchyjev** teorem: $\det(\mathbf{AB}) = \det\mathbf{A}\cdot\det\mathbf{B}$.

Od ovih svojstava pri računanju determinante najčešće koristimo svojstvo 6. Cilj je pomoću takve transformacije dovesti matricu na gornju (rjeđe donju) trokutastu i tako izračunati njenu vrijednost.

2.3. Izračunaj determinante:

$$\textbf{a)}\ \begin{vmatrix} 2+a & 1+b \\ a & b \end{vmatrix};\quad \textbf{b)}\ \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix};\quad \textbf{c)}\ \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix};\quad \textbf{d)}\ \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

RJEŠENJE. **a**) Determinantu transformiramo tako da drugi redak oduzmemo od prvog:

$$\begin{vmatrix} 2+a & 1+b \\ a & b \end{vmatrix} = \big(\textit{1.r} - \textit{2.r}\big) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = 2b - a.$$

b) Uz određeni oprez, u jednom koraku može se sprovoditi nekoliko transformacija tipa 6. Dopušteno je jednom retku *dodati linearnu kombinaciju* nekoliko preostalih redaka:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} &= \big(\textit{1.r}-\textit{2.r}-\textit{3.r}\big) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \big(\textit{rastav po prvom retku}\big) \\ &= (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(3-2) = -1. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} &= \big(\textit{1.r}+(\textit{2.r}+\textit{3.r}+\textit{4.r})\big) = \begin{vmatrix} 11 & 11 & 11 & 11 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} \\ &= 11\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \big(\textit{2.r}-2\times\textit{1.r},\ \textit{3.r}-2\times\textit{1.r},\ \textit{4.r}-2\times\textit{1.r}\big) \\ &= 11\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \big(\textit{trokutasta matrica}\big) = 11\cdot 3^3 = 297. \end{aligned}$$

d)

$$
\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \big(\mathit{1.r{+}4.r,\ 2.r{+}3.r}\big) = \begin{vmatrix} 9 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}
$$

$$
= 9^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \big(\mathit{4.r{-}5{\times}1.r,\ 3.r{-}5{\times}2.r}\big)
$$

$$
= 81 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 81.
$$

* * *

Dakako da ovdje navedeni postupci računanja nisu jedini mogući, pa možda čak niti ‘najjednostavniji’; čitatelj može potražiti i druge načine za njihov izračun.

Pri tom treba paziti da se pri korištenju svojstava determinanti ne učini *circulus viciosus* — vrtnja u krugu. Spomenuli smo da je dozvoljeno u jednom koraku retku dodati linearnu kombinaciju nekolicine preostalih, međutim ako se to učini s nekolicinom redaka istovremeno, vrlo je vjerojatno da će doći do pogreške. Pogrešna primjena može dovesti i do ovakovih ‘računa’

$$
\begin{vmatrix} 3 & 8 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \big(\mathit{1.r{+}2.r, 2.r{+}1.r}\big)
$$

$$
= \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \big(\mathit{1.r{-}2.r}\big) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0.
$$

Mi ćemo ubuduće koristiti sljedeće pravilo (koje je upotrebljeno u zadatku **c**): dopušteno je u jednom koraku svakom (osim jednog) dodati taj redak pomnožen s brojem.

2.4.

Izračunaj determinante:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a^2 & a^2 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

RJEŠENJE. **a**) 0 (dva identična stupca).

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \left(\mathit{2.s-1.s,\ 3.s-1.s}\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b+a & c+a \end{vmatrix}$$
$$= (b-a)(c-a)(c-b).$$

c)

$$\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = \left(\mathit{1.r+(2.r+3.r)}\right) = \begin{vmatrix} 2x+2y & 2x+2y & 2x+2y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$
$$= (2x+2y)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} = \left(\mathit{2.s-1.s,\ 3.s-1.s}\right)$$
$$= 2(x+y)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & x-y \\ x+y & -y & -x \end{vmatrix} = 2(x+y)\begin{vmatrix} x & x-y \\ -y & -x \end{vmatrix}$$
$$= 2(x+y)(-x^2-y^2+xy) = -2(x^3+y^3).$$

2.5. Izračunaj determinante:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -8 & 1 \\ 3 & 15 & 18 & 91 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 13 & 39 & 1 \end{vmatrix}$; **b)** $\begin{vmatrix} 8 & 28 & 38 & 48 \\ 4 & 14 & 19 & 24 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}$; **c)** $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 0 & 9 & 9 \\ 13 & -1 & 17 & 4 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 8 & -15 \end{vmatrix}$; **e)** $\begin{vmatrix} 378 & 253 & 127 \\ 377 & 252 & 126 \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$; **f)** $\begin{vmatrix} 2789 & 3453 \\ 2790 & 3454 \end{vmatrix}$.

RJEŠENJE. **a**) 0 (3. redak).

b) 0 (1. redak $=\ 2\times 2$. redak).

c) 0 (3. redak $=\ 2\times 1$. redak $+$ 2. redak).

Dakako da ova veza nije očigledna. Međutim, svaki drugi ispravan način računanja ove determinante dati će isti rezultat.

d) 0 (3. redak $=\ 3\times 1$. redak $+\ 2\times 2$. redak).

e)

$$D = -3\begin{vmatrix} 378 & 253 & 127 \\ 377 & 252 & 126 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left(\mathit{1.r-2.r}\right) = -3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 377 & 252 & 126 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

f) $D = \left(\mathit{2.r-1.r}\right) = \begin{vmatrix} 2789 & 3453 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2789-3453 = -664\,.$