1.

Elementi logike i teorije skupova

1.1. Matematička logika

Cilj je ovog poglavlja upoznati čitatelja s osnovnim i najvažnijim pojmovima i oznakama matematičke logike. Matematička se logika ponekad naziva i *simboličkom.* Svrha tog simboličkog računa jest da spoznamo osnovne principe kojima se koristimo pri ispravnom zaključivanju. Nadalje, simbolički račun je tehnika kojom jezgrovito možemo (i hoćemo!) zapisivati mnogobrojne definicije, tvrdnje i dokaze u poglavljima koja slijede. I na koncu, ali ne manje važno, logika je i sama sebi svrha: bez logičnog mišljenja nema ne samo ispravnog matematičkog nego niti bilo kojeg drugog zaključivanja.

Sud. Osnovni pojam matematičke logike je pojam suda. U svakodnevnom životu koristimo kombinacije osnovnih riječi pomoću kojih slažemo rečenice. Samo nizanje riječi može nas dovesti do rečenica koje nemaju smisla. Međutim, niti svaka smislena rečenica ne mora biti sud. Nas zanimaju samo smislene rečenice kojima se nešto izjavljuje ili tvrdi. Takve rečenice za koje će biti moguće utvrditi iskazuje li se njima istina ili laž nazivamo **sudovima**.

Navedimo nekoliko jednostavnih rečenica koje smatramo sudovima.

1. Sunce je zvijezda.
2. Broj devet je paran broj.
3. Postoji prirodan broj manji od jedan.
4. Svaki prirodan broj je veći od deset.
5. Broj pet je manji od broja sedam.

6. Postoji ravninski trokut u kojem je zbroj kutova veći od 180^o .
7. U svakom su trokutu dvije stranice paralelne.

Navedimo nekoliko rečenica koje su možda smislene ali ih ne smatramo sudovima.

1. $x+2>8$.
2. Hrvatska je djeljiva s brojem pet i ostatak je broj trideset.
3. Mar koapp lica ti on u se ienter ioauer.
4. Kiša pada svaki dan.
5. Vela istina je uvijek platinasto hrapava.
6. Sunce je jako daleko od Zemlje.
7. Koliko je sati?

Obrazložite zbog čega ove rečenice (čak ni one 'smislene') ne smatramo sudovima.

Primjer 1.1. Promotrimo rečenicu *Ovo što govorim je laž.* Tvrdimo da ona nije sud — nemoguće je utvrditi je li ona istinita ili ne. Zaista, ako je izjava istinita, tada ona to ne može biti jer tvrdi da je *izrečeno* laž. Ako je pak izjava lažna, tada ona to ponovo ne može biti jer bi to značilo da se govori istina.

Osnovne objekti koje proučavamo u matematičkoj logici su **elementarni sudovi** — jednostavne tvrdnje poput gore navedenih kojima uvijek možemo utvrditi istinitost.

Polazeći od elementarnih sudova možemo graditi pomoću logičkih operacija složenije sudove. Tim operacijama u svakodnevnom govoru odgovaraju riječce "i", "ili", "nije", "ako... onda...", "nije... i...", "Niti... niti..." i slično.

Navedimo nekoliko primjera.

1. Broj osam je paran broj **i** ptice su sisavci.
2. Broj dva je manji od devet **i** ptice nisu sisavci.
3. Broj pet **nije** paran broj.
4. Sokrat je Grk **ili** je osam veće od deset.
5. **Nije** broj osam paran broj **i** ptice su sisavci.
6. **Nije** Sokrat grk **ili** je osam paran broj.
7. **Niti** je Sokrat grk **niti** je osam paran broj.
8. **Ako** si ti brži od mene, **onda** sam ja helikopter.

Slovima $x, y, z, \ldots$, itd. označavamo varijable algebre sudova. Svako od tih slova može predsavljati bilo koji sud — elementaran ili složen.

Sudu pridružujemo **vrijednost istinitosti** $t(x)$. Istinitom sudu a pridružujemo vrijednost istinitosti $t(x)=1$, lažnom sudu y pridružujemo vrijednost istinitosti $t(y)=0$.

U nekim knjigama često nailazimo i na ove oznake za vrijednost istinitosti sudova, $t(x)=\top$ (koristi se također kao oznaka za istiniti sud), $t(y)=\perp$ (koristi se kao oznaka za lažan sud). Navedene oznake su uvezi s engleskom riječi za istinu, *truth* – istina.

1.2. Logičke operacije

Definirajmo operacije kojim od jednostavnih sudova pravimo složene.

Negacija $\cdots\ '$**.** Ako je sud x istinit, onda je sud x' lažan i obrnuto. Tu činjenicu zapisujemo **tablicom istinitosti**. U njoj su unesene sve moguće istinosne vrijednosti kako za prvi sud x, tako i za drugi sud x':

x	x'
1	0
0	1

Konjunkcija $\cdots\wedge$ **ili** $\&$**.** Ako su x i y sudovi, onda pomoću operacije $\wedge$ (čitaj "i") izgrađujemo novi sud $x \wedge y$. Taj sud zapisujemo još i ovako: $x\&y$. Ovaj sud će biti istinit onda i samo onda ako su oba početna suda istinita. To zapisujemo sljedećom tablicom istinitosti.

x	y	$x \wedge y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjunkcija $\cdots\vee$**.** Operacijom $\vee$ (čitaj "ili") iz danih sudova x i y izgrađujemo novi sud $x \vee y$. Novoizgrađeni sud je lažan samo onda ako su oba suda lažna. Drugim riječima, istinit je ako je barem jedan od početnih sudova istinit.

Tablica istinitosti toga suda je

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implikacija $\cdots \rightarrow$ **ili** $\Longrightarrow$**.** Operacijom implikacija definiramo novi sud polazeći od zadanih sudova x i y. $x \rightarrow y$ čitamo na razne načine: "iz x slijedi y", "x implicira y", "Ako je x, onda je y", "x je dovoljan uvijet za y", "y je nuždan uvijet za x". Istinitost novog suda $x \rightarrow y$ dana je tablicom:

x	y	$x \rightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Primijeti da je ovaj sud lažan samo u slučaju da iz istine slijedi laž. Za prvi redak kažemo da je istina da iz istine slijedi istina. Za drugi kažemo laž je da iz istine slijedi laž. Za treći redak kažemo, istina je da iz laži slijedi istina, odnosno za četvrti kažemo da je istina da iz laži slijedi laž.

Ekvivalencija $\cdots \iff$**.** Pomoću operacije ekvivalencije i sudova x i y gradimo novi sud $x \iff y$ koji je istinit samo onda kad oba suda imaju jednake istinitosti, tj. kada je $t(x) = t(y)$. Oznaku $x \iff y$ čitamo:

"x je onda i samo onda, ako je y";

"x je ekvivalentan y";

"x je nuždan i dovoljan uvijet za y".

Sud $x \iff y$ može biti definiran kao složeni sud

$$x \iff y \quad = \quad (x \to y) \wedge (y \to x)$$

i upravo tako vrlo često provjeravamo ekvivalentnost dvaju sudova.

Napravimo sad preglednu tablicu definiranih operacija.

x	y	x'	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \to y$	$x \iff y$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Istovrijednost formula. Za formule A i B kažemo da su **jednakovrijedne** i pišemo $A = B$, onda i samo onda ako za bilo koji izbor vrijednosti varijabli koje uvrstimo u njih one imaju jednaku vrijednost istinitosti. Možemo smatrati da će dvije formule algebre sudova biti istovrijedne — jednakovrijedne ako je formula $A \iff B$ **identički istinita formula**, tj. ako za svaki izbor varijabli ona ima vrijednost istinitosti $\top$.

Zadatak 1.1. Pomoću tablica istinitosti provjerite da vrijedi:

1. $x \wedge y = y \wedge x$,
2. $x \vee y = y \vee x$,
3. $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$,
4. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,
5. $x \vee 0 = x$,
6. $x \wedge 1 = x$,
7. $x \vee x' = 1$,
8. $x \wedge x' = 0$,
9. $0 \neq 1$. (0 je oznaka za lažan sud, dok je 1 oznaka za istinit sud).

Pomoću tablica istinitosti možemo vrlo jednostavno provjeriti da logičke operacije: negacija, konjunkcija, disjunkcija, implikacija i ekvivalencija nisu nezavisne operacije. Provjerite da vrijedi:

x	y	x'	y'	$x' \vee y$	$x \wedge y'$	$(x' \wedge y')'$	$(x' \vee y')'$
1	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0

Iz navedene tablice vidimo da vrijedi:

1. $x \vee y = (x' \wedge y')'$, tj. disjunkciju možemo izraziti pomoću negacije i konjunkcije,
2. $x \to y = x' \vee y = (x \wedge y')'$,
3. $x \iff y = (x' \vee y) \wedge (x \vee y') = [(x \vee y')' \vee (x' \vee y)']'$

tj. implikacija i ekvivalencija se mogu izraziti pomoću negacije i konjunkcije, odnosno negacije i disjunkcije. Ta činjenica ima značajnu praktičnu vrijednost prilikom realizacije matematičke logike pomoću električkih sklopova. U tom slučaju trebamo imati samo sklopove dvije vrste (sklop za negaciju i disjunkciju) i pomoću njih graditi ostale sklopove kojima se realiziraju preostale operacije.

1.3. Formule algebre sudova

1. **Alfabet.** Sudove označavamo slovima $x, y, z, \ldots$

2. **Logičke operacije.** Definirali smo logičke operacije:

$$', \quad \wedge \quad , \vee \quad , \rightarrow \quad , \Longleftrightarrow \quad .$$

To su operacije: **negacija, konjunkcija, disjunkcija, implikacija, ekvivalencija,**

3. **Zagrade.** Koristimo još i dvije zagrade: (recimo lijeva, i) koju nazovimo desna. Zagrade koristimo da bismo naznačili redoslijed izvršenja operacija ili da se otkloni mogućnost višeznačne interpretacije.

Definirajmo koje izraze smatramo formulama algebre sudova.

1. Formulom algebre sudova smatramo svaku varijablu (slovo koje reprezentira bilo koji sud) algebre sudova.

2. Ako su X i Y formule algebre sudova, onda su formule i

$$X', \quad X \wedge Y, \quad X \vee Y, \quad X \rightarrow Y, \quad X \Longleftrightarrow Y.$$

3. Formule su samo oni izrazi koji se dobivaju pomoću višekratne primjene postupaka **1.** i **2.**

Jednakost formula. Dvije formule algebre sudova su jednake ako su one **grafički jednake.** To znači da su izgrađene od istog alfabeta, istih operacija, istih zagrada i u istom redoslijedu. Tako na primjer formule $x \wedge y$ i $y \wedge x$ nisu jednake formule iako će one imati istu vrijednost istinitosti za svaki izbor vrijednosti x i y.

Izrazi poput ovih:

1. $x \Longleftrightarrow y($
2. $((x \rightarrow y$
3. $x \wedge y \vee z$

nisu fomule. U posljednjem izrazu nije jasno dali se misli $(x \wedge y) \vee z$ ili možda $x \wedge (y \vee z)$.

U matematičkoj logici razrađena je vrlo jednostavna procedura (svega dva zakona, zakon supstitucije i modus ponens) kojom se za bilo koji izraz može donijeti odluka da li je formula ili nije, zatim kojim je redoslijedom ona izgrađena. Zakonom supstitucije legalno je u nekoj formuli u kojoj se pojavljuje varijabla x nju zamjeniti na svim mjestima gdje se pojavljuje s nekom drugom formulom i tako dobiti novu formulu. O modusu ponensu koji se primjenjuje na dvije formule koje moraju biti oblika A i $A \Rightarrow B$ vidi malo kasnije.

Logička posljedica. Formula B je logička posljedica formule A ako za svaki izbor varijabli za koji formula A ima vrijednost istinitosti $\top$ za taj izbor varijabli i formula B ima vrijednost istinitosti $\top$. Formula B će biti logička posljedica formule A onda i samo onda ako je formula $A \Rightarrow B$ identički istinita formula.

Identički istinite formule algebre sudova. Prilikom donošenja zaključaka koristimo se istinama, tj. identički istinitim formulama. Navedimo devet *identički istinitih* formula koje vrlo često koristimo.

1. Zakon identiteta	$x \Rightarrow x$
2. Zakon proturječja	$(x \wedge x')'$
3. Zakon isključenja trećeg	$x \vee x'$
4. Zakon dvostruke negacije	$(x')' \iff x$
5. Istina iz makar čega	$x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$
6. Iz laži proizvoljno	$x' \Rightarrow (x \Rightarrow y)$
7. Modus ponens	$(x \wedge (x \Rightarrow y)) \Rightarrow y$

(Provjerite tablicama istinosti da su sve formule istinite.)

Zaključivanje po modus ponensu vrlo je često. To zaključivanje ide obično ovako: ako je sud x istinit i ako je istina da sud x implicira sud y, onda je i sud y istinit, (sjeti se da iz istine slijedi samo istina). Evo jednog jednostavnog primjera.

Primjer 1.2. a) Pođimo od dva suda. $p \equiv$ Danas je utorak. $q \equiv$ Jučer je bio ponedjeljak. Napravimo složeni sud: $p \Rightarrow q \equiv$ Ako je danas utorak, onda je jučer bio ponedjeljak.

Danas je utorak, zaključujemo da je jučer bio ponedjeljak.

b) Evo jednog klasičnog primjera. Svaki čovjek je smrtan. Sokrat je čovjek. Zaključujemo: Sokrat je smrtan. Uoči da je tu primijenjen zakon zaključivanja od općeg (bilo koji čovjek) na posebno (Sokrat).

c) Za svaki realan broj x vrijedi: $x + 1 > x$. Nadalje $8 = 7 + 1$. Zaključujemo da je $8 > 7$.

8. Modus tollens (dual modus ponensa)

$$(y' \wedge (x \Rightarrow y)) \Rightarrow x'$$

Zaključivanje po modus tollensu obično ide ovako. Neka je tvrdnja y lažna a tvrdnja x implicira tu tvrdnju. Sada na osnovu modus tollensa zaključujemo da je tvrdnja x lažna. Modus tollens se koristi i u izmjenjenom obliku, tj. ako u predhodni izraz umjesto x uvrstimo x' tada izraz modus tollens izgleda

$$(y' \wedge (x' \Rightarrow y)) \Rightarrow x$$

i u tom ga obliku koristimo u dokazima polazeći od suprotnog (dokaz kontradikcijom). Konstukcija dokaza obično ide ovako. Treba dokazati istinost tvrdnje x. Pretpostavimo da tvrdnja x nije istinita i zatim dokazujemo da x' implicira neku tvrdnju y za koju znamo da je lažna. Pomoću modus tollensa zaključujemo da je x istinita tvrdnja.

9. Zakon silogizama

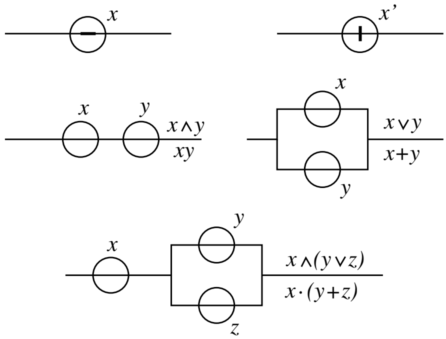
$$((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$$

Ovaj zakon čitamo i ovako: "Ako iz x slijedi y i zatim ako iz y slijedi z, onda iz x slijedi z". U matematici često susrećemo dugačke lance zaključivanja tog tipa.

Koristeći tablice istinitosti dokažite istinitost navedenih devet tvrdnji. Naime, trebate promotriti sve moguće kombinacije za vrijednosti varijabli i u svakom od tih slučajeva dobiti istinitu tvrdnju.

1.4. Algebra električkih prekidača

Pokažimo jednu relizaciju algebre sudova pomoću algebre električkih prekidača. Naime, neka je dana dvopolna mreža takva da je u svakoj grani te mreže po jedan prekidač. Ako je prekidač zatvoren pridružimo mu vrijednost 1 i smatramo da kroz njega može teći struja. Ako je prekidač otvoren pridružimo mu vrijednost 0 i kroz njega ne teče stuja. Umjesto električkih prekidača, mogli smo promatrati ventile u nekoj vodovodnoj mreži. Na priloženim skicama prikazani su neki jednostavni sklopovi prekidača pomoću kojih možemo ilustrirati odnose među sudovima. Pitanje je: kada teče struja kroz sklop?



Sl. 1.1

1.5. Predikati

U algebri sudova temeljni zadatak je ispitivanje istinitosti složenih sudova. Tu se polazi od sudova $x, y, z, \ldots$. Pomoću operacija: $'$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ i upotrebom zagrada (,) izgrađujemo složene sudove. Jednostavnim sudovima iskazujemo da određeni objekt ili osoba posjeduje neko **svojstvo** ili se nalazi u **relaciji** s nekim drugim objektom. Evo za to nekoliko primjera.

1. Franjo je viši od dva metra.
2. Broj sedam je djeljiv s dva.
3. Ljudevit Gaj je ilirac.

Uočavamo da su to jednostavne rečenice koje se sastoje od **subjekta** i **predikata**. Ulogu subjekta ima **ime** nekog objekta, dok ulogu predikata ima neko **svojstvo** subjekta. U trećem primjeru je subjekt Ljudevit Gaj, dok je predikat "ilirac". Prema tome mogli bismo pitati ima li još netko osim Gaja svojstvo "biti ilirac".

Rečenicom "x je ilirac" nije dan sud sve dok neznamo koji čovjek je x. Ako je x Marko Marulić, tada "Marko Marulić je ilirac" je sud i kao što znamo to je lažan sud. Slično bismo za izraz "x je djeljiv s dva" rekli da je **priređen** za sud, tj. treba samo umjesto x uvrstiti neki broj i dobivamo sud, za neke x istinit, a za neke lažan.

Za svaki prirodni broj izraz

$$P(x) \ldots \text{“}x \text{ je djeljiv s dva”}$$

postaje sud i prema tome preko $P(x)$ svakom prirodnom broju pridružujemo $\top$ ili $\perp$.

Predikatom na skupu S nazivamo svaku funkciju koja svakom elementu skupa S pridružuje vrijednost $\top$ ili $\perp$, $(1$ ili $0)$.

Predikat na skupu S potpuno je određen ako znamo one elemente skupa na kojima poprima vrijednost $\top$, dakle predikat na skupu S možemo zadati tako da zadamo jedan njegov podskup.

Od posebnog interesa su konstantne funkcije, koje na svakom elementu skupa S imaju istu vrijednost. Takve imamo dvije.

1. Za svaki element x iz skupa S predikat $P(x)$ ima vrijednost $\top$, dakle za svaki x iz S je $P(x) = \top$.

2. Za svaki element x iz S je $P(x) = \perp$.

Ako predikat nije konstantna funkcija $P(x) = \perp$, onda možemo reći da postoji barem jedan x iz skupa S za koji je $P(x) = \top$.

Jedinični sudovi. Neka je zadan predikat $P(x)$ na skupu S. Ako je a element skupa S, onda supstitucijom elementa a u predikat dobivamo sud $P(a)$. Tako dobiven sud nazivamo jediničnim sudom. Prema tome, postupkom supstitucije pojedinog elementa iz S u predikat definiran na S, dobivamo jedinični sud.

1.6. Kvantifikatori

Univerzalni kvantifikator $\forall$**.** Upoznajmo još dva načina kako iz danog predikata pravimo sud. Neka je $P(x)$ predikat na S. Izrekom “*Za svaki x je $P(x)$*” definiramo sud. Taj sud je istinit onda i samo onda ako je $P(x) = \top$ za svaki element iz S, tj. ako je $P(x)$ konstantna funkcija na S. Sud “Za svaki x je $P(x)$” označavamo ovako:

$$(\forall x)P(x)$$

čitaj: “za svaki x je $P(x)$”. (Okrenuto slovo A dolazi od njemačke riječi alle).

Navedimo nekoliko primjera.

1. Neka je $P(x)$ predikat na skupu realnih brojeva,

$$P(x) \cdots x^2 \geqslant 0.$$

Sada je sud $(\forall x)(x^2 \geq 0)$ istinit sud.

2. Predikat

$$P(x) \ldots \text{“}x \text{ je pravokutnik”}$$

neka je definiran na skupu svih paralelograma neke ravnine. Sud $(\forall x)P(x)$ je lažan sud.

3. $(\forall x)(x^2 + 4x - 8 \leq 0)$ je lažan sud na skupu realnih brojeva.

Egzistencijalni kvantifikator $\exists$**.** Neka je $P(x)$ predikat na skupu S. Polazeći od tog predikata gradimo sljedeći sud:

$$(\exists x)P(x)$$

čitaj: " Postoji x takav da je $P(x)$ ". (Okrenuto slovo E dolazi od riječi *egzistira* – postoji)

Sud $(\exists x)P(x)$ je istinit onda i samo onda ako $P(x)$ nije konstantna funkcija $P(x) = \perp$, tj. ako $P(x) = \top$ bar za jedan x iz skupa S.

Primjer 1.3. 1. $(\exists x)(x + 7 = 35)$ je istinit sud na skupu realnih brojeva.
2. $(\exists x)(x^2 + 4x - 8 = 0)$ je lažan sud na skupu realnih brojeva.
3. $(\exists x)(x^2 = 2)$ je lažan sud na skupu racionalnih brojeva.
4. $(\exists x)(x^2 = 2)$ je istinit sud na skupu realnih brojeva.

1.7. Algebra predikata

Neka su zadana dva predikata $P(x)$ i $Q(x)$ na skupu S. Ona su **jednaka** i pišemo $P(x) = Q(x)$, ako su oba definirana na skupu S, i ako je za svaki a iz S istinitost sudova $P(a)$ i $Q(a)$ jednaka, tj. $t(P(a)) = t(Q(a))$.

Koristeći operacije algebre sudova iz zadanih predikata izgrađujemo nove predikate. Neka su dani predikati $P(x)$ i $Q(x)$ definirani na skupu S. Negacijom predikata $P(x)$ dobivamo predikat $P'(x)$. Taj novi predikat je funkcija definirana na skupu S i za svaki pojedinu vrijednost a dobivamo sud. Za vrijednost istinitosti (0 ili 1) tako dobivenog suda vrijedi $t(P'(a)) = 1 - t(P(a))$. Dakle, ako je a element skupa S, onda predikat $P'(x)$ poprima vrijednost različitu od vrijednosti koju poprima predikat $P(x)$.

Potpuno u skladu s operacijama sa sudovima i definicijom funkcije definiramo nove predikate tako da kažemo koju vrijednost poprimaju na proizvoljnom elementu skupa S. Prema rečenom evo definicija operacija sa predikatima definiranim na nekom nepraznom skupu S. To su predikati:

$$P(x) \wedge Q(x), \quad P(x) \vee Q(x), \quad P(x) \Rightarrow Q(x), \quad P(x) \iff Q(x)$$

Kada uvrstimo vrijednost a iz S, onda za te predikate vrijedi:

$$(P(x) \wedge Q(x))(a) = P(a) \wedge Q(a);$$
$$(P(x) \vee Q(x))(a) = P(a) \vee Q(a)$$
$$(P(x) \Rightarrow Q(x))(a) = P(a) \Rightarrow Q(a);$$
$$(P(x) \iff Q(x))(a) = P(a) \iff Q(a)$$

Primjer 1.4. Neka je $P(x)$ predikat–svojstvo: "biti Hrvat", a $Q(x)$ predikat–svojstvo: "živjeti u Hrvatskoj" i smatrajmo da su to predikati definirani na skupu svih stanovnika Zemlje.

Sada je $t(P(x) \wedge Q(x)) = \top(1)$ samo onda ako je x Hrvat i ako živi u Hrvatskoj. $t(P(x) \vee Q(x)) = \top(1)$ samo onda ako je x stanovnik Hrvatske ili je Hrvat koji živi izvan Hrvatske.

1.8. Skupovi

O pojmu skupa. U matematici ne definiramo samu riječ **skup**, nego aksiomima preciziramo upotrebu te riječi. Mi nećemo slijediti aksiomatsko zasnivanje, već ćemo pretpostavljati da je svakom barem intitivno jasno što se misli pod pojmom skup. Pojam skupa će ostati nedefiniran; navest ćemo dovoljno primjera skupova pomoću kojih pojašnjavamo što bismo trebali pod njim zamišljati.

Skupove označavamo slovima $A, B, \ldots, N, \ldots, Q, R, S, X, Y, Z$.

Relaciju "**biti element**" označavamo znakom $\in$. Zapis $x \in S$ čitamo: "x je element skupa S".

Ako x nije element skupa S pišemo $x \notin S$ i čitamo "x nije element skupa S".

Jednakost skupova. Skupovi A i B su jednaki ako vrijedi:

$$(\forall x)(x \in A \iff x \in B),$$

Pišemo $A = B$. Prema tome dva su skupa jednaka ako je svaki element jednog ujedno element i drugog skupa. Ako dva skupa nisu jednaka, onda pišemo $A \neq B$.

Podskup. Ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B, onda to označavamo $A \subset B$ i kažemo da je skup A podskup skupa B. (Tu je uključena i eventualna jednakost skupova. Često se koristi i oznaka $\subseteq$ ako se posebno želi istaći i eventualna jednakost.) Ako je A podskup od B ali nije jednak B, onda kažemo da je A pravi podskup od B. Relacija $\subset$ među skupovima ima ova tri važna svojstva:

1. $A \subset A$
2. Ako je $A \subset B$ i $B \subset C$, onda je $A \subset C$
3. $A = B$ onda i samo onda ako je $A \subset B$ i $B \subset A$.

Zadavanje podskupova. Podskupove formiramo na dva načina.

1. *Izabiremo* neke elemente iz polaznog skupa. Tu se misli na postupak kojim se iz zadanog skupa izabere jedan element. Zatim se iz preostatka ponovno bira jedan element itd. U opisanom postupku nailazimo na teoretske poteškoće jer se moramo odlučivati (možda i beskonačno mnogo puta) koji element izabrati. Taj se postupak smatra mogućim. Napomenimo da je to je sadržaj **aksioma izbora** koji prihvaćamo u aksiomatskoj izgradnji teorije skupova. Moguće je izgraditi matematičku teoriju i bez prihvaćanja tog aksioma.

2. Neka je $P(x)$ *neko svojstvo* elemenata skupa S. Svi elementi skupa S koji imaju svojstvo $P(x)$ čine jedan podskup skupa S. Tako nastali podskup označavamo ovako:

$$A = \{x \in S \mid P(x)\},$$

i čitamo: "A je skup svih x iz S koji imaju svojstvo $P(x)$"

Potrebno je istaći da se jedan te isti podskup može zadati raznim svojstvima. Tako na primjer u skupu prirodnih brojeva svojstvo "biti paran" i svojstvo "biti višekratnik od broja 2" određuju isti podskup.

Zadavanjem nekog svojstva nije nužno zadan neki skup. Nekritičkim prihvaćanjem ovakvog načina zadavanja skupova možemo vrlo lako doći do proturječja, poput ovog poznatog kao **Russelov paradoks**.

Primjer 1.5. U nekom selu brijač brije sve one ljude koji se sami ne briju i nikoga drugoga. Brije li on sam sebe?

Preveden na teoriju skupova, problem izgleda ovako: Neka je S skup svih osoba tog sela i A podskup definiran na ovaj način:

$$x \in A \iff x \text{ ne brije sam sebe}$$

Na prvi pogled, ovim svojstvom podskup je dobro definiran. Međutim, paradoks se sastoji u tome što se za brijača samog ne može utvrditi pripada li on skupu A ili ne. Ako brijač pripada skupu A, tada (po definiciji podskupa) on sebe ne brije. To je kontradikcija jer po pretpostavci brijač brije sve takve. Ako brijač ne pripada skupu A, tada on brije sam sebe, što je kontradikcija jer brijač brije samo one osobe koji se sami ne briju.

Prazan skup. Ako je S bilo koji skup, onda podskup

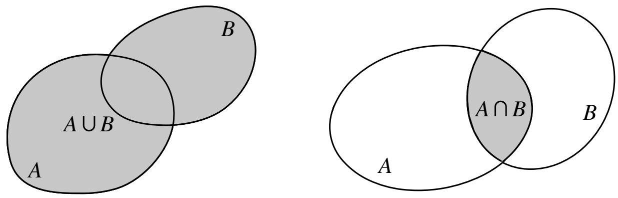
$$\{x \in A \mid x \neq x\}$$

nazivamo prazan skup i označavamo s $\emptyset$. Prazan skup nema niti jedan element. Uočimo da je prazan skup podskup svakog skupa.

1.9. Algebra skupova

Neka je S zadan skup i neka su A i B podskupovi. Definirajmo dvije operacije, **uniju** i **presjek**, oznake su: $\cup$ i $\cap$.

$$A \cup B = \{x \in S \mid x \text{ je element barem jednog od skupova } A \text{ ili } B\},$$
$$A \cap B = \{x \in S \mid x \text{ je element skupa } A \text{ i skupa } B\}.$$



Sl. 1.2

Iz definicije presjeka $A \cap B$ slijedi da dva skupa imaju zajedničkih elemenata ako i samo ako je njihov presjek neprazan skup. Ako je presjek dvaju skupova prazan skup, onda kažemo da su ti skupovi **disjunktni**. Za bilo koja dva skupa A i B vrijedi:

$$A \cap B \subset A \subset A \cup B.$$

Diferencija skupova. Diferencija (razlika) skupova A i B je skup

$$A \backslash B = \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Primijeti već sada da je općenito $A \backslash B \neq B \backslash A$.

Komplement skupa. Neka je A podskup skupa S. Komplement skupa A u odnosu na skup S je skup $S\backslash A$. Taj skup označavamo često i sljedećim oznakama:

$$S\backslash A = c(A) = A'$$

uz pretpostavku da znamo u odnosu na koji skup S određujemo komplement.

Algebra skupova. Neka je S neprazan skup i $\mathcal{F}$ neprazna familija podskupova tog skupa koja ima ova dva svojstva:

1. ako su A i B članovi familije $\mathcal{F}$, onda su članovi te familije i skupovi $A \cup B$ i $A \cap B$;

2. ako je A element od $\mathcal{F}$, onda je komplement od A u odnosu na skup S također u familiji $\mathcal{F}$.

Familiju podskupova skupa S koja ima gornja dva svojstva nazivamo **algebrom skupova** na skupu S.

Neka je A element od $\mathcal{F}$. Tada je i komplement od A također u $\mathcal{F}$, zatim slijedi da je i $A \cap A' = \emptyset$, tj. prazan skup je član familije, nadalje također slijedi da je komplement praznog skupa a to je S također član familije. Dakle, svaka algebra skupova na skupu S sadrži barem prazan skup i sam skup S.

Najednostavnije algebre skupova su na primjer:

- algebra čiji su elementi prazan skup $\emptyset$ i sam skup S;
- familija svih podskupova skupa S tj. tzv. **partitivni skup**;
- familija svih konačnih podskupova skupa S zajedno s podskupovima koji su komplementi konačnih skupova.

Navedimo teorem kojim će biti opisana najvažnija svojstva algebre skupova.

Teorem 1.1. *Neka je $\mathcal{F}$ algebra skupova na nepraznom skupu S. Za proizvoljne skupove A, B, C iz te familije vrijedi:*

- *zakoni komutacije:*
  1. $A \cup B = B \cup A$
  2. $A \cap B = B \cap A$
- *zakoni distribucije:*
  3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- *ostali zakoni:*
  5. $A \cup \emptyset = A$
  6. $A \cap S = A$
  7. $A \cap A' = \emptyset$
  8. $A \cup A' = S$
  9. $S \neq \emptyset$

Tvrdnje teorema su neposredne poslijedice definicija spomenutih operacija. Ponekad je zgodno koristiti se ovim oznakama:

umjesto	pisati
$\cup$	$+$
$\cap$	$\cdot$
$\emptyset$	0
S	1

Koristeći te oznake napišite izreke gornjeg teorema. Koristeći te oznake izričemo sljedeći teorem.

Teorem 1.2. *Za bilo koje skupove A, B, C algebre skupova $\mathcal{F}$ vrijedi:*

1. $A \cdot 0 = 0$
2. $A + 1 = 1$

- *zakoni apsorpcije:*

3. $A(B + A) = A$
4. $A + AB = A$

- *De Morganovi zakoni:*

5. $c(A + B) = (cA)(cB)$
6. $c(AB) = c(A) + c(B)$
7. $A + B = c((c(A) \cdot c(B))$
8. $A \cdot B = c(c(A) + c(B))$
9. $A(c(A) + B) = A \cdot B$
10. $A + (c(A)B) = A + B$

- *zakoni asocijacije:*

11. $(A + B) + C = A + (B + C)$
12. $(AB)C = A(BC)$

Dokazi navedenih tvrdnji mogu se provoditi tako da koristimo prethodni teorem, jer su to sve posljedice tog teorema. Međutim pokušajte provesti direktan dokaz koristeći se definicijama operacija i jednakosti skupova. Za ilustraciju dokažimo De Morganov zakon pod brojem 5. Dokaz provodimo tako da dokazujemo da je svaki element skupa $c(A + B)$ ujedno i element skupa $c(A)c(B)$.

Dakle, neka je x u komplementu, $x \in c(A + B)$. To znači da x nije element skupa $A + B$. To sad znači da x nije niti iz A niti iz B. Prema tome je x iz $c(A)$ i iz $c(B)$. Dakle, x je element iz presjeka $c(A)c(B)$. Dokaz je u jednom smjeru proveden.

Sad pretpostavimo da je x iz presjeka $c(A)c(B)$ i dokazujemo da je iz $c(A + B)$. Dakle, neka je x iz $c(A)$ i iz $c(B)$. To znači da x nije element niti iz A niti iz B. To pak znači da x nije element iz unije $A + B$, a to znači da je x element iz $c(A + B)$ i dokaz je proveden.

Kartezijev produkt skupova. Polazeći od zadanih skupova pomoću operacija unija i presjek dobili smo nove skupove. Sada upoznajmo još jedan vrlo važan način izgradnje novih skupova.

Uređen par. Neka su a i b neki objekti. Novi objekt (a, b) nazivamo uređenim parom. Objekt a nazivamo prvim članom para ili prvom koordinatom, dok objekt b nazivamo drugim članom para ili drugom koordinatom. Dva uređena para (a, b) i (c, d) su jednaka onda i samo onda ako je $a = c$ i $b = d$, dakle:

$$(a, b) = (c, d) \iff (a = c \quad \text{i} \quad b = d)$$

Neka su A i B dva skupa. **Kartezijev produkt** $A \times B$ je skup svih uređenih parova, prvi član je iz skupa A, drugi iz skupa B.

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Prema definiciji kartezijeva produkta očito je $A \times B = B \times A$ onda i samo onda ako je $A = B$, kartezijev produkt općenito nije komutativan.

Teorem 1.3. *Za kartezijev produkt vrijede ovi zakoni distribucije:*

$$1.\ A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$
$$2.\ A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$
$$3.\ A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$$

Dokazi ovih tvrdnji su direktna posljedica definicija i lako se dokazuju.

Kartezijev produkt n skupova definiramo kao skup svih uređenih $n-$ torka, tj.

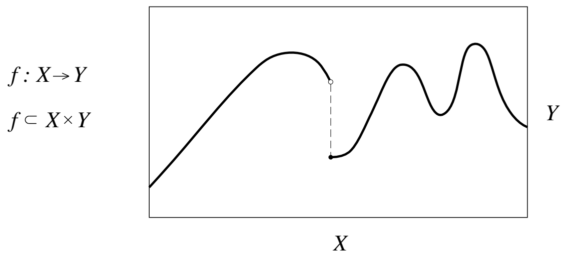
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

1.10. Funkcija

Pojam funkcije jedan je od najvažnijih u matematici. Zapravo, matematički način mišljenja u kojem dominantno mjesto ima pojam funkcije pokazuje se vrlo plodotvornim i danas posvuda prihvaćenim.

Mi ćemo definirati funkciju preko uređenih parova, dakle kao izvjestan podskup kartezijevog produkta skupova X i Y.

Neka su X i Y dva skupa. Funkcija $f : X \to Y$ je podskup skupa $X \times Y$, za koji vrijedi: za svaki $x \in X$ postoji samo jedan $y \in Y$ takav da uređen par (x, y) pripada podskupu $f \subset X \times Y$.



Sl. 1.3 Graf funkcije je podskup kartezijeva produkta

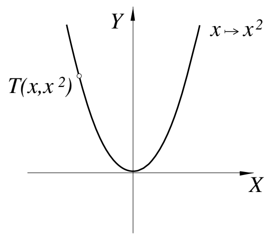
Skup svih takvih parova nazivamo **grafom funkcije**.

Skup X nazivamo **domenom** ili područjem definicije funkcije f.

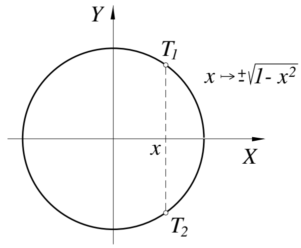
Skup Y nazivamo **kodomenom** ili područjem funkcijskih vrijednosti. Zapis $(x, y) \in f$ zamijenjujemo zapisom

$$y = f(x)$$

i kažemo da smo objektu x pridružili y, često pišemo $x \mapsto y$.



Sl. 1.4 Primjer funkcije



Sl. 1.5 Ovo pridruživanje nije funkcija

Za y kažemo da je funkcijska vrijednost funkcije f za vrijednost x ili x se preslikava na y. Tako na primjer svi parovi (x, x^2), x je bilo koji realan broj, definiraju kvadratnu funkciju. Tu funkciju češće zapisujemo ovako: $y = f(x) = x^2$. Za sve uređene parove (x, y) kažemo da čine graf funkcije f. Dakle parovi (x, x^2) čine graf kvadratne funkcije.

Primjer 1.6. Neka je S neprazan skup. Definirajmo na S funkciju koja će na elementima podskupa A od S imati vrijednost 1 a na njegovom komplementu vrijednost nula. Dakle, ako je $A \subset S$, onda definiranu funkciju nazivamo karakterističnom funkcijom podskupa A, označavamo ju sa χ_A i za nju vrijedi:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ ako je } x \in A \subset S; \\ 0, \text{ ako je } x \in S \setminus A. \end{cases}$$

Za karakterističnu funkciju vrijedi:

1. $\chi_{A\cup B}(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$
2. $\chi_{A\cap B}(x) = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x)$
3. $\chi_{A\setminus B}(x) = \chi_A(x)(1 - \chi_B(x))$
4. $\chi_{c(A)}(x) = 1 - \chi_A(x)$

Primjer 1.7. Funkciju definiranu na skupu S i s vrijednostima u istom skupu, koja svaki element preslikava na samog sebe, nazivamo **identitetom** ili **jediničnom funkcijom** na skupu S i označavamo s 1_S. Dakle,

$$1_S(x) = x, \quad \forall x \in S.$$

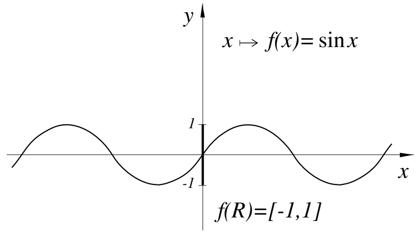
Jednakost funkcija. Za dvije funkcije f i g kažemo da su jednake ako su one jednake u smislu jednakosti dvaju skupova. Dakle, funkcije $f : A \to B$ i $g : C \to D$ su jednake onda i samo onda ako je : 1. $A = \mathrm{dom} f = \mathrm{dom} g = C$, 2. $B = \mathrm{kodom} f = \mathrm{kodom} g = D$ i 3. $f(x) = g(x)$ za svaki x. U tom slučaju pišemo $f = g$.

Slika skupa. Neka je zadana funkcija $f : X \to Y$ i neka je A podskup od X. Slika skupa A po funkciji f je skup

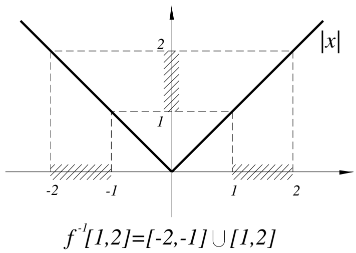
$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset Y.$$

Ako je B podskup od Y, $B \subset Y$, onda je inverzna slika od B skup

$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\} \subset X.$$



Sl. 1.6 Slika skupa



Sl. 1.7 Inverzna slika skupa

Surjekcija. Za svaku funkciju vrijedi:

$$f(X) \subset Y, \qquad f^{-1}(Y) = X.$$

Ako je $f(X) = Y$, onda za funkciju f kažemo da je **surjekcija** ili preslikavanje **na**.

Dakle, ako se na svaki element iz kodomene preslika barem jedan x iz domene, onda je to preslikavanje, tj. funkcija surjekcija.

Ako je $y \in Y$, onda inverznu sliku od y nazivamo **praslikom** od y. Jasno je, praslika od y može biti prazan skup jer se možda funkcijom f niti jedan x ne preslika na y. S druge strane, preslikavanje je surjektivno ako i samo ako je praslika svakog elementa iz kodomene neprazan skup.

Injekcija. Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je **injekcija** ako se različiti elementi iz domene preslikaju u različite elemente kodomene. Mogli bismo reći da je funkcija injekcija onda i samo onda ako je praslika svakog elementa y iz kodomene najviše jednočlan skup, tj. na y se može preslikati najviše jedan x iz domene. Često se kaže da je to $1 – 1$ (**jedan – jedan**) preslikavanje.

Bijekcija. Za funkciju $f : X \to Y$ kažemo da je **bijekcija** ili bijektivno preslikavanje ako je ono surjekcija i injekcija. Kažemo još da je bijekcija **jedan na jedan** preslikavanje.

Primjer 1.8. Nije teško provjeriti da je funkcija

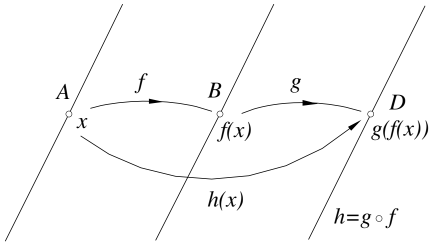
$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}, \qquad x \in \mathbf{R},$$

bijekcija sa skupa svih realnih brojeva $\mathbf{R}$ na otvoreni interval $I = (-1, 1)$. Očito je funkcija neparna, zatim vidimo da je $x < 1 + |x|$, tj. vrijednosti pripadaju intervalu I. To je striktno rastuća funkcija i za velike vrijednosti od x funkcijske vrijednosti su blizu broja 1.

Kompozicija funkcija. Neka su zadane dvije funkcije $f : A \to B$ i $g : C \to D$, kod kojih je kodomena funkcije f podskup domene funkcije g. Možemo definirati funkciju $h : A \to D$ tako da vrijedi

$$h(x) = g(f(x)) \text{ za svaki } x \in A.$$

Ovako definiranu funkciju nazivamo **kompozicijom funkcija** f i g i označavamo s $h = g \circ f$.



Sl. 1.8 Kompozicija funkcija

Kompozicija funkcija je **asocijativna**, tj. vrijedi

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Pretpostavimo zbog jednostavnosti zapisa da je

$$h : A \to B, \quad g : B \to C, \quad f : C \to D,$$

prema tome naznačene kompozicije su definirane. Ako je $x \in A$, onda je $f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$ što se podudara s $(f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$.

Inverzna funkcija. Neka je $f : A \to B$ bijekcija. Prema tome svakom elementu $x \in A$ pridružen je samo jedan element y iz skupa B, i svakom elementu iz B pridružen je samo jedan element iz A. Funkciju g definiranu sa skupa B na skup A za koju vrijedi:

$$g(y) = x \iff f(x) = y,$$

zovemo **inverznom funkcijom**. Za nju vrijedi $f(g(y)) = y$ i $g(f(x)) = x$, što zapisujemo pomoću kompozicija na sljedeći način:

$$f \circ g = 1_B, \qquad g \circ f = 1_A.$$

Inverznu funkciju funkcije f označavamo s f^{-1}. Dakle,

$$(f \circ g = 1_B \quad \wedge \quad g \circ f = 1_A) \quad \iff \quad g = f^{-1}.$$

1.11. Relacije

U 1.8. spomenuli dva načina zadavanja podskupa nekog skupa. Jednim od tih načina ističemo neko svojstvo $p(x)$ kojeg imaju neki elementi skupa S. Određen je podskup A skupa S koji sadrži samo one elemente za koje je $p(x)$ istinit sud. Dakle,

$$A = \{x \in S \mid p(x)\}.$$

Potpuno analogno možemo zadati podskup kartezijeva produkta skupova X i Y. U tu svrhu potrebno je zadati neko svojstvo — predikat $p(x, y)$ na produktu $X \times Y$. U podskup ulaze samo oni uređeni parovi (x, y) za koje je predikat $p(x, y)$ postaje istinit sud.

Relacija. Relacija ρ na skupu $X \times Y$ je njegov podskup. Takve relacije nazivamo **binarnim** relacijama. Podskup, tj. relaciju na skupu $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ nazivamo n **-arnom** relacijom. Ako je $n = 1$ onda govorimo o **unarnoj** relaciji.

Koristimo sljedeće načine zapisivanja binarnih relacija:

$$(x, y) \in \rho \qquad \Longrightarrow \qquad x \, \rho \, y,$$

(čitaj: x je u relaciji ρ sa y).

Mnoge binarne relacije definirane na $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ susrećemo vrlo često pa za njih imamo posebne nazive ili oznake. Takve su na primjer relacije:

$$=, \quad \leqslant, \quad <, \quad \geqslant, \quad > .$$

Korektan je zapis: $(5, 5) \in =$, $(3, 4) \in \leqslant$ ali je neuobičajen. Obično koristimo označavanje $x \rho y$, $5 = 5$, $3 \leqslant 4$.

Podskup, tj. **relaciju jednakosti** na $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, grafički možemo predočiti kao skup svih točaka ravnine čije su koordinate jednake. Svi takvi parovi su koordinate točaka pravca, $y = x$.

Relacijom $x \geqslant 5$ zadan je podskup ravnine koji sadrži sve točke (x, y) za čije koordinate vrijedi da je $x \geqslant 5$ i to je jedna zatvorena poluravnina.

Koji je podskup točaka ravnine ako koordinate (x, y), njegovih točaka zadovoljavaju relaciju $x^2 + y^2 - 1 = 0$? Kao što je poznato, jedino koordinate točaka jedinične kružnice sa središtem u ishodištu zadovoljavaju navedenu jednakost. Prema tome točke kružnice čine podskup tj. relaciju na $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

Prazan skup je podskup svakog skupa pa je prema tome to jedna posebna relacija koju nazivamo **praznom relacijom**. Takva je na primjer relacija $x^2 + y^2 + 1 = 0$ na $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Naime, ne postoji uređen par realnih brojeva koji pripada toj relaciji.

Jednadžbom $F(x, y) = 0$ zadana je neka relacija na $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Relaciji će pripadati samo oni parovi za koje je navedena jednadžba zadovoljena.

Domena i slika relacije. Neka je ρ relacija na $X \times Y$. Domena relacije ρ je skup svih $x \in X$ za koje postoji barem jedan $y \in Y$ takav da par (x, y) pripada relaciji ρ. Slika relacije ρ je skup svih $y \in Y$ za koje postoji barem jedan $x \in X$ takav da par (x, y) pripada relaciji ρ.

Funkcijske relacije. Podsjetimo na definiciju funkcije. Kazali smo da je to podskup skupa $X \times Y$ i pisali $f : X \mapsto Y$, $f \subset X \times Y$. Nadalje smo zahtjevali da vrijedi:

$$(x, y_1) \in f \quad \text{i} \quad (x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2.$$

Možemo reći da su funkcije specijalne relacije. Za funkcijske relacije vrijedi: *jednom x -u pripada samo jedan y tako da $(x, y) \in f$, tj. da je $y = f(x)$.*

Inverzna relacija. Neka je ρ relacija na $X \times Y$. Inverzna relacija relaciji ρ je relacija ρ^{-1} za koju vrijedi:

$$(x, y) \in \rho^{-1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (y, x) \in \rho.$$

Očito je $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$. Primjetimo, ako je relacija funkcijska, onda ne mora inverzna relacija biti funkcijska. $y = \sin x$ je funkcijska relacija. Svakom $x \in \mathbf{R}$ pridružen je samo jedan y. Sinusoidi, tj. grafu funkcije pripadaju točke $T(x, \sin x)$. Domena te relacije je skup $\mathbf{R}$, dok je slika interval $[-1, 1]$. Inverzna relacija je skup svih parova $(\sin x, x)$. Parovi $(1, \pi/2 + 2k\pi)$, $k \in Z$ pripadaju toj relaciji, dakle, to nije funkcijska relacija.

Specijalne binarne relacije. Navedimo neke binarne relacije na $A \times A$ koje vrlo često susrećemo.

1. **Relacija jednakosti**..... $=$, $(a,b) \in = \iff a = b$.
2. **Refleksivna relacija**..... ρ, $a \, \rho \, a$ za svaki $a \in A$.
3. **Univerzalna relacija**..... ω, $(a,b) \in \omega$ za svaki a i svaki b.
4. **Simetrična relacija**..... σ, $a \, \sigma \, b \implies b \, \sigma \, a$.
5. **Antisimetrična relacija**..... α, $a \, \alpha \, b$ i $b \, \alpha \, a \implies a = b$.
7. **Tranzitivna relacija**..... τ, $a \, \tau \, b$ i $b \, \tau \, c \implies a \, \tau \, c$.

Relacija ekvivalencije. . Relacija ekvivalencije ρ na skupu A je svaka relacija koja je:

1. **refleksivna**: $a \, \rho \, a$ za svaki $a \in A$,
2. **simetrična**: $a \, \rho \, b \implies b \, \rho \, a$,
3. **tranzitivna**: $a \, \rho \, b$ i $b \, \rho \, c \implies a \, \rho \, c$.

Relacija ekvivalencije je poopćenje relacije jednakosti. Očito je relacija jednakosti relacija ekvivalencije.

U skupu svih pravaca ravnine, relacija **paralelnosti**, $\|$ je relacija ekvivalencije. Podsjetimo da su dva pravca ravnine p i q paralelna ako je $p = q$ ili $p \cap q = \emptyset$. Relacija **okomitosti** na tom skupu nije relacija ekvivalencije, naime, to nije tranzitivna relacija.

U skupu svih trokuta neke ravnine relacije **sličnosti** i **sukladnosti** jesu ekvivalencije.

Klase ekvivalencije. Svi pravci ravnine koji su paralelni pravcu p čine jedan podskup skupa svih pravaca te ravnine. Za te pravce kažemo da čine jednu klasu međusobno ekvivalentnih (paralelnih) pravaca. Analogno postupamo i u općem slučaju. Odaberemo neki element skupa $a \in A$ na kojem je definirana relacija ekvivalencije ρ. Skup svih elemenata koji su ekvivalentni elementu a nazivamo klasom ekvivalencije. Taj skup označimo sa K_a,

$$K_a = \{x \in A \mid a \quad \rho \quad x\}.$$

Dvije klase ekvivalencije relacije ρ na skupu A ili su jednake ili su disjunktne. Skup A je unija disjunktnih skupova tj. klasa. Tu činjenicu izražavamo i tako da kažemo kako je izvršena **particija** tj. rastav skupa A na disjunktne dijelove. Članovi particije su neprazni disjunktni podskupovi čija unija daje cijeli skup A.

Lako se provjeri da svaka relacija ekvivalencije vrši jednu particiju skupa A. Međutim vrijedi i obrat, tj. svaka particija skupa A definira jednu relaciju ekvivalencije. Članovi particije su klase ekvivalencije te nove relacije ekvivalencije.

Prema tome zadavanje relacija ekvivalencije na skupu X isto je što i zadavanje particije na njemu.

Uređajna relacija. Relacija ρ na skupu X je **linearni uređaj** ako za svaka dva elementa $x, y \in X$ vrijedi:

1. $x \, \rho \, y$ ili $y \, \rho \, x$ ili $x = y$
2. vrijedi samo jedan odnos $x \, \rho \, y$ ili $y \, \rho \, x$ ili $x = y$
3. ako je $x \, \rho \, y$ i $y \, \rho \, z$ onda je $x \, \rho \, z$

Ako za relaciju ρ na skupu X vrijede samo 2. i 3., onda kažemo da je na X zadan **parcijalni uređaj.**

Prema 1. vidimo da su svaka dva elementa usporediva.

Uoči da iz 2. slijedi nikad nije $x\,\rho\,x$

Prema 3. uređajna relacija je tranzitivna.

Primjer 1.9. 1. Relacija $<$ (manje) na skupu $\mathbf{R}$ je linearni uređaj. Promotri relacije: $\leqslant$, $\geqslant$, $>$ na skupu realnih brojeva $\mathbf{R}$ i utvrdi koja gornja tri svostva one imaju.

2. U skupu $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ definirajmo uređaj

$$(x, y) < (x', y') \quad \text{ako} \quad a) \quad x < x', \quad b) \quad x = x', \quad y < y'.$$

Ako bi interpretirali parove kao koordinate točaka ravnine, onda po ovom uređenju točke uređujemo najprije prema apscisi, zatim ako imaju jednake apscise, onda prema ordinati.

3. U hrvatskom jeziku slova obično poredamo (uređujemo) abecedno. Pored abecednog uređaja navodimo i uređaj prema učestalosti.

1. a,b,c,d,...,u,v,z,ž. abecedni poredak
2. e,a,i,o,j,s,n,u,d,v,t,m,r (suglasnik),k,p,l,g,b,š,z,č,ć,lj,h,ž,nj,c,r (samoglasnik),dž,f.

Množenje relacija. Neka su zadane relacije na skupu X. To su dakle podskupovi skupa $X\times X$. Za dva podskupa definirali smo operacije kao što su unija $\cup$ i presjek $\cap$. U uskoj svezi s kompozicijom funkcija je množenje relacija. Neka su ρ, i σ dvije relacije na X. To su dakle podskupovi od $X\times X$. Definirajmo njihov produkt $\circ$.

$$\rho\circ\sigma = \tau, \qquad (a, b)\in\tau \implies (a, x)\in\rho, \quad (x, b)\in\sigma, \qquad a, b, x\in X.$$

ako takav x ne postoji onda je (a, b) ne pripada produktu relacija.

Usporedi ovo množenje s kopozicijom funkcija, $f\circ g = h$.

$$(a, f(a)), \quad (f(a), g(f(b)) = h(a)), \qquad a\mapsto f(a)\mapsto g(f(a)) = h(a), \qquad (a, h(a)).$$

Podsjetimo da je kompozicija funkcija asocijativna operacija. Lako se provjeri da je upravo definirano množenje relacija također asocijativna operacija. U teoriji relacija pridaje se veliki značaj proučavanju svojstava te asocijativne operacije.

1.12. Booleova algebra

Učinimo sljedeće pretpostavke: Neka su na skupu S definirane dvije binarne operacije; zbroj $+$ i produkt $*$ — dakle za svaka dva elementa iz S definiran je njihov zbroj $x+y$ i produkt $x*y$ i to su elementi iz S. Nadalje, neka je na S definirana jedna unarna operacija; komplement, s oznakom $'$ koja elementu x iz S pridružuje element x' iz S. Pretpostavimo još da S sadrži barem dva elementa. koja ćemo označiti s 0 i 1.

Ako je pri tome ispunjeno sljedećih 9 aksioma, onda uređenu šestorku $(S, +, *, ', 0, 1)$ nazivamo **Booleovom algebrom**.

Aksiomi Booleove algebre. Za svaki $x, y, z \in S$ vrijede svojstva:

- zakoni komutacije
  1. $x + y = y + x$
  2. $x * y = y * x$
- zakoni distribucije
  3. $x * (y + z) = x * y + x * z$
  4. $x + y * z = (x + y) * (x + z)$
- svojstvo 0, odnosno 1
  5. $x + 0 = x$
  6. $x * 1 = x$
- svojstva komplementa
  7. $x + x' = 1$
  8. $x * x' = 0$
  9. $0 \neq 1$

Primjer 1.10. Važni primjer Booleove algebre je algebra svih podskupova nepraznog skupa. Lako se provjeri da je uređena šestorka

$$(P(S), \cup, \cap, ', \emptyset, S)$$

koja se sastoji od partitivnog skupa $P(S)$, operacija unije, presjeka i komplementa, zatim praznog skupa i skupa S jedna Booleova algebra. Ulogu nule ima prazan skup, a jedinice skup S. Vidi *algebra skupova*.

Primjer 1.11. Najednostavnija Booleova algebra je algebra koja ima samo dva elementa, $S = \{0, 1\}$. Tablicama (zbrajanja, množenja i operacija komplementiranje) definiramo te operacije.

x	y	$x + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

x	y	$x * y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

x	x'
0	1
1	0

Interpretirajmo 0 kao lažan sud, a 1 kao istinit sud. Operaciju $+$ interpretiramo kao disjunkciju $\vee$, operaciju množenja $*$ kao konjunkciju $\wedge$, unarna operacija neka bude negacija $'$, vidi *logičke operacije*. Tu algebru možemo interpretirati kao algebru dva suda, istinitog i lažnog. Moguća je i interpretacija pomoću dvaju električkih prekidača.

Primjer 1.12. Neka su x, y, z bilo koji sudovi, 0 neka je lažan a 1 istinit sud. Lako se provjeri da sudovi s pripadnim operacijama čine Booleovu algebru.