1.

Euklidski prostori

1.1. Vektorski prostor $\mathbf{R}^n$

Skup svih uređenih n-torki realnih brojeva označavamo s $\mathbf{R}^n$:

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbf{R}\}.$$

Jednu takvu n-torku označavamo kratko s $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ i nazivamo još *vektorom* iz prostora $\mathbf{R}^n$. Objasnimo zašto.

Na skupu $\mathbf{R}^n$ definirana je operacija zbrajanja $+ : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ na sljedeći način. Ako su $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektori iz $\mathbf{R}^n$, onda je njihov zbroj po definiciji jednak:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

Uz operaciju zbrajanja vektora, na ovom skupu bit će definirana i operacija množenja vektora skalarom, $\cdot : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ po pravilu

$$\alpha \cdot \mathbf{x} = \alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) := (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n), \qquad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Skalari su najčešće elementi polja realnih brojeva.

Uz te dvije operacije prostor $\mathbf{R}^n$ postaje vektorski prostor.

Prostor $\mathbf{R}^n$ kao vektorski prostor

Uređena trojka $(\mathbf{R}^n, +, \cdot)$ skupa $\mathbf{R}^n$, te dvije operacije, *zbrajanja vektora* $+$ i *množenja vektora skalarom* $\cdot$ čini **vektorski prostor**. U tom prostoru vrijede sljedeća svojstva:

VP_1 (komutativnost zbrajanja)
$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n)\ \ \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$

VP_2 (asocijativnost zbrajanja)
$(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{R}^n)\ \ \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$

VP_3 (postojanje nul vektora)
$(\exists 0 \in \mathbf{R}^n)(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n)\ \ \mathbf{x} + 0 = 0 + \mathbf{x} = \mathbf{x}$

VP_4 (postojanje suprotnog vektora)
$(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n)(\exists \mathbf{x}' \in \mathbf{R}^n)\ \ \mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{x}' + \mathbf{x} = 0$

VP_5 (kompatibilnost množenja)
$(\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R})(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n)\ \ \alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$

VP_6 (distributivnost množenja prema zbrajanju u $\mathbf{R}^n$)
$(\forall \alpha \in \mathbf{R})(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n)\ \ \alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$

VP_7 (distributivnost množenja prema zbrajanju u $\mathbf{R}$)
$(\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R})(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n)\ \ (\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$

VP_8 (netrivijalnost množenja)
$(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n)\ \ 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$

Prostor $\mathbf{R}^n$ ima dimenziju n. Standardnu bazu tog prostora čine vektori:

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 0, 1).$$

To je skup linearno nezavisnih vektora i svaki vektor iz prostora $\mathbf{R}^n$ njihova je linearna kombinacija jer vrijedi:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n.$$

1.2. Skalarni produkt i norma

U prostoru $\mathbf{R}^n$ možemo uvesti skalarni produkt. Prisjetimo se njegove definicije:

$\mathbf{R}^n$ kao unitarni prostor

Skalarni produkt na vektorskom prostoru $\mathbf{R}^n$ je svaka funkcija $(\ |\ ) : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ koja paru vektora $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ pridružuje realni broj $(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ a koja ima sljedeća svojstva [1]:

SP_1 $(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}) \geqslant 0$, $(\mathbf{x} \mid \mathbf{x}) = 0 \iff \mathbf{x} = 0$ (pozitivnost)
SP_2 $(\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \mid \mathbf{z}) + (\mathbf{y} \mid \mathbf{z})$ (distributivnost prema zbrajanju)
SP_3 $(\alpha\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{x} \mid \mathbf{y})$ (homogenost)
SP_4 $(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = (\mathbf{y} \mid \mathbf{x})$ (komutativnost).

Prostor $\mathbf{R}^n$ na kojem je definiran skalarni produkt nazivamo **unitarnim prostorom**.

U prostoru $\mathbf{R}^n$ skalarni produkt može se definirati na više načina. Izdvojit ćemo najvažniji primjer:

Primjer 1.1. **Standardni** ili **euklidski skalarni produkt** u $\mathbf{R}^n$ definira se ovako. Neka su $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ bilo koja dva vektora iz $\mathbf{R}^n$. Njihov skalarni produkt je

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) := x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n. \tag{1}$$

Lako se provjere gore spomenuti uvjeti skalarnog produkta i prema tome ovakav način množenja vektora je zaista skalarni produkt. Ako bismo množili vektor $\mathbf{x}$ sam sa sobom dobili bi:

$$(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 \geqslant 0. \tag{2}$$

Kao umnožak bismo dobili 0 jedino ako je $\mathbf{x} = 0$. Broj

$$||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

nazivamo **normom vektora x**, preciznije **euklidskom normom.**

Euklidski prostor E^n

Prostor $\mathbf{R}^n$ na kojem je definiran euklidski skalarni produkt i iz njega izvedena euklidska norma nazivamo **euklidski prostor** i označavamo s E^n.

Primjer 1.2. Neka su $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ pozitivni realni brojevi. Uvjerite se da je formulom

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) := \alpha_1 x_1 y_1 + \dots + \alpha_n x_n y_n$$

definiran skalarni produkt na $\mathbf{R}^n$.

Teorem 1.1. *U svakom unitarnom prostoru vrijedi nejednakost Cauchy-Schwartz-Buniakovskog (kratko: CSB nejednakost):*

$$|(\mathbf{x} \mid \mathbf{y})| \leqslant \|x\| \, \|y\|. \tag{3}$$

Dokaz. Promotrimo kvadratnu funkciju

$$f(t) = (t\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid t\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \mid \mathbf{x})t^2 + 2(\mathbf{x} \mid \mathbf{y})t + (\mathbf{y} \mid \mathbf{y}).$$

Ona poprima samo nenegativne vrijednosti, pa zato njezina diskriminanta nije pozitivna (inače bi funkcija imala dvije različite realne nul-točke, pa bi porimala i negativne vrijednosti). Zato mora biti:

$$4(\mathbf{x} \mid \mathbf{y})^2 - 4(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})(\mathbf{y} \mid \mathbf{y}) \leqslant 0,$$

a to je upravo (3).

Izaberemo li za skalarni produkt euklidski skalarni produkt definiran s (1), onda iz Teorema 1.1 slijedi Cauchyjeva nejednakost:

Teorem 1.2. *Neka su* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *i* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *realni brojevi. Vrijedi:*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big).$$

Ako su svi $b_k = 1$, onda iz te relacije dobivamo:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)^2 \leqslant n \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big).$$

Kazali smo da je formulom (2) definirana (euklidska) norma na prostoru $\mathbf{R}^n$. Međutim, na tom prostoru mogu se definirati i druge norme. Ponovimo općenitu definiciju.

$\mathbf{R}^n$ kao normirani prostor

Norma na prostoru $\mathbf{R}^n$ je svaka funkcija $\|\ \| : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ koja zadovoljava sljedeća svojstva:

N_1 $\|\mathbf{x}\| \geqslant 0$, $\|\mathbf{x}\| = 0 \iff \mathbf{x} = 0$ (pozitivnost)

N_2 $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$ (pozitivna homogenost)

N_3 $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (nejednakost trokuta).

Prostor $\mathbf{R}^n$ na kojem je definirana norma zovemo **normiranim prostorom**.

Pokažimo da je $\mathbf{R}^n$ uz euklidsku normu uistinu normiran prostor. Dokazat ćemo zapravo općenitiji rezultat.

Teorem 1.3. *Neka je* $(\ |\ )$ *bilo koji skalarni produkt na* $\mathbf{R}^n$. *Onda je formulom*

$$\|x\| := \sqrt{(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})}$$

definirana norma na $\mathbf{R}^n$.

Dokaz. Prema svojstvima skalarnog produkta slijedi:

N_1: Ako je $\mathbf{x} \neq 0$, onda je $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) \geqslant 0$, dakle i $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})} \geqslant 0$. Također vidimo da $\|\mathbf{x}\| = 0$ vrijedi ako i samo ako je $\mathbf{x} = 0$.

N_2: $\|\alpha\mathbf{x}\| = \sqrt{(\alpha\mathbf{x} \mid \alpha\mathbf{x})} = \sqrt{\alpha^2(\mathbf{x} \mid \mathbf{x})} = |\alpha|\,\|\mathbf{x}\|$.

N_3: Po CSB nejednakosti, imamo

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y}|\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}|\mathbf{y}) + (\mathbf{y}|\mathbf{y}) \\ &\leqslant (\mathbf{x}|\mathbf{x}) + 2\sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})(\mathbf{y}|\mathbf{y})} + (\mathbf{y}|\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 = (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2\end{aligned}$$

Zadatak. Dokaži da euklidska norma ima sljedeće svojstvo:

$$\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|^2 = 2 \cdot (\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2).$$

Interpretiraj tu jednakost pomoću stranica, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ i dijagonala, $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{x}-\mathbf{y}$, paralelograma.

Može se dokazati da norma ima navedeno svojstvo (tzv. svojstvo paralelograma) ako i samo ako je definirana pomoću nekog skalarnog produkta.

Teorem 1.4. *Neka su a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n realni brojevi. Tada vrijedi sljedeća nejednakost poznata pod nazivom* **relacija trokuta***:*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\Big)^{\frac{1}{2}} + \Big(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Dokaz. Ova je nejednakost upravo nejednakost trokuta za euklidsku normu.

$* \ * \ *$

Vrlo često se umjesto oznake za skalarni produkt vektora koristi "točka" između njih,

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{y}.$$

$* \ * \ *$

Zadani su linearno nezavisni vektori $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ u E^3. Pokazimo da postoje tri vektora $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ takva da vrijedi:

$$\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_j = \delta_{ij},$$

gdje je δ_{ij} Kroneckerov simbol:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{za } i=j, \\ 0, & \text{za } i\neq j. \end{cases}$$

Znamo da je mješoviti produkt $V=(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2)\cdot\mathbf{a}_3$ različit od nule, jer su vektori linearno nezavisni. Definirajmo tražene vektore jednakostima:

$$\mathbf{b}_1 := \frac{1}{V}(\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3),\quad \mathbf{b}_2 := \frac{1}{V}(\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1),\quad \mathbf{b}_3 := \frac{1}{V}(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2).$$

Provjeri da ovi vektori imaju tražena svojstva. Nadalje, mješoviti produkt vektora $\mathbf{b}_i$ jednak je $\dfrac{1}{V}$, a vektore $\mathbf{a}_i$ možemo izraziti pomoću vektora $\mathbf{b}_i$ potpuno analognim izrazima u kojima su vektori $\mathbf{a}_i$ i $\mathbf{b}_j$ zamijenili mjesta.

Vektori $\mathbf{b}_i$ jednoznačno su određeni. Jer, na primjer, iz

$$\mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_j = \delta_{ij} = \mathbf{a}_i\cdot\mathbf{c}_j$$

slijedilo bi $\mathbf{a}_i\cdot(\mathbf{b}_j-\mathbf{c}_j)=0$. To znači da je svaki $\mathbf{a}_i$ okomit na $\mathbf{b}_j-\mathbf{c}_j$. To je moguće samo ako je $\mathbf{b}_j=\mathbf{c}_j$ $(j=1,2,3)$, tj. vektori $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ jednoznačno su određeni. Vektor $\mathbf{b}_1$ okomit je na ravninu određenu vektorima $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, analogno vrijedi za vektore $\mathbf{b}_2$ i $\mathbf{b}_3$. Ako je sustav vektora $\mathbf{a}_i$ ortonormiran, onda se sustav vektora $\mathbf{b}_i$ podudara s njim.

Može se dokazati (ali ne jednostavno) da ista tvrdnja vrijedi i za prostor E^n: za zadanu bazu $\{\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n\}$ postoji i jednoznačno je određena baza $\{\mathbf{b}_1,\ldots,\mathbf{b}_n\}$ traženih svojstava. Za takve dvije baze kažemo da su **recipročne.** Ako jedan vektor prikažemo u bazi $(\mathbf{a}_i)$ i u bazi $(\mathbf{b}_j)$ onda su od interesa veze među komponentama tog vektora u takva dva sustava. Te veze su polazišta za tzv. tenzorski račun koji se pak nezaobilazno koristi u teoriji relativnosti.

1.3. Metrički prostori

U primjenama matematike vrlo je važno znati koliko su dva objekta udaljena bilo međusobno ili od nekog trećeg. Koliko su udaljene funkcije sinus i kosinus? Možda vam se ovo pitanje čini besmislenim. Međutim, neće biti tako. Koliko su udaljene dvije točke koje se nalaze na valjku, a nisu na njegovoj izvodnici (za putnika koji smije putovati samo površinom valjka)? Koliko su udaljene dvije točke na sferi (Zemlji)? Pri rješavanju geometrijskih problema često nas zanima udaljenost dviju točaka. Koje su točke udaljene od točke S manje od zadanog broja r? Upravo o ovim i njima sličnim pitanjima nalazimo odgovore u takozvanim metričkim prostorima.

Metrički prostori su neprazni skupovi u kojima je moguće definirati **udaljenost**, tj. **metriku**. Metrika se definira kao funkcija koja ima svojstva koja mi očekujemo, i na koja smo navikli da ima uobičajena udaljenost među točkama. Zato ćemo najprije povezati vektore s točkama prostora $\mathbf{R}^n$.

Svaki vektor u $\mathbf{R}^n$ ima svoje komponente u odnosu na odabranu bazu $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Komponente vektora $\mathbf{x}$ su redom članovi uređene n-torke brojeva $(x_1, \dots, x_n)$. Te brojeve proglasimo koordinatama točke T. Mi na taj način uspostavljamo uzajamno jednoznačnu korespodenciju, tj. bijekciju između vektora i točaka;

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \longleftrightarrow T(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Specijalno, nul-vektoru je pridružena točka $O(0, 0, \dots, 0)$ koju nazivamo ishodištem koordinatnog sustava. Dakle, vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ pridružujemo točku T za koju je

$$\overrightarrow{OT} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \dots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Udaljenost

Neka su zadane bilo koje dvije točke $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $B(y_1, \dots, y_n)$. Definirajmo udaljenost tih točaka.

$$d(A, B) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}. \tag{1}$$

Ovim izrazom smo definirali jednu funkciju d koja svakom uređenom paru točaka pridružuje broj koji nije negativan. Tu funkciju obično nazivamo udaljenošću ili metrikom, preciznije, riječ je o **euklidskoj metrici**.

Metrika na $\mathbf{R}^n$ može se definirati i općenitije.

$\mathbf{R}^n$ kao metrički prostor

Metrika na prostoru $\mathbf{R}^n$ je svaka funkcija $d : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+$, sa svojstvima

M_1 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geqslant 0$, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$ (pozitivnost)

M_2 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ (simetričnost)

M_3 $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leqslant d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ (nejednakost trokuta).

Prostor $\mathbf{R}^n$ na kojem je definirana metrika nazivamo **metričkim prostorom**.

Pokažimo da euklidska metrika definirana s (1) ima ova svojstva. Dokazat ćemo zapravo općenitiji rezultat:

Teorem 1.5. *Neka je* $\| \ \|$ *norma u vektorskom prostoru* $\mathbf{R}^n$. *Tada je formulom*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

definirana metrika u $\mathbf{R}^n$.

Dokaz. Svojstva M_1 i M_2 slijede direktno iz odgovarajućih svojstava norme. Pokažimo nejednakost trokuta. Vrijedi $\mathbf{x}-\mathbf{z} = (\mathbf{x}-\mathbf{y})+(\mathbf{y}-\mathbf{z})$. Prema nejednakosti trokuta za normu slijedi:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + \|\mathbf{y} - \mathbf{z}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z}).$$

* * *

Metriku smo definirali kao udaljenost među vektorima prostora $\mathbf{R}^n$. Međutim, umjesto prostora $\mathbf{R}^n$, možemo uzeti bilo koji drugi neprazni skup X. Funkcija d koja zadovoljava svojstva M_1–M_3 je metrika na X, a (X, d) nazivamo metričkim prostorom.

Navedimo nekoliko primjera metričkih prostora

1. Ako je X bilo koji neprazni skup možemo u njemu definirati tzv. **trivijalnu metriku**. Naime, neka je udaljenost bilo kojih dviju različitih točaka (elemenata) jednaka 1, a udaljenost točke od same sebe neka je 0. Lako provjerimo da je to metrika i skup X postaje metrički prostor.

2. Skup realnih brojeva postaje metrički prostor ako udaljenost dva realna broja definiramo pomoću apsolutne vrijednosti:

$$d(x, y) = |x - y|, \qquad x, y \in \mathbf{R}.$$

Podsjetimo da funkcija apsolutna vrijednost ima svojstvo

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|,$$

pa je onda

$$|x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leqslant |x - y| + |y - z|.$$

3. Uobičajena udaljenost u ravnini ili u trodimenzionalnom prostoru je metrika:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

4. U ravnini možemo definirati udaljenost relacijom

$$d(A, B) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

5. Ako je $d(x, y)$ metrika na skupu X, onda su metrike i d_1 i d_2:

$$d_1(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

$$\begin{aligned} d_2(x, y) &= d(x, y) \quad \text{ako je} \quad d(x, y) < 1 \\ &= 1 \qquad\quad\ \ \text{ako je} \quad d(x, y) \geqslant 1 \end{aligned}$$

6. Neka je F skup svih neprekinutih funkcija definiranih na intervalu $[a,b]$. Definirajmo udaljenost dviju funkcija izrazom

$$d(f,g) = \max|f(x) - g(x)|, \quad x \in [a,b].$$

7. U skupu F iz prethodnog primjera definirajmo metriku:

$$d(f,g) = \left[\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}.$$

8. Skupu $\mathbf{R}$ realnih brojeva dodajmo još dva simbola ∞ i $-\infty$. Taj novi skup označimo $\overline{\mathbf{R}}$. Neka je $\operatorname{arc\,tg}(+\infty) = \dfrac{\pi}{2}$, $\operatorname{arc\,tg}(-\infty) = \dfrac{\pi}{2}$

$$d(x,y) = |\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y|, \quad x,y \in \overline{\mathbf{R}}$$

je metrika.

* * *

Mi ćemo se u nastavku najčešće baviti euklidskim prostorom. Udaljenost među vektorima definira i udaljenost među njima pridruženim tockama. Ponovimo svojstva metrike, zapisana na taj drugi način. Za bilo koje tri točke u $\mathbf{R}^n$:

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad B(y_1, y_2, \ldots, y_n), \quad C(z_1, z_2, \ldots, z_n).$$

vrijedi:

1. $d(A,B) \geqslant 0, \quad d(A,B) = 0 \iff A = B,$
2. $d(A,B) = d(B,A),$
3. $d(A,B) \leqslant d(B,C) + d(C,A).$

Euklidski prostor

Euklidskog prostora $\mathbf{R}^n$ je poopćenje našeg uobičajenog dvodimenzionalnog i trodimenzionalnog prostora u kojem definiramo i koristimo se pravokutnim koordinatnim sustavom. U njima je posebno istaknuta jedna točka (obično je označena kao O i to je tzv. ishodište koordinatnog sustava).

Euklidski prostor

Euklidski prostor E^n je vektorski prostor $\mathbf{R}^n$

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

u kojem su definirani euklidski skalarni produkt, euklidska norma, euklidska metrika. Njihove su definicije po redu:

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n;$$

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}|\mathbf{x})} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2};$$

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2},$$

Pri tom je $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - 0\|$ duljina vektora $\mathbf{x}$, to je ujedno udaljenost vektora $\mathbf{x}$ od vektora 0. Provedemo li identifikaciju između točaka i vektora:

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n) \longleftrightarrow \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

možemo euklidsku udaljenost smatrati udaljenošću među točkama.

Okomiti vektori

Kažemo da su dva vektora okomita, ako je njihov skalarni produkt jednak nuli:

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} \perp \mathbf{y}.$$

Uoči da je vektor 0 okomit na svaki vektor. CSB nejednakost

$$|(\mathbf{x}|\mathbf{y})| \leqslant \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$$

možemo zapisati i na sljedeći način

$$-1 \leqslant \frac{(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} \leqslant 1.$$

Definirajmo kut φ među vektorima $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ formulom:

$$\cos\varphi = \frac{(\mathbf{x}|\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|}.$$

Ta je veličina prema dokazanom po apsolutnojn vrijednosti $\leqslant 1$, pa je definicija dobra. Za ovako definiran kut vrijedi

$$(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cos\varphi.$$

1.4. Topološki prostori

U dosadašnjem smo izlaganju spominjali više različitih vrsta prostora: unitarni, normirani, metrički. Pritom je svaki unitarni prostor normirani, svaki normirani prostor je metrički. Sljedeća stepenicu u ovom nizu činit xhe **topološki prostori**. Proučavanje topoloških prostora izlazi izvan okvira ovog programa. Zadovoljit ćemo se da istaknemo samo ključne pojmove i definicije ove klase prostora.

Otvorene i zatvorene kugle u metričkom prostoru

Neka je zadan metrički prostor X s metrikom d. Ako je $S \in X$ i r pozitivan realan broj, onda se skup

$$\{T \in X : d(S,T) < r\}$$

naziva **otvorena kugla** prostora X, a

$$\{T \in X : d(S,T) \leqslant r\}$$

se naziva **zatvorena kugla** prostora X. Točku S nazivamo središtem kugle, a r polumjerom kugle.

Navedimo nekoliko važnih pojmova:

Otvoreni skupovi i okoline

Podskup A metričkog prostora X je **otvoren skup** ako oko svake svoje točke sadrži otvorenu kuglu kojoj je ta točka središte.

Otvorena okolina točke $x \in X$ je svaki otvoreni skup koji sadrži tu točku.

Okolina točke $x \in X$ je svaki podskup od X koji sadrži otvorenu okolinu te točke.

Podskup F prostora X je **zatvoren** ako je njegov komplement otvoren.

Istaknimo bez dokaza neka osnovna svojstva okolina. Pokušajte izvesti dokaz sami!

Teorem 1.6. *Neka je $O(a)$ skup svih okolina točke a metričkog prostora X. Za taj skup vrijedi:*

1. *Ako je U okolina točke a i ako je $U \subset V \subset X$, onda je i V okolina točke a.*
2. *Presjek dviju okolina točke a je okolina te točke.*
3. *Točka pripada svakoj svojoj okolini.*
4. *U svakoj okolini točke nalazi se okolina te točke koja je okolina svake svoje točke.*

* * *

Ovi pojmovi izvedeni u metričkom prostoru služe nam za definiciju topoloških prostora.

Topološki prostori

Na skupu X je zadana **topologija** ako je svakoj njegovoj točki pridružen neprazan skup podskupova (okolina te točke) za koje vrijedi:

T_1 : Svaki podskup od X koji sadrži okolinu točke i sam je okolina te točke.

T_2 : Presjek svakih dviju okolina točke je okolina te točke.

T_3 : Točka pripada svakoj svojoj okolini.

T_4 : Svaka okolina sadrži okolinu te točke koja je okolina svake svoje točke.

Skup X na kojem je zadana topologija naziva se **topološki prostor**.

Otvoreni skup topološkog prostora je svaki njegov podskup koji je okolina svake svoje točke.

Mi se nećemo baviti općim topološkim prostorima, iako su oni prirodni okvir za proučavanje pojmova konvergencije, limesa i neprekinutosti.

Prema Teoremu 1.6, vidimo da je svaki metrički prostor ujedno i topološki prostor.

2.

Funkcije više varijabli

2.1. Primjeri funkcija više varijabli

Funkcije koje ćemo proučavati bit će zadane na nekom podskupu od E^n s vrijednostima u skupu realnih brojeva. Najčešće će to biti funkcije definirane na E^2, odnosno E^3. Za označavanje funkcija više varijabli koristimo se uobičajenim oznakama.

$$f : E^n \mapsto \mathbf{R}, \quad T \mapsto f(T) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}.$$

Uočite da smo koristili oznaku $f(T)$ a zapravo se misli na

$$f(T) = f((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

tj. preslikavamo točku T čije su koordinate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ u broj $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Primjer 2.1. Spomenimo dvije funkcije definirane na E^2, a koje nazivamo prva, odnosno druga projekcija. To su funkcije:

$$(x, y) \mapsto x, \qquad (x, y) \mapsto y.$$

Vrlo lako možemo poopćiti te funkcije na prostor E^n. Tako će i-ta projekcija biti funkcija

$$(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \mapsto x_i.$$

Vidimo da su takve funkcije definirane na cijelom skupu E^n, a funkcijske vrijednosti mogu biti svi realni brojevi.

Primjer 2.2. Polinomi u dvije varijable su funkcije

$$(x, y) \mapsto P(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + \ldots + a_n(x)y^n$$
$$= b_0(y) + b_1(y)x + \ldots + b_m(y)x^m.$$

To su polinomi u varijabli y s koeficijentima koji su za sebe polinomi u x. Moguće je reći i obrnuto, to su polinomi u varijabli x a čiji su koeficijenti opet polinomi u y. Polinomi drugog stupnja u varijablama x i y, odnosno u varijablama x, y, z, jesu:

$$P(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F,$$

$$P(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + ax + by + cz + d.$$

Racionalne funkcije u dvije varijable definiramo kao kvocijente polinoma u dvije varijable.

Područje definicije

Prirodno područje definicije funkcije više varijabli zadane eksplicitnom formulom jest onaj skup u E^n za koji navedene formule imaju smisla.

Navedimo nekoliko primjera.

Primjer 2.3. Odredimo (prirodna) područja definicije za sljedeće funkcije koje su kompozicija funkcije više varijabli i realne funkcije realne varijable:

1. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,
2. $f(x, y) = \sqrt{\cos(x^2 + y^2)}$,
3. $f(x, y, z) = \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$,
4. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$.

1. Za prvu funkciju mora biti

$$1 - x^2 - y^2 \geqslant 0, \qquad x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

U području definicije su sve točke iz kruga kojem je središte u ishodištu i polumjer 1.

Ako skup svih uređenih trojki realnih brojeva $(x, y, f(x, y))$ reprezentiramo točkama čije su to upravo koordinate dobivamo plohu polukugle. U tom smislu i kažemo da je ploha polukugle graf te funkcije. Uoči da su funkcijske vrijednosti iz intervala $[0, 1]$.

2. U drugom primjeru točke iz područja definicije moraju zadovoljavati relaciju:

$$\cos\left(x^2 + y^2\right) \geqslant 0 \quad \Rightarrow \quad 2k\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\frac{\pi}{2}.$$

Prema tome je područje definicije:

a) točke unutar kruga polumjera $\sqrt{\pi/2}$, sa središtem u ishodištu;

b) točke unutar kružnih prstena kojem je nutarnji polumjer $\sqrt{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}}$, a vanjski $\sqrt{(2k+3)\dfrac{\pi}{2}}$, $k = 1, 2, \ldots$, a središta su u ishodištu.

3. Području definicije pripadaju sve točke prostora osim ishodišta; funkcijske vrijednosti su svi pozitivni realni brojevi.

4. Područje definicije je E^2, dok su funkcijske vrijdnosti iz intervala $(0,1]$.

2.2. Krivulje

Funkciju više varijabli definirali smo kao preslikavanje iz skupa E^n u skup $\mathbf{R}$. Promotrimo sad preslikavanja iz $\mathbf{R}$ u E^n! Ta će preslikavanja definirati *krivulje* u prostoru E^n.

Neka je područje definicije preslikavanja zatvoreni interval $I = [a, b]$ realnih brojeva a funkcijske vrijednosti u skupu E^n. Radi lakšeg zapisa, promotrimo preslikavanje zatvorenog intervala realnih brojeva u skup E^3. Broju t iz spomenutog intervala pripada točka čije su koordinate $(x(t), y(t), z(t))$. Time je definirano preslikavanje $[a, b] \to E^3$ koje je opisano formulama

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \qquad t \in [a, b]. \\ z = z(t), \end{cases}$$

Za skup svih točaka $T(x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$ kažemo da pripadaju krivulji.

Ovaj opis krivulje nije potpuno precizan. Kasnije će biti navedeni uvjeti kojima mora udovoljiti ovo preslikavanje pa da ovaj skup bude nalik na krivulju o kojoj imamo intuitivnu predodžbu.

* * *

Navedimo nekoliko primjera takvih funkcija.

Primjer 2.1. Pravac. Jednadžba pravca koji prolazi točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$ i ima smjer vektora $\mathbf{s}$ čije su komponente (a, b, c) je:

$$x = x_0 + at, \quad y = y_0 + bt, \quad z = z_0 + ct, \qquad t \in \mathbf{R}$$

u vektorskom obliku

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + t\mathbf{s}.$$

gdje smo označili s $\mathbf{r}(t) = (x, y, z)$ radij vektor bilo koje točke pravca, s $\mathbf{r}(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ radij vektor jedne istaknute točke, a s $\mathbf{s} = (a, b, c)$ vektor smjera pravca.

Primjer 2.2. Cilindrična spirala. Jednadžba cilindrične spirale je:

$$x = r\cos t, \quad y = r\sin t, \quad z = at, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Vidimo da vrijedi $x^2 + y^2 = r^2$, pa projekcija bilo koje točke krivulje na ravninu XOY pripada kružnici polumjera r sa središtem u ishodištu. Točka krivulje nalazi se pak na površini valjka.

U ovakvim situacijama varijablu često nazivamo parametrom i govorimo o parametarskim jednadžbama krivulje. Podsjetimo da su parametarske jednadžbe elipse, odnosno hiperbole dane izrazima:

$$\begin{aligned} x &= a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad z = 0, \qquad t \in \mathbf{R}; \\ x &= a\,\mathrm{ch}\, t, \quad y = b\,\mathrm{sh}\, t, \quad z = 0, \qquad t \in \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Uoči da se u tim jednadžbama pojavljuje *jedan* parametar t.

* * *

Spomenimo već sada da će parametarske jednadžbe ploha sadržavati dva parametra. Parametarske jednadžbe plohe će biti jednadžbe oblika

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v).$$

Parametri su u, v su realni brojevi.

Primjer 2.3. Ravnina. Podsjetimo da su parametarske jednadžbe ravnine (*dva* parametra)

$$x = x_0 + a_1 u + b_1 v, \quad y = y_0 + a_2 u + b_2 v, \quad z = z_0 + a_3 u + b_3 v$$

pri čemu su u i v po volji odabrani realni brojevi. To je ravnina koja prolazi točkom $T_0(x_0, y_0, z_0)$, a vektor njezine normale je

$$\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3).$$

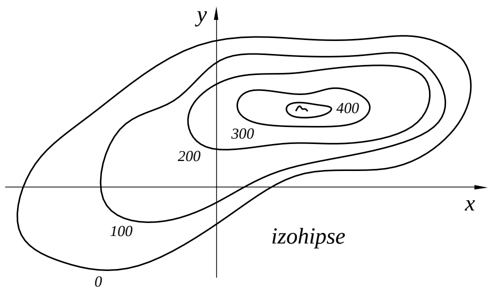
2.3. Geometrijski prikaz funkcija više varijabli. Nivo prostori, nivo plohe, nivo krivulje

Neka je zadana funkcija $z = f(x, y)$ na podskupu D ravnine XOY. Skup svih točaka $T(x, y, f(x, y))$ u prostoru E^3 je graf te funkcije. Od posebnog su značaja krivulje koje pripadaju tom grafu i to one koje nastaju presjecanjem tog grafa s ravninama paralelnim s koordinatnom ravninom $x = 0$ ili $y = 0$ ili $z = 0$. Jednadžbe takvih krivulja su

$$\begin{aligned} &1. \quad x = x_0, \quad z = f(x_0, y); \\ &2. \quad y = y_0, \quad z = f(x, y_0); \\ &3. \quad z = z_0, \quad z_0 = f(x, y). \end{aligned}$$

Podsjetimo da je jednadžbom $x = x_0$ zapravo zadana ravnina okomita na os apscisa, isto tako je i s $y = y_0$. Možemo dakle reći da su to krivulje koje se nalaze i na grafu funkcije i u pripadnoj ravnini.

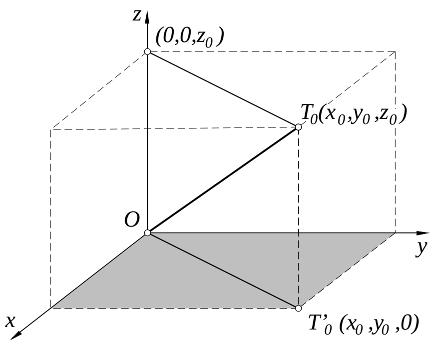
Ravnina $z = z_0$ je horizontalna ravnina. Kad s njom presiječemo plohu $z = f(x, y)$, dobit ćemo nivo krivulje (izohipse – krivulje iste visine). Podsjeti se uporabe izohipsi pri crtanju zemljopisnih karata ili modeliranju reljefa.



Sl. 2.1. Nivo krivulje su projekcije na koordinatnu ravninu presjeka plohe s horizontalnim ravninama povućenim na različitim visinama.

Za zorno predočenje grafova funkcija više varijabli koristimo se odgovarajućim koordinatnim sustavima. U trodimenzionalnom prostoru najčešće se koristimo sljedećim koordinatnim sustavima: **pravokutnim kartezijevim sustavom**, **cilindričnim sustavom** i **sfernim sustavom**.

1. Pravokutni sustav



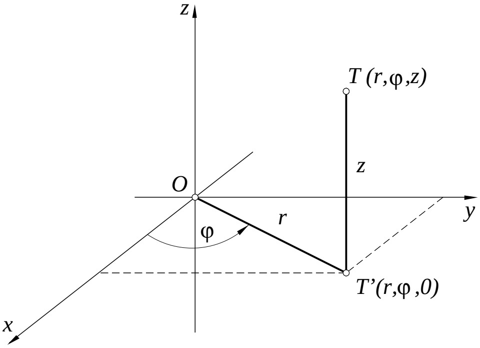
Sl. 2.2. Kartezijeve koordinate x_0, y_0, z_0 točke u pravokutnom sustavu jednake su koordinatama ortogonalnih projekcija te točke na osi sustava.

Točke određujemo kao presjek triju međusobno okomitih ravnina. Točku T s koordinatama $T_0(x_0, y_0, z_0)$ dobit ćemo kao presjek tri ravnine

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0.$$

Te ravnine nazivamo **koordinatnim plohama**. Na svakoj od njih jedna je koordinata stalna, a druge dvije se mogu odabrati po volji.

2. Cilindrični sustav



Sl. 2.3. Cilindrični sustav. Položaj točke određen je ravninskim polarnim koordinatama r i φ te aplikatom z.

Ako u ravnini XOY zadamo polarni koordinatni sustav i os z uzmemo iz kartezijeva sustava dobivamo cilindrični koordinatni sustav. Točku $T(r_0, \varphi_0, z_0)$ određujemo kao presjek koordinatnih ploha

$$r = r_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad z = z_0.$$

Jednadžbom $r = r_0$ zadan je kružni cilindar čija je os upravo os z. Na toj koordinatnoj plohi konstantan je r, dakle udaljenost do osi aplikata, a druge dvije koordinate možemo odabrati po voolji. Jednadžbom $\varphi = \varphi_0$ zadana je poluravnina, dok je jednadžbom $z = z_0$ zadana ravnina.

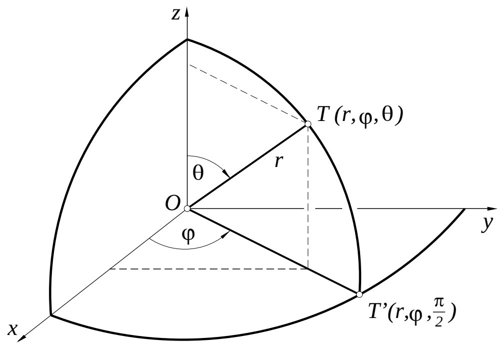
U primjenama obično se prave sljedeća ograničenja

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad r \geqslant 0.$$

Veza između pravokutnih kartezijevih koordinata i cilindričnih iste točke je sljedeća. Ako su $T(x, y, z)$ i $T(r, \varphi, z)$ koordinate iste točke u ova dva sustava, onda vrijedi

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\cos\varphi, \\ z = z, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{y}{x}, \\ z = z, \end{cases}$$

3. Sferni sustav



Sl. 2.4. Sferni (prostorni polarni sustav). Položaj točke određen je njezinom udaljenošću do ishodišta, te s dva kuta φ i ϑ .

Položaj točke $T(x, y, z)$ određujemo uređenom trojkom brojeva (r, φ, θ). Broj r je jednak udaljenosti točke od ishodišta. Sve točke koje imaju isti r nalaze se na sferi, tj. kuglinoj plohi. Kut φ je kut što ga zatvaraju poluos $x > 0$ i polupravac koji prolazi ortogonalnom projekcijom točke T na ravninu XOY. Sve točke koje imaju isti φ nalaze se u poluravnini. Kut θ je kut što ga zatvaraju polupravci: dio osi z, $z \geqslant 0$ i polupravac koji polazi iz ishodišta i prolazi točkom T. Sve točke koje imaju isti θ nalaze se na kružnom stošcu kojem je vrh u ishodištu a os mu je os z.

Ako su $T(x, y, z)$ i $T(r, \varphi, \vartheta)$ koordinate iste točke u prvokutnim i sfernim koordinatama, onda su veze između kordinata dane sljedećim relacijama:

$$\begin{cases} x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \\ y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \\ z = r \cos\vartheta. \end{cases}$$

U primjenama obično se vrše ograničenja:

$$r \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \qquad 0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi.$$

2.4. Plohe drugog reda

Plohe drugog reda su skupovi točaka čije su koordinate nultočke polinoma drugog stupnja u tri varijable.

Polinom drugog stupnja u varijablama x, y, z ima oblik

$$\Phi(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L.$$

Jednadžbe ploha drugog reda su jednadžbe oblika $\Phi(x, y, z) = 0$.

Zamislimo da je u prostoru smješten elipsoid u općem položaju. Njegova jednadžba je “komplicirana” zbog lošeg smještaja koordinatnog sustava. Poželjno bi bilo dovesti ishodište sustava u njegov centar, zatim osi sustava postaviti tako da se podudaraju s njegovim osima. U takvom sustavu njegova jednadžba bit će puno jednostavnija. Upravo takvu ideju pokušajmo provesti i u općem slučaju plohe drugog reda.

Prelaskom na nove koordinate (translacijom ishodišta)

$$x = x_0 + \overline{x},$$
$$y = y_0 + \overline{y},$$
$$z = z_0 + \overline{z},$$

gdje je točka $T_0(x_0, y_0, z_0)$ ishodište novog koordinatnog sustava, polinom Φ prelazi u polinom

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{B}\,\overline{y}^2 + \overline{C}\,\overline{z}^2 + 2\overline{D}\,\overline{x}\,\overline{y} + \ldots + \overline{L}.$$

Lako se provjeri da je:

$$\overline{A} = A, \quad \overline{B} = B, \quad \overline{C} = C, \quad \overline{D} = D, \quad \overline{E} = E, \quad \overline{F} = F, \quad \overline{L} = \Phi(x_0, y_0, z_0),$$

$$\overline{G} = Ax_0 + Dy_0 + Ez_0 + G,$$
$$\overline{H} = Dx_0 + By_0 + Fz_0 + H,$$
$$\overline{K} = Ex_0 + Fy_0 + Cz_0 + K.$$

Nastojimo odrediti $T_0(x_0, y_0, z_0)$ tako da jednadžba plohe u tom sustavu ima čim jednostavniji oblik. Pokušajmo odabrati T_0 tako da bude:

$$\overline{G} = \overline{H} = \overline{K} = 0.$$

Kako vidimo problem se svodi na rješavanje sustava od tri jednadžbe s tri nepoznanice. Taj će sustav imati jednoznačno rješenje ako je determinanta tog sustava različita od nule. Dakle, ako je

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{vmatrix} \neq 0$$

onda postoji i možemo odrediti tzv. centar plohe (x_0, y_0, z_0). Plohe za koje je $\Delta \neq 0$ nazivamo centralnim plohama. Takve plohe imaju samo jedan centar. Ako je $\Delta = 0$, onda su to plohe koje imaju više centara ili uopće nemaju centar. Takve su plohe paraboloidi, valjci i parovi ravnina. Tako je na primjer

$$(2x + 3y + z - 1)(x + y - 5z + 7) = 0$$

ploha drugog reda koja predstavlja par ravnina i nema centra.

Jednadžba centralne plohe u novom sustavu je

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{B}\,\overline{y}^2 + \overline{C}\,\overline{z}^2 + 2\overline{D}\,\overline{x}\,\overline{y} + 2\overline{E}\,\overline{x}\,\overline{z} + 2\overline{F}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{L} = 0.$$

Kako se koeficijenti uz članove drugog stupnja ne mijenjaju slijedilo bi:

$$A\overline{x}^2 + B\overline{y}^2 + C\overline{z}^2 + 2D\overline{x}\,\overline{y} + 2E\overline{x}\,\overline{z} + 2F\overline{y}\,\overline{z} + \Phi(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Primijetimo, ako točka $T(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ pripada plohi, tj. zadovoljavu tu jednadžbu, onda i točka $T(-\overline{x}, -\overline{y}, -\overline{z})$ zadovoljava jednadžbu. Točke plohe su centralno simetrične u odnosu na ishodište novog koordinatnog sustava. Primijetimo također, za centralne plohe vrijedi:

$$\begin{aligned}
\overline{L} &= \Phi(x_0, y_0, z_0) \\
&= Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + 2Dx_0y_0 + 2Ex_0z_0 + 2Fy_0z_0 + 2Gx_0 + 2Hy_0 + 2Kz_0 + L \\
&= (Ax_0 + Dy_0 + Ez_0)x_0 + (Dx_0 + Fz_0 + By_0 + H)y_0 + (Ex_0 + Fy_0 + Cz_0 + K)z_0 \\
&\qquad + (Gx_0 + Hy_0 + Kz_0 + L), \\
\overline{L} &= \Phi(x_0, y_0, z_0) = Gx_0 + Hy_0 + Kz_0 + L.
\end{aligned}$$

Rotacijom koordinatnog sustava dolazi se do još jednostavnije jednadžbe plohe drugog reda. Mi taj postupak nećemo provesti nego ćemo navesti rezultate do kojih dolazimo. Radi jednostavnijeg zapisa, koristimo oznake za varijable iz polaznog sustava. Izdvojit ćemo sljedeće nedegenerirane plohe drugog reda:

Centralne plohe drugog reda:

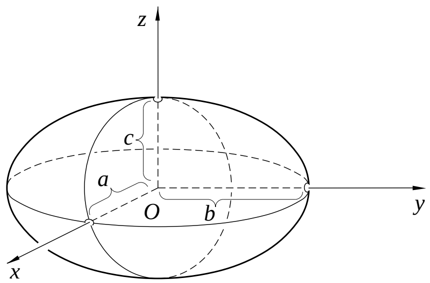
1. troosni elipsoid;
2. eliptički hiperboloid jednokrilni;
3. eliptički hiperboloid dvokrilni;
4. eliptički stožac.

Plohe koje nisu centralne:

1. eliptički paraboloid;
2. hiperbolički paraboloid;
3. valjci, eliptički, hiperbolički, parabolički.

1. Troosni elipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



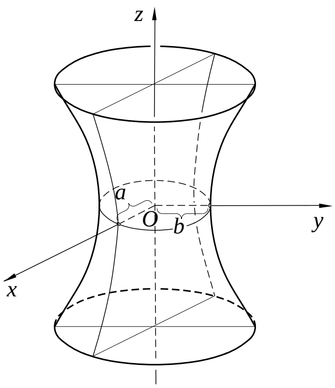
Sl. 2.5.

Presjek ove plohe s ravninama paralelnim s koordinatnim ravninama su elipse.

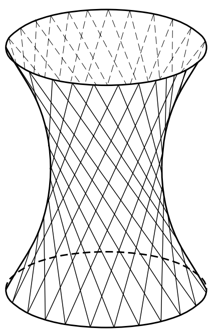
2. Eliptički hiperboloid — jednokrilni

Jednadžba plohe je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Sl. 2.6.



Sl. 2.7.

Os plohe je os aplikata. Presjeci plohe s horizontalnim ravninama su elipse, a presjeci s vertikalnim ravninama su hiperbole. Odatle plohi ime.

Promjenom predznaka uz nepoznanice (ali tako da samo jedan bude negativan) dobit ćemo eliptičke hiperboloide kojima su osi neka od preostale dvije koordinatne osi.

Interesantno je spomenuti da je eliptički hiperboloid tzv. **pravčasta ploha**. Naime, gornju jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}, \quad \left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)\left(1 + \frac{x}{a}\right).$$

Ovdje se prirodno promatraju dvije jednoparametarske familije pravaca. Prva familija je zadana jednadžbama

$$\begin{aligned} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} &= t\left(1 + \frac{x}{a}\right), \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} &= \frac{1}{t}\left(1 - \frac{x}{a}\right). \end{aligned}$$

Za svaku vrijednost parametra $t, t \neq 0$ dobivamo jednadžbe dviju ravnina tj. jednadžbu pravca. Ako točka T pripada tom pravcu, onda njezine koordinate zadovoljavaju obadvije jednadžbe, prema tome i njihov produkt, dakle i jednadžbu hiperboloida. Dakle, svaka točka tog pravca pripada plohi pa prema tome i cijeli pravac.

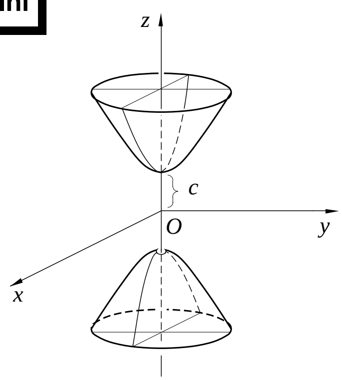
Slično se obrazloži i za pravce druge familije

$$\begin{aligned} \frac{y}{b} + \frac{z}{c} &= t\left(1 - \frac{x}{a}\right), \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} &= \frac{1}{t}\left(1 + \frac{x}{a}\right). \end{aligned}$$

Možemo zaključiti da je jednokrilni hiperboloid pravčasta ploha. Može se dokazati da kroz svaku točku plohe prolazi samo po jedan pravac iz svake od spomenutih porodica.

3. Eliptički hiperboloid dvokrilni

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$



Sl. 2.8.

Ponovo su presjek plohe s horizontalnim ravninama elipse, a s vertikalnim hiperbole. Os plohe je os aplikata, na kojoj se nalaze dva tjemena (udaljena za c od ishodišta). Promjenom rasporeda predznaka, dobit ćemo hiperboloidse s osima duž osi apscisa ili ordinata.