1.

Interpolacija i aproksimacija funkcija

Jedan od osnovnih problema numeričkih metoda je kako aproksimirati danu funkciju f pomoću funkcije g koja je prikladnija za izračunavanje, te ocijeniti pogrešku koja je učinjena pri takvoj aproksimaciji. Uobičajeni oblik aproksimacije g je linearna kombinacija

$$g(x) = a_0 g_0(x) + a_1 g_1(x) + \ldots + a_n g_n(x)$$

nekih "jednostavnih" funkcija g_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Najčešći izbor funkcija g_k su potencije x^k, trigonometrijske funkcijue $\sin kx$, $\cos kx$, te eksponencijalne funkcije $e^{b_k x}$. Nadalje, same g_k mogu biti linearne kombinacije kao što su npr. ortogonalni polinomi itd. U novije vrijeme sve više se koriste racionalne funkcije, tj. funkcije oblika

$$g(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} = \frac{P_n(x)}{P_m(x)}.$$

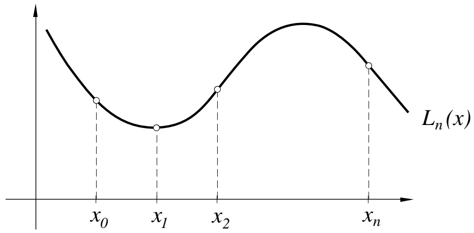
Ovdje ćemo se najviše ograničiti na aproksimaciju polinomima.

1.1. Interpolacijski polinom

Da bismo motivirali problem zamislimo da eksperimentalnim mjerenjem istražujemo nepoznatu funkciju $x \mapsto f(x)$. Time dobivamo seriju podataka

$$(x_0, f(x_0)), \quad (x_1, f(x_1)), \quad \ldots, \quad (x_n, f(x_n)) \tag{1}$$

koji u ravnini predstavljaju točke grafa Γ_f (ne zaboravimo da su u (1) svi podaci aproksimativne vrijednosti).



Sl. 1.1.

Postavlja se pitanje izračunavanja aproksimativnih vrijednosti funkcije f izvan točaka x_i, tj. za vrijednosti argumenta x, $x \neq x_i$. Oblik funkcije nam je potpuno nepoznat (znamo samo njezinu vrijednosti u točkama $x_0, x_1, \ldots, x_n$). Stoga nepoznatu funkciju f zamijenjujemo s drugom, nama poznatom funkcijom, koja ima iste vrijednosti u zadanim točkama. Svakako je najjednostavnija takva funkcija polinom.

To nas vodi na problem iznalaženja tzv. **interpolacijskog polinoma**

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \tag{2}$$

stupnja $\leqslant n$ čije se vrijednosti u točkama x_i podudaraju s vrijednostima $f(x_i)$, tj. vrijedi

$$P(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Točke x_i zovu se **čvorovi** (bazne točke ili interpolacijske točke), dok se P zove **interpolacijski polinom**.

Lako se uvjerimo da je interpolacijski polinom jedinstven, tj. da kroz $n+1$ čvorište (1) prolazi samo jedan polinom P stupnja $\leqslant n$ takav da vrijedi $P(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Naime, uvrstimo li redom točke x_i dobivamo sljedeći sustav linearnih jednadžbi po nepoznatim koeficijentima $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n &= f(x_0) \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n &= f(x_1) \\ &\vdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n &= f(x_n). \end{aligned} \tag{4}$$

Sustav (4) ima jedinstveno rješenje zbog toga što je determinanta sustava

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ & & \vdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0. \tag{5}$$

Determinanta (5) poznata je pod imenom Vandermondeova determinanta, čija je vrijednost jednaka umnošku svih razlika $x_i - x_j$, $i > j$. Rješenjem sustava (4) dobivamo koeficijente $a_0, a_1, \ldots, a_n$, odnosno traženi interpolacijski polinom.

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma

Rješavanje sustava jednadžbi (4) iz uvoda nije jednostavno, međutim, pokazuje se da se P može pronaći u zapisu koji je različit od zapisa (2) iz uvoda, pa ovdje izvodimo zapis od P u formi u kojoj se naziva Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma i označava sa L_n. Ograničimo li se na restrikciju od f na skup $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, vidimo da tu restrikciju možemo prikazati kao linearnu kombinaciju ovih $n+1$ funkcija

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{za } j = i, \\ 0, & \text{za } j \neq i, \end{cases} \qquad i, j = 0, 1, \dots, n,$$

jer očito vrijedi

$$f(x_j) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\varphi_i(x_j). \tag{6}$$

Pronađemo li interpolacijski polinom p_i za svaku od pomoćnih funkcija φ_i, dobit ćemo traženi interpolacijski polinom L_n kao

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)p_i(x). \tag{7}$$

Interpolacijski polinom p_i lako nalazimo, zato što su sva čvorišta, osim x_i, njegove nultočke. Imamo dakle da je

$$p_i(x) = C_i(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)$$

gdje je C_i konstanta, koju lako određujemo uvrštavanjem $x = x_i$. Kako je $p_i(x_i) = 1$, imamo

$$1 = C_i(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)$$

odnosno

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)}. \tag{8}$$

Time je

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)},$$

što prema (7) daje

$$\begin{aligned} L_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{i \neq j \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \end{aligned} \tag{9}$$

Zapis (9) zove se **Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma**. Vidimo da L_n nismo dobili u obliku razvijenom po potencijama od x već kao linearnu kombinaciju polinoma p_i, što je posljedica postupka nalaženja L_n. Želimo li izračunati koeficijent

a_k uz potenciju x^k, moramo izvršiti pripadna množenja i zbrajanja. Za $n=1$ imamo jednadžbu pravca kroz točke $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, napisanu u ovom obliku:

$$L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1), \tag{10}$$

dok za $n=2$ dobivamo jednadžbu parabole kroz zadane tri točke, napisanu u ovom obliku

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2). \tag{11}$$

Primjer 1.1. Odredite interpolacijski polinom za funkciju $y = \sin \pi x$ pri sljedećem izboru čvorova: $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Lako sada izračunamo $f(x_0) = 0$, $f(x_1) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $f(x_2) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$ pa uvrštavanjem u (11) i sređivanjem dobivamo

$$L_2(x) = \frac{7}{2}x - 3x^2.$$

Sada npr. za $x = \frac{1}{4}$ dobivamo $\sin\frac{\pi}{4} \approx 0.6875$. To je aproksimacija od $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.7021$ s greškom $< 2\cdot 10^{-2}$ što može zadovoljavati neke račune.

Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma za ekvidistantne čvorove

Izvedimo i Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma za ekvidistantne čvorove, tj. $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Veličinu h zovemo **korak interpolacije**. Označimo li sa $t = \dfrac{x-x_0}{h}$, imamo: $x - x_0 = th$, $x = x_0 + th$; $x - x_1 = (x-x_0)-(x_1-x_0) = th - h$; $x_i - x_0 = ih$, $x_i - x_1 = (i-1)h$, itd. pa možemo pisati

$$\begin{aligned}
&\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}\\
&\quad= \frac{th(th-h)\cdots[th-(i-1)h][th-(i+1)h]\cdots(th-nh)}{ih(i-1)h\cdots h(-h)\cdots[-(n-i)h]}\\
&\quad= \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-i}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{i!(n-i)!}\\
&\quad= \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-i}\cdot\frac{(-1)^{n-i}}{n!}\cdot\frac{n!}{i!(n-i)!}\\
&\quad= (-1)^{n-1}\binom{n}{i}\cdot\frac{1}{t-i}\cdot\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{n!}
\end{aligned} \tag{12}$$

Time Lagrangeov oblik interpolacijskog polinoma (9) poprima oblik

$$L_n(x) = L_n(x_0+th) = (-1)^n\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\frac{f(x_i)}{t-i}. \tag{13}$$

Iz (12) vidimo da koeficijenti uz $f(x_i)$ ne ovise niti od f niti od koraka h. Stoga se koeficijenti (12) mogu tabelirati. Takve tablice postoje i zovu se **tablice Lagrangeovih koeficijenata**.

Sada $L_2(x)$ izgleda ovako:

$$L_2(x) = L_2(x_0 + th) = \frac{t(t-1)(t-2)}{2}\left[\frac{f(x_0)}{t} - 2\frac{f(x_0+h)}{t-1} + \frac{f(x_0+2h)}{t-2}\right],$$

što je naravno polinom drugog stupnja u varijabli t.

Izračunavanje interpolacijskog polinoma, Aitkenova interpolacijska shema

Kao što znamo, polinomi su funkcije koje su definirane na svim realnim brojevima, pa prema tome možemo izračunati $L_n(x)$ za bilo koji realan broj $x \in \mathbf{R}$. Ipak, u tome razlikujemo dva slučaja obzirom na polaznu funkciju f. Ako izračunamo $L_n(x)$ za neki x između x_0 i x_n, tj. $x_0 < x < x_n$, onda govorimo da smo izvršili **interpolaciju**, dok za ostale x, tj. x izvan segmenta $[x_0, x_n]$, kažemo da smo izvršili **ekstrapolaciju**.

U slučaju da nam ne treba opći izraz za L_n nego samo njegove vrijednosti za neke x spretno je služiti se tzv. **Aitkenovom interpolacijskom šemom** (**Aitkenov algoritam**) koja se još zove i **iterirana linearna interpolacija**. Radi kraćeg zapisivanja označimo $f(x_i) = y_i$. Napišimo ponovo jednadžbu linearnog interpolacijskog polinoma koji prolazi točkama (x_0, y_0) i (x_1, y_1). Označimo taj polinom sa L_{01}. Prema (10) imamo slijedeći zapis

$$\begin{aligned} L_{01}(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0 + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1 \\ &= \frac{1}{x_1-x_0}[y_0(x_1-x) - y_1(x_0-x)] \\ &= \frac{1}{x_1-x_0}\begin{vmatrix} y_0 & x_0-x \\ y_1 & x_1-x \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{14}$$

Analogno možemo odrediti L_{12}, $L_{23}, \ldots$, odnosno L_{jk}, $j < k$. Promotrimo interpolacijski polinom drugog stupnja kroz točke (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) koji označavamo sa L_{012}. Prema (10) imamo

$$L_{012}(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2.$$

Uočimo da rastavljanjem na parcijalne razlomke vrijedi

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{1}{a-b}\frac{1}{x-a} + \frac{1}{b-a}\frac{1}{x-b}$$

što primijenjeno na srednji pribrojnik od L_{012} daje

$$\frac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{1}{x_0-x_2}\frac{1}{x_1-x_0} + \frac{1}{x_2-x_0}\frac{1}{x_1-x_2}$$

tako da L_{012} možemo ovako zapisati

$$\begin{aligned}
L_{012}(x) &= \frac{1}{x_2 - x_0}\Big\{ \frac{(x-x_1)(x_2-x)}{x_0-x_1} y_0 + \frac{(x-x_0)(x_2-x)}{x_1-x_0} y_1 \\
&- \frac{(x_0-x)(x-x_2)}{x_1-x_2} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{x_2-x_1} y_2 \Big\} \\
&= \frac{1}{x_2-x_0}\Big\{ \Big[\frac{x_1-x}{x_1-x_0} y_0 - \frac{x_0-x}{x_1-x_0} y_1\Big](x_2-x) \\
&- \Big[\frac{x_2-x}{x_2-x_1} y_1 - \frac{x_1-x}{x_2-x_1} y_2\Big](x_0-x) \Big\} \\
&= \frac{1}{x_2-x_0}\Big\{ L_{01}(x)(x_2-x) - L_{12}(x)(x_0-x) \Big\}.
\end{aligned}$$

Izraz u zagradi je ponovo razvoj determinante drugog reda što u takvom zapisu izgleda ovako

$$L_{012}(x) = \frac{1}{x_2 - x_0}\begin{vmatrix} L_{01}(x) & x_0-x \\ L_{12}(x) & x_2-x \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Izrazi (14) i (15) su potpuno analogno građeni pa naslućujemo da općenito vrijedi

$$L_n(x) = L_{01\ldots n}(x) = \frac{1}{x_n - x_0}\begin{vmatrix} L_{01\ldots(n-1)}(x) & x_0 - x \\ L_{12\ldots n}(x) & x_n - x \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Formulu (16) lako dokazujemo indukcijom. Primijetimo da $L_{01\ldots(n-1)}$ nije ništa drugo nego interpolacijski polinom za čvorove x_0, $x_1, \ldots, x_{n-1}$, dok je $L_{12\ldots n}$ interpolacijski polinom za čvorove x_1, $x_2, \ldots x_n$. Zapišemo li ih u Lagrangeovom obliku (9) imamo

$$L_{01\ldots(n-1)}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{n-1})}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n-1})}, \tag{17}$$

odnosno

$$L_{12\ldots n}(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}. \tag{18}$$

Izračunamo li determinantu (16) dobivamo

$$L_{01\ldots n}(x) = \frac{(x_n-x)L_{01\ldots(n-1)} - (x_0-x)L_{12\ldots n}}{x_n - x_0}.$$

Očigledno je da prvi pribrojnik sume (17) pomnožen sa $\dfrac{x_n-x}{x_n-x_0} = \dfrac{x-x_n}{x_0-x_n}$ predstavlja prvi pribrojnik sume (9) i da zadnji pribrojnik sume (18) pomnožen sa $-\dfrac{x_0-x}{x_n-x_0} = \dfrac{x-x_0}{x_n-x_0}$ predstavlja zadnji pribrojnik sume (9). Ostaje još da pogledamo koeficijente od y_i za $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Tada je koeficijent od y_i jednak

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x_n - x_0}\Big\{ -\frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{n-1})}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n-1})}(x-x_n) \\
&\qquad + (x-x_0)\frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \Big\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x_n - x_0} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_{n-1})(x-x_n)[-x_i+x_n-x_i-x_0]}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_{n-1})(x_i-x_n)}$$

što je točno koeficijent od y_i u prikazu (9).

Formula (16) daje drugi zapis interpolacijskog polinoma. Taj zapis je veoma podesan za izračunavanje vrijednosti interpolacijskog polinoma, posebno na računskim strojevima jer se radi o višestrukoj uzastopnoj primjeni istog postupka. Šema računanja interpolacijskog polinoma izgleda sada ovako:

x_i	y_i	$x_i - x$	$L_{i-1,i}$	$L_{i-2,i-1,i}$	$L_{i-3,i-2,i-1,i}$	$L_{i-4,i-3,i-2,i-1,i}$
x_0	y_0	$x_0 - x$				
x_1	y_1	$x_1 - x$	$L_{01}(x)$			
x_2	y_2	$x_2 - x$	$L_{12}(x)$	$L_{012}(x)$		
x_3	y_3	$x_3 - x$	$L_{23}(x)$	$L_{123}(x)$	$L_{0123}(x)$	
x_4	y_4	$x_4 - x$	$L_{34}(x)$	$L_{234}(x)$	$L_{1234}(x)$	$L_{01234}(x)$
x_5	y_5	$x_5 - x$	$L_{45}(x)$	$L_{345}(x)$	$L_{2345}(x)$	$L_{12345}(x)$

Kod iznalaženja interpolacijskog polinoma nismo ništa govorili o poređaju čvorova. Automatski smo mislili da ih uzimamo po veličini, međutim, to nismo nigdje koristili. Možemo dakle proizvoljno permutirati čvorove i zatim ispisivati Lagrangeov interpolacijski polinom, dobivamo isti rezultat. Sada se može izvršiti jedno opće kombinatoričko razmatranje i uz nešto računanja dobiti jedan opći zapis interpolacijskog polinoma iz kojega se specijaliziranjem indeksa i permutacija dobiva nekoliko drugih zapisa (oblika) interpolacijskog polinoma. To ovdje izostavljamo.

Vratimo se primjeru aproksimacije $y = \sin \pi x$ za $x = 0.25 = \frac{1}{4}$ iz 1.1. Sada bez nalaženja interpolacijskog polinoma imamo postupnim računanjem sljedeću tablicu čija je zadnja vrijednost jednaka $L_{012}(\frac{1}{4})$.

x_i	y_i	$x_i - 0.25$		
0	0	−0.25		
0.1666	0.5	−0.0834	0.75	
0.5	1	0.25	0.6252	$0.6876 \approx \sin \frac{\pi}{4}$

Newtonovi oblici interpolacijskog polinoma

Prvo ćemo izvesti tzv. Newtonov oblik s kvocijentima diferencija. Već na samom početku diferencijalnog računa sreli smo pojam kvocijenta diferencija i na njemu proveli granični proces da dobijemo derivaciju u točki. Sada ne provodimo granični proces nego kratko uvodimo odgovarajuće pojmove.

Za točke $(x_0, f(x_0))$ i $(x_1, f(x_1))$ definiramo i označavamo kvocijent diferencija funkcije f kao

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} \tag{19}$$

i zovemo **kvocijent diferencija**. Za tri točke $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ uvodimo **kvocijent diferencija drugog reda** funkcije f kao

$$
\begin{aligned}
f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0} \\
&= \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \\
&= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}
\end{aligned}
\tag{20}
$$

tj. kao kvocijent diferencija od kvocijenata diferencija prvog reda. Induktivno definiramo kvocijent diferencija n-tog reda **kvocijent diferencija n-tog reda** od f kao

$$
f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}. \tag{21}
$$

Za jednu točku $(x_0, f(x_0))$ definiramo kvocijent diferencija 0-tog reda kao funkcijsku vrijednost u toj točki i označavamo $f[x_0] = f(x_0)$.

Dokažimo da za kvocijent diferencija vrijedi formula

$$
\begin{aligned}
f[x_0, x_1, \ldots, x_n] &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_n)} + \ldots \\
&\quad + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)\ldots(x_n - x_{n-1})} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{i \neq j \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} (x_i - x_j)}.
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Jednakost (22) dokazuje se indukcijom. Za $n = 1$ formula (19) daje takav rastav. Pretpostavimo induktivno da rastav vrijedi za prirodne brojeve $< n$. Sada je po definiciji

$$
f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{x_n - x_0} \{ f[x_1, x_2, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}] \}.
$$

Prema induktivnoj pretpostavci možemo pisati

$$
\begin{aligned}
f[x_1, x_2, \ldots, x_n] &= \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)} + \ldots \\
&\quad + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_1)(x_n - x_2)\ldots(x_n - x_{(n-1)})} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{i \neq j \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} (x_i - x_j)},
\end{aligned}
$$

i analogno

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}] = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{i \neq j \\ 0 \leqslant j \leqslant n-1}} (x_i - x_j)}.$$

Sada je

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \frac{1}{x_n - x_0} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{i \neq j \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} (x_i - x_j)} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{i \neq j \\ 0 \leqslant j \leqslant n-1}} (x_i - x_j)} \right\}. \tag{23}$$

Iz (23) direktno čitamo da uz $f(x_0)$ i $f(x_n)$ imamo koeficijent koji propisuje (22). Ostaje da to provjerimo za indekse $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Nadalje čitamo da je u (23) koeficijent od $f(x_j)$ jednak

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_n - x_0} \left\{ \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i \neq j \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} (x_i - x_j)} - \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i \neq j \\ 0 \leqslant j \leqslant n-1}} (x_i - x_j)} \right\} &= \frac{(x_i - x_0) - (x_i - x_n)}{(x_n - x_0) \prod\limits_{\substack{i \neq j \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} (x_i - x_j)} \\ = \frac{x_n - x_0}{(x_n - x_0) \prod\limits_{\substack{i \neq j \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} (x_i - x_j)} &= \frac{1}{\prod\limits_{\substack{i \neq j \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} (x_i - x_j)}, \end{aligned}$$

čime je dokaz proveden.

Iz definicije (21) i jednakosti (22) lako se dokazuju ova osnovna svojstva kvocijenta diferencija n-tog reda:

a) kvocijent diferencija n-tog reda je linearan operator, tj. vrijedi

$$(\alpha f + \beta g)[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \alpha f[x_0, x_1, \ldots, x_n] + \beta g[x_0, x_1 \ldots, x_n];$$

b) kvocijent diferencija je simetrična funkcija svojih argumenata x_0, x_1,..., x_n, tj. ne mijenja vrijednost pri proizvoljnoj permutaciji argumenata.

Ako je funkcija f zadana u točkama x_0, x_1,..., x_n onda se tablica

$$\begin{array}{lllll}
f[x_0] & & & & \\
& f[x_0, x_1] & & & \\
f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
& f[x_1, x_2] & & \ddots & \\
f[x_2] & & f[x_1, x_2, x_3] & & \\
& f[x_2, x_3] & & & f[x_0, x_1, \ldots, x_n] \\
f[x_3] & & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\
& \vdots & f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n] & & \\
\vdots & & & & \\
& f[x_{n-1}, x_n] & & & \\
f[x_n] & & & &
\end{array}$$

zove **tablica kvocijenata diferencija od** f.

Da iz Lagrangeovog oblika interpolacijskog polinoma izvedemo Newtonov postupimo ovako. Promatrajmo u prvom redu razliku

$$\begin{aligned} f(x) - L_n(x) &= f(x) - \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \prod_{\substack{i \neq j \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \\ &= \prod_{0 \leqslant j \leqslant n} (x - x_j) \left\{ \frac{f(x)}{\prod\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} (x - x_i)} + \sum_{i=0}^{n} \frac{f(x_i)}{(x_i - x) \prod\limits_{\substack{j \neq i \\ 0 \leqslant j \leqslant n}} (x_i - x_j)} \right\}, \end{aligned}$$

pri čemu smo drugu jednakost dobili izlučivanjem produkta ispred vitičaste zagrade. Promatramo li izraz u vitičastoj zagradi uviđamo (prema (4)) da iznosi $f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n]$, tj. da je to kvocijent diferencija $(n+1)$-og reda (x je shvaćen kao dodatno čvorište), pa možemo pisati

$$f(x) - L_n(x) = f[x, x_0, x_1, \ldots, x_n] \prod_{0 \leqslant j \leqslant n} (x - x_j) \tag{24}$$

što će nam trenutak kasnije korisno poslužiti. Nadalje, zapišimo interpolacijski polinom L_n u obliku

$$L_n(x) = L_0(x) + (L_1(x) - L_0(x)) + \ldots + (L_n(x) - L_{n-1}(x)) \tag{25}$$

gdje L_k označava interpolacijski polinom u Lagrangeovom obliku određen čvorovima x_0, x_1, ..., x_k i $L_0(x) = f(x_0)$. Tada je razlika $L_k(x) - L_{k-1}(x)$ polinom k-tog stupnja kojemu su x_0, x_1,..., x_{k-1} nultočke jer vrijedi $f(x_j) = L_{k-1}(x_j) = L_k(x_j)$ za $j = 0, 1, 2, \ldots, k-1$. Prema tome možemo pisati

$$\begin{aligned} L_k(x) - L_{k-1}(x) &= A_{k-1}(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}) \\ &= A_{k-1} \prod_{0 \leqslant j \leqslant k-1} (x - x_j), \end{aligned} \tag{26}$$

gdje koeficijent A_{k-1} moramo odrediti. Za $x = x_k$ dobivamo iz (26)

$$L_k(x_k) - L_{k-1}(x_k) = A_{k-1} \prod_{0 \leqslant j \leqslant k-1} (x_k - x_j),$$

dok iz (24) za $n = k-1$ i $x = x_k$ dobivamo

$$f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = f[x_k, x_0, \ldots, x_{k-1}] \prod_{0 \leqslant j \leqslant k-1} (x_k - x_j).$$

Kako je $L_k(x_k) = f(x_k)$ to iz zadnje dvije jednakosti i svojstva b) slijedi

$$A_{k-1} = f[x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k].$$

Uvrstimo li dobiveni rezultat u (25) imamo

$$\begin{aligned} L_n(x) = f[x_0] &+ f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ &+ f[x_0, x_1, \ldots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{27}$$

koji zapis interpolacijskog polinoma zovemo **Newtonov oblik s kvocijentima diferencija**.

Stupanj pribrojnika u (27) raste, na osnovi čega direktno čitamo da je $L_n(x)$ polinom n-tog stupnja onda i samo onda ako je za dana čvorišta pripadni kvocijent diferencija n-tog reda različit od nule.

Kada imamo ekvidistantne čvorove tada se interpolacijski polinom može zapisati pomoću viših diferencija unaprijed, odnosno unatrag.

Promatrajmo funkciju f u točki x. **Prva diferencija unaprijed** od f u x označava se sa $\Delta f(x)$ i definira kao

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x). \tag{28}$$

Ako nam je poznata prva diferencija unaprijed od f u točki $x+h$, tj. ako znamo $\Delta f(x+h) = f(x+h+h) - f(x+h) = f(x+2h) - f(x+h)$, onda drugu diferenciju od f u točki x definiramo kao

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x) &= \Delta f(x+h) - \Delta f(x) \\ &= f(x+2h) - f(x+h) - \big(f(x+h) - f(x)\big) \\ &= f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)\end{aligned} \tag{29}$$

tj. kao prvu diferenciju unaprijed od prve diferencije unaprijed. Induktivno definiramo r-tu diferenciju unaprijed od f u točki x kao

$$\Delta^r f(x) = \Delta^{r-1} f(x+h) - \Delta^{r-1} f(x). \tag{30}$$

Izvedimo vezu između diferencija unaprijed i kvocijenata diferencija. Sada je $x_{k+1} = x_k + h$, jer radimo s ekvidistantnim čvorovima, pa imamo

$$\frac{\Delta f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = f[x_0, x_1]$$

iz čega slijedi

$$\Delta f(x_0) = 1!hf[x_0, x_1].$$

Za kvocijent diferencija drugog reda imamo

$$\begin{aligned}f[x_0, x_1, x_2] &= \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0} \\ &= \frac{f(x_0+2h) - 2f(x_0+h) + f(x_0)}{2h^2} \\ &= \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2h^2}\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\Delta^2 f(x_0) = 2!h^2 f[x_0, x_1, x_2].$$

Općenito vrijedi formula

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_r] = \frac{\Delta^r f(x_0)}{r!h^r}, \quad x_{k+1} - x_k = h, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1, \tag{31}$$

ili

$$\Delta^r f(x_0) = r!h^r f[x_0, x_1, \ldots, x_r], \quad x_{k+1} - x_k = h, \quad k = 0, 1, \ldots, r-1. \tag{32}$$

Uvrstimo li redom (31) u (27) za $r = 1, 2, \ldots, n$ dobivamo

$$\begin{aligned} L_n(x) = f(x_0) &+ \frac{\Delta f(x_0)}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \\ &\ldots + \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}(x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}). \end{aligned} \tag{33}$$

Uvedemo li u (33) $t = \dfrac{x - x_0}{h}$, ili $x = x_0 + th$, kao što smo to učinili za Lagrangeov oblik, formula (33) poprima ovaj oblik

$$\begin{aligned} L_n(x) &= L_n(x_0 + th) \\ &= f(x_0) + \Delta f(x_0)t + \Delta^2 f(x_0)\frac{t(t-1)}{2}! + \ldots + \Delta^n f(x_0)\frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!} \end{aligned} \tag{34}$$

koji se zove **Newtonov oblik interpolacijskog polinoma s diferencijama unaprijed**. Usporedite formulu (34) sa formulom (13).

Ponekad je spretno služiti se s tzv. diferencijama unatrag. Tako se **diferencija unatrag od** f **u točki** x označava sa $\nabla f(x)$ i definira kao

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x-h). \tag{35}$$

Induktivno se definira r-ta diferencija unatrag od f u točki x kao

$$\nabla^r f(x) = \nabla^{r-1} f(x) - \nabla^{(r-1)} f(x-h). \tag{36}$$

Pomičući se unatrag moramo sada krenuti od zadnjeg čvorišta x_n, tako da analogno formuli (31) sada dobivamo

$$f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-r}] = \frac{\nabla^r f(x_n)}{r!h^r} \tag{37}$$

ili

$$\nabla^r f(x_n) = r'h^r f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-r}]. \tag{38}$$

Uz (37) i (38) spomenimo samo da je zbog svojstva b) $f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-r}] = f[x_{n-r}, x_{n-r+1}, \ldots, x_n]$.

Ako u formuli (27) pođemo od x_n prema x_0 ona poprima ovaj zapis

$$\begin{aligned} L_n(x) = f(x_n) &+ f[x_n, x_{n-1}](x-x_n) + f[x_n, x_{n-1}, x_{n-2}](x-x_n)(x-x_{n-1}) + \ldots \\ &+ f[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0](x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1) \end{aligned} \tag{39}$$

u što redom uvrštavamo (37) za $r = 1, 2, \ldots, n$ i dobivamo

$$\begin{aligned} L_n(x) = f(x_n) &+ \frac{\nabla f(x_n)}{1!h}(x-x_n) + \frac{\nabla^2 f(x_n)}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \ldots \\ &+ \frac{\nabla^n f(x_n)}{n!h^n}(x-x_n)(x-x_{n-1})\ldots(x-x_1). \end{aligned} \tag{40}$$

Ako i u (40) provedemo supstituciju $t = \dfrac{x - x_n}{h}$, $x = x_n + ht$ prelazi ona u

$$\begin{aligned} L_n(x) = L_n(x_n + th) = f(x_n) &+ \nabla f(x_n)\frac{t}{1!} + \nabla^2 f(x_n)\frac{t(t+1)}{2!} + \ldots \\ &+ \nabla^n f(x_n)\frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!} \end{aligned} \tag{41}$$

što se zove **Newtonov oblik interpolacijskog polinoma s diferencijama unatrag**.

Spomenimo na kraju da postoje i drugi oblici interpolacijskog polinoma u što se ovdje ne upuštamo.

Ocjena pogreške, minimiziranje ocjene pogreške

Ocijenimo pogrešku $|f(x) - L_n(x)|$ uz pretpostavku da funkcija f ima na segmentu $[a, b]$, $a \leqslant x_0 < x_1 < \dots x_n \leqslant b$, neprekinute derivacije do uključivo $n+1$-og reda. U tom cilju promatrajmo pomoćnu funkciju

$$\varphi(t) = f(t) - L_n(t) - \frac{f(x) - L_n(x)}{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)}(t - x_0)(t - x_1)\dots(t - x_n) \quad (42)$$

gdje je $x \neq x_i$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$ proizvoljna ali fiksirana točka segmenta $[a, b]$. Ta funkcija ima na $[a, b]$ derivacije do uključivo $(n + 1)$-og reda. Osim toga φ ima barem $n + 2$ nultočke na $[a, b]$ jer vrijedi

$$\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \dots = \varphi(x_n) = \varphi(x) = 0.$$

Prema Rolleovom teoremu derivacija φ' se poništava barem jednom između susjednih nultočaka, pa se dakle poništava u barem $n + 1$ točaka segmenta $[a, b]$. Neka su

$$\xi_0^{(1)}, \xi_1^{(1)}, \dots \xi_n^{(1)} \in (a, b)$$

točke u kojima se φ' poništava, tj. vrijedi

$$\varphi'(\xi_i^{(1)}) = 0, \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Primjenimo ponovo Rolleov teorem na funkciju φ'. Time analogno prethodnom dobivamo barem n točaka

$$\xi_0^{(2)}, \xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)}, \dots, \xi_{n-1}^{(2)}$$

u kojima se poništava druga derivacija φ'', tj.

$$\varphi''(\xi_i^{(2)}) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n - 1.$$

Primijenimo li redom gornji postupak na funkcije φ''', ..., $\varphi^{(n+1)}$ dolazimo do zaključka da postoji barem jedna točka

$$\xi_0^{(n+1)} = \xi \in (a, b)$$

za koju vrijedi

$$\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0.$$

(Istaknimo da točka ξ ovisi o x.) Izračunamo li $(n+1)$-vu derivaciju od φ dobivamo

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - \frac{f(x) - L_n(x)}{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)}(n + 1)!.$$

Uvrstimo li $t = \xi$ imamo

$$f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x) - L_n(x)}{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)}(n + 1)! = 0. \quad (43)$$

Iz (43) dobivamo pogrešku (ili ostatak) u ovom obliku

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n). \quad (44)$$

Neka je

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leqslant M_{n+1}, \qquad x \in [a, b].$$

Tada dobivamo sljedeću ocjenu apsolutne pogreške

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|. \tag{45}$$

Istaknimo na kraju da se (45) odnosi samo na točke segmenta $[x_0, x_n]$, tj. $x \in [x_0, x_n]$.

Ako se služimo ekvidistantnim čvorištima, onda (44) i (45) poprimaju ove oblike:

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}t(t-1)(t-2)\dots(t-n)f^{(n+1)}(\xi), \tag{46}$$

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}h^{n+1}}{(n+1)!}|t(t-1)(t-2)\dots(t-n)|. \tag{47}$$

Analiziramo li formulu (44) vidimo da je $(n+1)!$ konstanta, nadalje je $f^{(n+1)}(\xi)$ određeno promatranom funkcijom f pa na te faktore ne možemo utjecati. Postavimo li pitanje da li možemo utjecati na produkt $(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$, onda u stvari pitamo da li izborom čvorišta možemo utjecati na pogreške. Naravno, želja je da ju minimiziramo. Uočimo dvije činjenice vezane za produkt $(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$. To je polinom $(n+1)$-og stupnja u normiranom obliku (vodeći koeficijent je jedinica) i nadalje $x_0, x_1, \dots, x_n$ su njegove jednostruke nultočke. Proučavanjem tzv. Čebiševljevih polinoma u normiranom obliku dolazi se do ovakvog rezultata: *Među svim normiranim polinomima n-tog stupnja promatranih na segmentu $[-1, 1]$, normirani Čebiševljev polinom n-tog stupnja ima najmanju gornju ogradu za svoju apsolutnu vrijednost.*

Taj nam rezultat kaže da za čvorove $x_0, x_1, \dots, x_n$ treba uzeti nultočke Čebiševljevog polinoma $(n+1)$-og stupnja. Gornja tvrdnja je izrečena za segment $[-1, 1]$. To ne predstavlja ograničenje, jer transformacija

$$x = \frac{2\xi - b - a}{b - a}$$

preslikava segment $[a, b]$ na $[-1, 1]$, dok njena inverzna

$$\xi = \frac{x(b-a) + (b+a)}{2}$$

preslikava segment $[-1, 1]$ na $[a, b]$. Čebiševljev polinom n - tog stupnja je definiran ovako

$$T_n(x) = \cos n\varphi, \quad \varphi = \arccos x. \tag{48}$$

Prema tome nama trebaju nultočke od T_{n+1}, tj. rješenja jednadžbe

$$\cos(n+1)\varphi = 0, \quad \varphi = \arccos x.$$

Riješimo li jednadžbu u φ dobivamo

$$(n+1)\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

odnosno,

$$\varphi_k = \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

što uvršteno u $\varphi = \arccos x$ i riješeno u varijabli x daje

$$x_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{49}$$

To su dakle nultočke od T_{n+1} i one se sve nalaze unutar segmenta $[-1, 1]$. Trebamo li čvorove unutar segmenta $[a, b]$ treba primijeniti gornju transformaciju po kojoj su

$$\xi_k = \frac{x_k(b-a) + (b+a)}{2}, \quad k = 0, 1, \ldots, n \tag{50}$$

traženi čvorovi unutar $[a, b]$. Odredimo li interpolacijski polinom L_n uz tako odabrane čvorove (a često se čvorovi i inače mogu birati) dobit ćemo minimalnu pogrešku prema ocjeni pogreške (45). Istaknimo još jednom, ovo razmatranje je minimiziralo desnu stranu formule (45), dakle uz takvu ocjenu pogreške, možemo pogrešku minimizirati izabravši za čvorove interpolacijskog polinoma L_n nultočke Čebiševljevog polinoma T_{n+1}.

Ocjena pogreške od netočnih funkcijskih vrijednosti $f(x_i)$

Formula (45) daje ocjenu pogreške koju činimo ako funkcijsku vrijednost $f(x)$ zamijenimo vrijednošću interpolacijskog polinoma $L_n(x)$. U toj su formuli $f(x_i)$ točne vrijednosti od f u čvorovima x_i. Međutim, te vrijednosti nisu točne. Ocijenimo time uvedenu pogrešku. Opći oblik interpolacijskih formula je linearna kombinacija polinoma s koeficijentima koji su funkcijske vrijednosti u čvorovima tj. za dani x računamo sumu oblika

$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i)P_i(x) \approx L_n(x) \tag{51}$$

koja aproksimira $L_n(x)$. Kako u realnom slučaju nemamo točne $f(x_i)$ to u lijevu stranu uvrštavamo približne vrijednosti $f^*(x_i) = f(x_i) + \eta_i$, tako da smo izračunali

$$\sum_{i=0}^{n} f^*(x_i)P_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)P_i(x) + \sum_{i=0}^{n} \eta_i P_i(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)P_i(x) + \varepsilon. \tag{52}$$

Dobili smo da je time uzrokovana pogreška jednaka

$$\varepsilon = \sum_{i=0}^{n} \eta_i P_i(x). \tag{53}$$

Ako znamo granice od η_i (npr. znamo točnost mjerenja $f(x_i)$), onda iz (53) možemo ocijeniti gornju ogradu pogreške. Napose, ako je $|\eta_i| \leqslant \eta$, dobivamo ocjenu

$$|\varepsilon| \leqslant \eta \sum_{i=0}^{n} |P_i(x)|. \tag{54}$$

Uočimo da (54) daje ocjenu uz pretpostavku da točno računamo vrijednosti polinoma P_i.

U slučaju linearne interpolacije

$$
\begin{aligned}
L_1(x) &= f(x_0)\frac{x-x_1}{x_0-x_1} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\\
&= f(x_0)\frac{x_1-x}{x_1-x_0} + f(x_1)\frac{x-x_0}{x_1-x_0}
\end{aligned}
$$

imamo $P_0(x) = \dfrac{x_1-x}{x_1-x_0}$ i $P_1(x) = \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}$, pa prema (54) za x između x_0 i x_1, tj. $x_0 < x < x_1$ imamo

$$
\begin{aligned}
\eta(|P_0(x)| + |P_1(x)|) &= \eta\Big(\Big|\frac{x_1-x}{x_1-x_0}\Big| + \Big|\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\Big|\Big)\\
&= \eta\frac{|x_1-x| + |x-x_0|}{|x_1-x_0|} = \eta\Big|\frac{x_1-x_0}{x_1-x_0}\Big| = \eta.
\end{aligned}
$$

Dobiveni rezultat kaže da kod linearne interpolacije pogreška izazvana netočnošću $f(x_0)$ i $f(x_1)$ ne prelazi tu netočnost, tj. pogreška u računanju $L_1(x)$ uzrokovana pogrešnim funkcijskim vrijednostima $f(x_0)$ i $f(x_1)$ ne prelazi pogrešku tih funkcijskih vrijednosti.

Napomena.

1) Dobiveni rezultat ne možemo primijeniti na korake Aitkenove šeme, jer npr. ako x nije između x_0 i x_1, onda to ne vrijedi za $L_{01}(x)$.

2) U gornjem razmatranju nisu uzete u obzir pogreške izračunavanja $P_i(x)$.

Neke daljnje primjene interpolacije. Inverzna interpolacija

Početni cilj je bio aproksimacija funkcije u točkama izvan čvorova. Međutim, aparat interpolacije može se primijeniti i na neke druge zadaće. Opisujemo ideju nekoliko takovih postupaka.

Ekstrem funkcije jedne varijable. Pretpostavimo da treba odrediti ekstrem funkcije jedne varijable i točku u kojoj funkcija poprima ekstrem. U prvom koraku sastavimo tablicu funkcijskih vrijednosti s velikim korakom i pogledajmo da li možemo locirati položaj ekstrema.

Ako x_0 ne možemo locirati, usitnimo korak i razmotrimo finiju tablicu, itd. Naravno, to ne možemo provoditi bez kraja i konca. U nekom koraku možemo kroz tri ili četiri čvora oko lociranog položaja ekstrema naći kvadratni ili kubični interpolacijski polinom. Zatim deriviramo taj polinom i odredimo položaj njegovog ekstrema koji aproksimira položaj ekstrema funkcije, dok vrijednost polinoma u toj točki aproksimira ekstrem funkcije.

Jednadžba s jednom nepoznanicom. Pregledavanjem tablica kao gore lociramo položaj rješenja jednadžbe $f(x) = 0$, tj. položaj nultočke od f. Kroz okolna dva ili tri čvora odredimo interpolacijski polinom prvog, odnosno drugog stupnja. Za dovoljno bliža čvorišta nultočka interpolacijskog polinoma aproksimira nultočku funkcije pa time rješavamo linearnu odnosno kvadratnu jednadžbu. To se može i iterirati tako da se dobivena nultočka uzme za novi čvor pri čemu se jedan stari čvor odbaci. To nas u slučaju linearne interpolacije vodi na metodu sekante, a u slučaju kvadratne interpolacije na tzv. Mullerovu metodu.

U slučaju invertibilne funkcije $y = f(x)$, tj. funkcije koja dopušta inverznu funkciju $x = g(y) = f^{-1}(y)$, rješavanje jednadžbe $f(x) = d$ svodi se na nalaženje funkcijske vrijednosti inverzne funkcije, tj. rješenje je jednako $f^{-1}(d)$. Taj slučaj ćemo komentirati nakon opisa inverzne interpolacije.

Inverzna interpolacija. Neka funkcija $y = f(x)$ dopušta inverznu u okolini od $y = d$ (f ne mora imati inverznu na cijeloj domeni, sjetite se trigonometrijskih funkcija), tj. na nekoj okolini od d imamo funkciju $x = g(y) = f^{-1}(y)$ tako da za y iz te okoline vrijedi $f(g(y)) = y$. Pođemo li od čvorova $(x_i, y_i = f(x_i))$, možemo ih shvatiti kao čvorove od g, tj. $(y_i, g(y_i))$ i naći interpolacijski polinom od g. Time dobivamo polinom $L_n(y)$, za koji naravno vrijedi

$$L_n(y_i) = x_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Opisani postupak nalaženja $L_n(y)$ zovemo **inverzna interpolacija**.

Vratimo li se na jednadžbu $f(x) = d$, onda je njeno rješenje jednako $x = c = g(d)$, čiju aproksimaciju dobivamo ako izračunamo $L_n(d)$, tj. dobili smo

$$c = g(d) = f^{-1}(d) \approx L_n(d).$$

Ovo napose može biti korisno ako u jednadžbi $f(x) = d$ variramo d.

Racionalna interpolacija

Pod racionalnom interpolacijom razumijevamo nalaženje racionalne funkcije

$$R(x) = \frac{P_p(x)}{Q_q(x)} \tag{55}$$

koja prolazi zadanim čvorovima $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, pri čemu su P_p i Q_q polinomi stupnja p, odnosno q. Neka je

$$\begin{aligned} P_p(x) &= a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \\ Q_q(x) &= b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \ldots + b_1 x + b_0. \end{aligned} \tag{56}$$

Da nađemo $R(x)$ treba iz uvjeta $R(x_i) = f(x_i)$ odrediti koeficijente a_k i b_k kojih ima ukupno $(p+1) + (q+1) = p + q + 2$. Kako se brojnik i nazivnik mogu pomnožiti istom konstantom to jedan koeficijent možemo izabrati, (obično se uzima $b_0 = 1$ ili $\sum b_k^2 = 1$), pa smo time ostali sa $p + q + 1$ nepoznatih koeficijenata. Prema tome da odredimo R trebamo toliko različitih čvorova koliko je i nepoznanica tj. $n + 1 = p + q + 1$, odnosno

$$n = p + q. \tag{57}$$

Opišimo praktični postupak rješavanja problema racionalne interpolacije. Pretpostavimo oblike (56) od P_p i Q_q i uvrstimo redom čvorove u (55)

$$R(x_i) = \frac{P_p(x_i)}{Q_q(x_i)} = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n = p + q.$$

Nakon množenja sa $Q_q(x_i)$ dobivamo homogen sustav linearnih jednadžbi

$$P_p(x_i) - f(x_i) Q_q(x_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{58}$$

Taj sustav ima uvijek netrivijalnih rješenja u nepoznanice a_k, b_k jer ima jednu nepoznanicu više. Nadalje, Q_q ne može biti identički nula u rješenju problema racionalne interpolacije.

Sljedeći korak je da provjerimo da li je Q_q nula u nekom čvoru. Ako nije, onda smo našli rješenje problema (55), tj. našli smo racionalnu funkciju koja prolazi zadanim čvorovima. To rješenje je jedinstveno do na množenje brojnika i nazivnika istim faktorom.

Ako je $Q_q(x_i) = 0$ za svaki čvor, onda formula (58) povlači da je i $P_p(x_i) = 0$. Iz toga slijedi da polinomi P_p i Q_q imaju $(x - x_i)$ kao zajednički faktor, koji možemo skratiti. Gotovo je izvjesno da u tom čvoru ne vrijedi $R(x_i) = f(x_i)$, pa ako se to dogodi onda nemamo rješenje problema.

Ipak se možemo pitati što smo to dobili u drugom slučaju, jer nakon skraćivanja imamo i dalje racionalnu funkciju. Radi kraćeg pisanja neka je x_0 jedini čvor u kome je $Q_q(x_0) = 0$. Tada dobivena racionalna funkcija prolazi kroz čvorove x_1, x_2, ..., x_n i predstavlja rješenje problema

$$R(x_i) = f(x_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

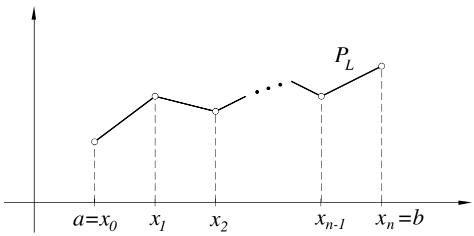
a ne polaznog. Naravno da se može dogoditi da je Q_p nula u više čvorova.

Na kraju spomenimo da za $q = 0$, tj. $Q_q = b_0 \neq 0$ dobivamo interpolacijski polinom kao poseban slučaj racionalne interpolacije.

1.2. Interpolacijski splajn

Promatrajmo funkciju $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ i čvorove $a = x_0$, x_1, ..., $x_n = b$. Na svakom segmentu $[x_{i-1}, x_i]$ možemo promatrati interpolacijski polinom 1. stupnja

$$L_{i1}(x) = \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} f(x_{i-1}) + \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} f(x_i), \qquad i = 1, \ldots, n-1, n. \tag{1}$$



Sl. 1.2.

Na slici 1.2 je skiciran graf Γ_L tako dobivene funkcije L, koja se još zove po dijelovima linearna funkcija. Istaknimo da je to neprekinuta funkcija, ali nije diferencijabilna. Time smo iz interpolacijskih polinoma 1. stupnja sastavili neprekinutu funkciju $L : [a, b] \to \mathbf{R}$, koja predstavlja izvjesnu aproksimaciju funkcije f. Uzmemo li više čvorova dobit ćemo bolju aproksimaciju. Ta se ideja proširuje i na polinome višeg stupnja. Promatrajmo segmente $[x_0, x_1]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ i označimo taj izbor čvorova sa Δ. Zamislimo da smo nad pojedinim segmentom $[x_{i-1}, x_i]$ našli polinom m-tog stupnja

$$P_{im}(x) = a_{i0} + a_{i1}x + \ldots + a_{im}x^m, \qquad x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i. \tag{2}$$

Od tih n polinoma zahtijevamo sljedeće: U početnom i krajnjem čvoru vrijedi $P_{1,m}(x_0) = f(x_0)$, odnosno $P_{n,m}(x_n) = f(x_n)$. U svakom nutarnjem čvoru x_i, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, polinomi P_{im} i $P_{i+1,m}$, tj. polinomi nad susjednim segmentima imaju redom: jednake vrijednosti i to jednake funkcijskoj vrijednosti u čvoru, jednake vrijednosti prvih derivacija, jednake vrijednosti drugih derivacija, i tako dalje sve do derivacija $(m-1)$-og reda. Zapisano formulama to izgleda ovako:

$$\begin{aligned}
P_{im}(x_{i-1}) &= f(x_{i-1}) && i = 1, 2, \ldots, n;\\
P_{im}(x_i) &= f(x_i) && i = 1, 2, \ldots, n;\\
P'_{im}(x_i) &= P'_{i+1,m}(x_i) && i = 1, 2, \ldots, n-1;\\
P''_{im}(x_i) &= P''_{i+1,m}(x_i) && i = 1, 2, \ldots, n-1;\\
&\vdots\\
P^{(m-1)}_{im}(x_i) &= P^{(m-1)}_{i+1,m}(x_i) && i = 1, 2, \ldots, n-1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Tako dobivena funkcija, označimo ju sa $S^m_{f,\Delta}$, zove se **interpolacijski splajn m-tog stupnja** (engl. *spline*). U oznaci $S^m_{f,\Delta}$ je istaknut red m, funkcija f i izbor čvorova Δ. Dakle, $S^m_{f,\Delta}$ je po dijelovima polinom m-tog stupnja čiji se dijelovi u unutarnjim čvorištima glatko nadovezuju. Jednadžbe (3) predstavljaju linearan sustav jednadžbi uz nepoznate koeficijente a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$. Sustav (3) ima ukupno $n(m+1)$ nepoznanica i $2n+(m-1)(n-1) = n(m+1)-(m-1)$ jednadžbi.

Sada vidimo da je za $m = 1$ funkcija L sa slike ništa drugo nego interpolacijski splajn prvog stupnja, tj. vrijedi $L = S^1_{f,\Delta}$. Sustav jednadžbi (3) poprima u tom slučaju oblik

$$\begin{aligned}
P_{i1}(x_{i-1}) &= a_{i0} + a_{i1}x_{i-1} = f(x_{i-1})\\
P_{i1}(x_i) &= a_{i0} + a_{i1}x_i = f(x_i).
\end{aligned} \tag{4}$$

To je sustav od $2n$ jednadžbi s $2n$ nepoznanica. Riješimo li taj sustav dobivamo

$$\begin{aligned}
a_{i1} &= \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\\
a_{i0} &= f(x_{i-1}) - a_{i1}x_{i-1}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Sredimo li (1) po potencijama od x, dobit ćemo formule (5), s time da je u drugoj formuli provedena supstitucija već poznatog koeficijenta a_{i1}. Spomenimo još da se interpolacijski splajn prvog stupnja koristi u trapeznoj formuli za aproksimaciju integrala, a koristi se i u drugim prilikama.

Ovdje ćemo još izvesti formule za koeficijente interpolacijskog splajna trećeg stupnja ili kraće **kubnog splajna** ne ulazeći u razlog koji posebno ističe važnost trećeg stupnja. Tražimo dakle $S^3_{f,\Delta}$. Polazimo od

$$P_{i3}(x) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + a_{i3}x^3, \quad x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Kako tražimo n polinoma trećeg stupnja vidimo da treba odrediti $4n$ nepoznatih koeficijenata a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 0, 1, 2, 3$. Jednadžbe (3) sada glase

$$\begin{aligned}
P_{i3}(x_{i-1}) &= f(x_{i-1}), && i = 1, 2, \ldots, n;\\
P_{i3}(x_i) &= f(x_i), && i = 1, 2, \ldots, n;\\
P'_{i3}(x_i) &= P'_{i+1,3}(x_i), && i = 1, 2, \ldots, n-1;\\
P''_{i3}(x_i) &= P''_{i+1,3}(x_i), && i = 1, 2, \ldots, n-1.
\end{aligned} \tag{7}$$

To su ukupno $4n-2$ jednadžbe s $4n$ nepoznanica a_{ij}.

Prema tome, linearnom sustavu (7) treba dodati još dvije jednadžbe. Njih dobivamo iz uvjeta koje zahtijevamo da vrijede na rubu. Uobičajeno ti uvjeti glase

$$\begin{aligned} P''_{13}(x_0) &= 0 \\ P''_{n3}(x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

$($i vode na tridijagonalni sustav$)$ tj. na krajevima segmenta zahtijevamo da je druga derivacija splajna $S^3_{f,\Delta}$ jednaka nuli. Da bi riješili sustav (7)–(8) uočimo sljedeće. Druga derivacija polinoma trećeg stupnja je polinom prvog stupnja. Iz $P''_{i3}(x_i) = P''_{i+1,3}(x_i)$ slijedi da je druga derivacija od $S^3_{f,\Delta}$ neprekidna po dijelovima linearna funkcija koju možemo shvatiti kao splajn prvog stupnja. Primijenimo (1) na P''_{i3}. To daje

$$P''_{i3}(x) = \frac{x-x_i}{x_{i-1}-x_i}P''_{i3}(x_{i-1}) + \frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}P''_{i3}(x_i) \quad \text{na} \quad [x_{i-1},x_i]. \tag{9}$$

Označimo li $h_i = x_i - x_{i-1}$, (9) prelazi u

$$P''_{i3}(x) = \frac{x_i-x}{h_i}P''_{i3}(x_{i-1}) + \frac{x-x_{i-1}}{h_i}P''_{i3}(x_i) \quad \text{na} \quad [x_{i-1},x_i]. \tag{10}$$

Uvedimo kraće oznake

$$P''_{i3}(x_i) = M_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

tako da (10) poprima oblik

$$P''_{i3}(x) = \frac{x_i-x}{h_i}M_{i-1} + \frac{x-x_{i-1}}{h_i}M_i \qquad \text{na} \quad [x_{i-1},x_i]. \tag{11}$$

Dvostrukom integracijom dobivamo

$$P_{i3}(x) = \frac{(x_i-x)^3}{6h_i}M_{i-1} + \frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}M_i + C_ix + D_i \tag{12}$$

gdje su C_i i D_i konstante integracije koje treba odrediti. Određujemo ih iz zadanih vrijednosti na rubovima, tj. iz $P_{i3}(x_{i-1}) = f(x_{i-1})$ i $P_{i3}(x_i) = f(x_i)$. Imamo dakle

$$\begin{aligned} f(x_{i-1}) &= \frac{(x_i-x_{i-1})^3}{6h_i}M_{i-1} + C_ix_{i-1} + D_i \\ f(x_i) &= \frac{(x_i-x_{i-1})^3}{6h_i}M_i + C_ix_i + D_i \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} C_ix_{i-1} + D_i &= f(x_{i-1}) - \frac{h_i^2}{6}M_{i-1} \\ C_ix_i + D_i &= f(x_i) - \frac{h_i^2}{6}M_i. \end{aligned} \tag{13}$$

Oduzmemo li prvu jednadžbu od druge dobivamo

$$C_i(x_i - x_{i-1}) = f(x_i) - f(x_{i-1}) + \frac{h_i^2}{6}(M_{i-1} - M_i)$$

ili

$$C_i = \frac{1}{h_i}\Big\{f(x_i) - f(x_{i-1}) + \frac{h_i^2}{6}(M_{i-1} - M_i)\Big\}.$$

Sada iz druge jednadžbe (13) imamo

$$D_i = f(x_i) - \frac{h_i^2}{6}M_i - \frac{x_i}{h_i}\Big\{f(x_i) - f(x_{i-1}) + \frac{h_i^2}{6}(M_{i-1} - M_i)\Big\}.$$

Izračunate vrijednosti od C_i i D_i uvrstimo sada u (12) tako da dobivamo

$$\begin{aligned}
P_{i3}(x) &= \frac{(x_i - x)^3}{6h_i}M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i}M_i + \frac{x}{h_i}\Big\{f(x_i) - f(x_{i-1}) + \frac{h_i^2}{6}(M_{i-1} - M_i)\Big\} \\
&\quad + f(x_i) - \frac{h_i^2}{6}M_i - \frac{x_i}{h_i}\Big\{f(x_i) - f(x_{i-1}) + \frac{h_i^2}{6}(M_{i-1} - M_i)\Big\} \\
&= \frac{(x_i - x)^3}{6h_i}M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i}M_i + \frac{x_i - x}{h_i}\Big\{f(x_{i-1}) - \frac{M_{i-1}}{6}h_i^2\Big\} \\
&\quad + \frac{x}{h_i}\Big[f(x_i) - \frac{h_i^2}{6}M_i\Big] + f(x_i) - \frac{h_i^2}{6}M_i - \frac{x_{i-1} + h_i}{h_i}\Big[f(x_i) - \frac{h_i^2}{6}M_i\Big] \\
&= \frac{(x_i - x)^3}{6h_i}M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i}M_i + \frac{x_i - x}{h_i}\Big\{f(x_{i-1}) - \frac{M_{i-1}h_i^2}{6}\Big\} \\
&\quad + \frac{x}{h_i}\Big[f(x_i) - \frac{h_i^2}{6}M_i\Big] + f(x_i) - \frac{h_i^2}{6}M_i - \frac{x_{i-1}}{h_i}\Big[f(x_i) - \frac{h_i^2}{6}M_i\Big] - f(x_i) + \frac{h_i^2}{6}M_i,
\end{aligned}$$

što nakon sređivanja glasi

$$\begin{aligned}
P_{i3}(x) &= \frac{(x_i - x)^3}{6h_i}M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i}M_i \\
&\quad + \frac{x_i - x}{h_i}\Big\{f(x_{i-1}) - \frac{M_{i-1}h_i^2}{6}\Big\} + \frac{x - x_{i-1}}{h_i}\Big\{f(x_i) - \frac{M_ih_i^2}{6}\Big\}
\end{aligned} \tag{14}$$

na $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. (14) predstavlja traženi splajn 3. stupnja $S_{f,\Delta}^3$ u kome su još ostali nepoznati parametri M_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Prisjetimo se da M_i predstavlja vrijednost druge derivacije splajna u čvoru x_i. Kako do sada nismo koristili uvjet na prve derivacije to ćemo ga sada upotrijebiti. Ti uvjeti glase

$$P_{i3}'(x_i) = P_{i+1,3}'(x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

To predstavlja $n-1$ jednadžbu s $n+1$ nepoznanica M_i, pa su nam potrebna dva dodatna uvjeta. To su uvjeti (8) koji određuju M_0 i M_n, tj.

$$P_{13}''(x_0) = M_0 = 0, \qquad P_{n3}''(x_n) = M_n = 0.$$

Deriviranjem (14) dobivamo

$$P_{i,3}'(x) = -\frac{(x_i - x)^2}{2h_i}M_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i}M_i + \frac{1}{h_i}\Big[f(x_i) - f(x_{i-1}) + \frac{h_i^2}{6}(M_{i-1} - M_i)\Big],$$

$$P_{i+1,3}'(x) = -\frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_{i+1}}M_i + \frac{(x - x_i)^2}{2h_{i+1}}M_{i+1} + \frac{1}{h_{i+1}}\Big[f(x_{i+1}) - f(x_i) + \frac{h_{i+1}^2}{6}(M_i - M_{i+1})\Big],$$

što za $x = x_i$ daje jednakost

$$\begin{aligned}
&\frac{h_i^2}{2h_i}M_i + \frac{1}{h_i}\Big[f(x_i) - f(x_{i-1}) + \frac{h_i^2}{6}(M_{i-1} - M_i)\Big] \\
&\qquad = -\frac{h_{i+1}^2}{2h_{i+1}}M_i + \frac{1}{h_{i+1}}\Big[f(x_{i+1}) - f(x_i) + \frac{h_{i+1}^2}{6}(M_i - M_{i+1})\Big].
\end{aligned}$$

Sredimo li tu jednakost po nepoznanicama M_i imamo

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_i}.$$

Time smo rješavanje sustava (7), koji je imao $4n$ nepoznanica, sveli na sustav od $n-1$ jednadžbe s $n-1$ nepoznanicom M_1, $M_2, \ldots, M_{n-1}$ koji glasi

$$\frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}M_i + \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_i}, \qquad (15)$$
$$i = 1, 2, 3, \ldots, n-1.$$

U matričnom zapisu

$$CM = d$$

je

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \end{bmatrix}, \qquad d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \end{bmatrix}$$

pri čemu je $d_i = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h_{i+1}} - \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_i}$ i

$$C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3+h_4}{3} & \frac{h_4}{6} & 0 & \ldots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}+h_n}{3} \end{bmatrix}$$

je tridijagonalna matrica (izgled matrice C sugerira naziv).

Elemente C možemo ovako zapisati

$$c_{ij} = \begin{cases} \dfrac{h_i}{6} & \text{za} \quad j = i-1, \\ \dfrac{h_i + h_{i+1}}{3} & \text{za} \quad j = i, \\ \dfrac{h_{i+1}}{6} & \text{za} \quad j = i+1, \\ 0 & \text{za} \quad |i-j| > 1. \end{cases}$$

Rješavanjem sustava (15) dobivamo tražene parametre M_i koje zatim uvrstimo u (14). Izraz u (14) predstavlja traženi splajn 3. stupnja na segmentu $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Postoje i sažeti zapisi kubnog splajna što nije od posebne koristi.