1. Skup kompleksnih brojeva

1. Algebarski prikaz kompleksnog broja

Kompleksan broj z poistovjećujemo s uređenim parom (x, y) realnih brojeva. Realni broj x naziva se **realni dio**, a realni broj y **imaginarni dio** kompleksnog broja z. Pišemo: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Dva su kompleksna broja $z_1 = (x_1, y_1)$ i $z_2 = (x_2, y_2)$ jednaka ako i samo ako vrijedi $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$.

Skup svih kompleksnih brojeva označavamo s $\mathbf{C}$. Na tom skupu definirane su operacije zbrajanja i množenja:

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2\ ,\ y_1 + y_2),$$
$$z_1 \cdot z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2\ ,\ x_1y_2 + y_1x_2).$$

Promotrimo podskup skupa $\mathbf{C}$, koji se sastoji od brojeva oblika $(x, 0)$. Za takva dva broja vrijedi

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0),$$
$$(x_1, 0) \cdot (x_2, 0) = (x_1x_2, 0).$$

Vidimo da zbrajanjem i množenjem dobivamo brojeve istog oblika i pritom se čuvaju algebarske operacije zbrajanja i množenja po prvoj komponenti. To znači da se brojevi oblika $(x, 0)$ ponašaju kao realni brojevi uronjeni u skup kompleksnih brojeva. Zato ćemo broj oblika $(x, 0)$ poistovjetiti s realnim brojem i označavati kratko s x. Dakle, skup kompleksnih brojeva $\mathbf{C}$ sadrži skup realnih brojeva $\mathbf{R}$ kao svoj pravi podskup.

Broj $(0, 1)$ nije realan. Nazivamo ga **imaginarnom jedinicom** i označavamo s i. Za taj broj vrijedi

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0).$$

Ovaj je umnožak realan, zato smijemo pisati $i^2 = -1$.

Prema definiciji operacija zbrajanja i množenja, imamo

$$(x, y) = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1).$$

Tu jednakost kratko pišemo na ovaj način:

$$z = x + yi.$$

Algebarski prikaz kompleksnog broja

Svaki se kompleksni broj z može napisati u obliku

$$z = x + yi, \tag{1}$$

gdje su x i y realni brojevi, a i **imaginarna jedinica**, kompleksni broj sa svojstvom $i^2 = -1$. $x = \operatorname{Re} z$ nazivamo **realni dio**, a $y = \operatorname{Im} z$ **imaginarni dio** kompleksnog broja z. Prikaz (1) naziva se **algebarski** (ili **standardni**) **prikaz** kompleksnog broja z.
Zbroj i umnožak kompleksnih brojeva računa se ovako:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2)i, \tag{2}$$
$$z_1 \cdot z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)i. \tag{3}$$

Skup $\mathbf{C}$ kompleksnih brojeva[1], uz ovako definirane operacije zbrajanja i množenja, čini **polje**. To znači da vrijede sljedeća svojstva:

Aksiomi polja kompleksnih brojeva

Teorem 1. *U skupu kompleksnih brojeva operacije zbrajanja i množenja imaju sljedeća svojstva:*

C_1 $\quad z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}$
(komutativnost zbrajanja),

C_2 $\quad z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$
(asocijativnost zbrajanja),

C_3 $\quad (\exists 0 \in \mathbf{C})\ z + 0 = z, \quad \forall z \in \mathbf{C}$
(neutralnost nule za zbrajanje),

C_4 $\quad (\forall z \in \mathbf{C})(\exists(-z) \in \mathbf{C})\ z + (-z) = 0$
(postojanje suprotnog broja),

C_5 $\quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbf{C}$
(komutativnost množenja),

C_6 $\quad z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3, \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$
(asocijativnost množenja),

C_7 $\quad (\exists 1 \in \mathbf{C})\ 1 \cdot z = z, \quad \forall z \in \mathbf{C}$
(neutralnost jedinice za množenje),

C_8 $\quad (\forall z \in \mathbf{C}, z \neq 0)(\exists z' \in \mathbf{C})\ z' \cdot z = 1$
(postojanje recipročnog broja),

C_9 $\quad z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3, \quad \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}$
(distributivnost množenja prema zbrajanju).

Ovdje je kompleksan broj 0 jednak paru $(0, 0)$, a suprotan broj $-z$ broja $z = (x, y)$ iznosi $(-x, -y)$. Oduzimanje kompleksnih brojeva definira se kao zbrajanje suprotnim brojem:

$$z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2) = (x_1, y_1) + (-x_2, -y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

[1] Definiciju kompleksnih brojeva kao uređenih parova dao je *William R. Hamilton*, irski matematičar (1805.–1965.) Ta se definicija temelji samo na svojstvima realnih brojeva, čime se izbjegava donekle nerazjašnjeni pojam broja $\sqrt{-1}$. S druge strane, zapis oblika $z = x + yi$ pogodniji je za računanje. No, najvažnije je zapravo znati da su oba oblika kompleksnog broja; $z = x + yi$ i $z = (x, y)$ zapravo potpuno ekvivalentna.

U svakom se polju dijeljenje definira kao množenje s inverznim elementom. Uvjerimo se da za svaki $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$, postoji recipročni broj (inverz) z'. Neka je $z = x + yi \neq 0$ bilo koji. Onda je $x^2 + y^2 \neq 0$ pa je dobro definiran broj

$$z' := \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{-y}{x^2 + y^2} i$$

i za nj vrijedi $z \cdot z' = z' \cdot z = 1$, što provjeravamo množenjem. Umjesto z' pišemo z^{-1} ili $1/z$.

2. Kompleksno-konjugirani brojevi

Kompleksan broj $\overline{z} = x - yi$ nazivamo **konjugiranim** broju $z = x + yi$. Također, broj z je konjugiran broju $\overline{z}$ i zato kažemo da brojevi z i $\overline{z}$ čine **par kompleksno-konjugiranih** brojeva. Njihovim zbrajanjem i oduzimanjem dobivamo

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \qquad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}). \tag{4}$$

Neposrednim računom lako je provjeriti da operacija kompleksnog konjugiranja ima svojstva:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}; \qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2};$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}; \qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

Primjer 1. Odredi sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi $\overline{z} = z^2$.

▷ Prikažimo broj z u algebarskom obliku: $z = x + iy$. Onda imamo

$$x - iy = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

Prema tome, x i y moraju zadovoljavati sustav

$$\begin{cases} x = x^2 - y^2, \\ y = 2xy, \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 - x - y^2 = 0, \\ (2x + 1)y = 0. \end{cases}$$

Druga je jednadžba zadovoljena za $x = -\frac{1}{2}$ ili $y = 0$. Uvrstimo li $x = -\frac{1}{2}$ u prvu jednadžbu, dobivamo $y^2 = \frac{3}{4}$, što daje $y_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Uvrstimo li pak $y = 0$ u prvu jednadžbu, dobivamo $x^2 - x = 0$ i odavde $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. Postoje dakle četiri rješenja:

$$z_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 1. \quad \triangleleft$$

3. Modul kompleksnog broja

Umnožak broja z i njemu kompleksno-konjugiranog broja $\bar{z}$ uvijek je realan broj:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2.$$

Modul kompleksnog broja

Modul ili **apsolutna vrijednost** kompleksnog broja z je realan nenegativan broj

$$|z| := \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{5}$$

Vrijedi $z = 0$ ako i samo ako je $|z| = 0$. Ako je $z \neq 0$, onda je njegov modul pozitivan realni broj.

Ako je $z \neq 0$, primijetimo da se $\frac{1}{z}$ može pisati ovako

$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Dijeljenje kompleksnih brojeva jest množenje s inverznim brojem:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + (x_2 y_1 - x_1 y_2) i}{x_2^2 + y_2^2}$$

Primjer 2. Ako je $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$ i $z_1 z_2 \neq -1$, dokaži da je $z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ realan broj.

▷ Broj z je realan ako i samo ako vrijedi $z = \bar{z}$. Prema uvjetima, imamo

$$1 = |z_1|^2 = z_1 \bar{z}_1\,, \qquad 1 = |z_2|^2 = z_2 \bar{z}_2.$$

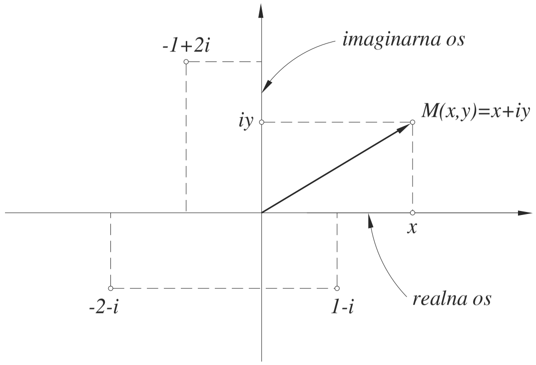
Zato je, koristeći pravila konjugiranja,

$$\bar{z} = \frac{\bar{z}_1 + \bar{z}_2}{1 + \bar{z}_1 \bar{z}_2} \cdot \frac{z_1 z_2}{z_1 z_2} = \frac{\bar{z}_1 z_1 z_2 + \bar{z}_2 z_1 z_2}{z_1 z_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_2 z_1 z_2} = \frac{z_2 + z_1}{z_1 z_2 + 1} = z$$

i z je realan. ◁

4. Kompleksna ravnina

Svakom kompleksnom broju $z = x + iy$ odgovara uređeni par realnih brojeva (x, y). Želimo li grafički prikazati kompleksan broj, prirodno je pridružiti takvom broju točku $M(x, y)$ u ravnini $\mathbf{R}^2$. Tako skup $\mathbf{C}$ možemo geometrijski poistovjetiti s ravninom u koju je uveden Kartezijev koordinatni sustav.

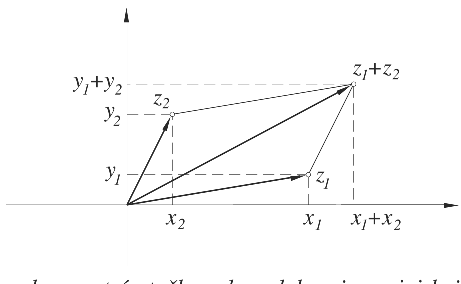


Sl. 1.1. Svakoj točki $M(x,y)$ Kartezijeve ravnine odgovara kompleksni broj $z = x+iy$. Na osi apscisa nalaze se realni brojevi, na osi ordinata imaginarni.

Os Ox Kartezijeva sustava u ravnini naziva se **realna os** u $\mathbf{C}$. Na njoj (i samo na njoj) leže realni brojevi. Os Oy naziva se **imaginarna os**. Ona sadrži **imaginarne brojeve** — kompleksne brojeve čiji je realni dio jednak nuli. Ovu ravninu nazivamo **kompleksna ravnina** ili **Gaussova ravnina** [1] .

5. Kompleksni broj kao vektor

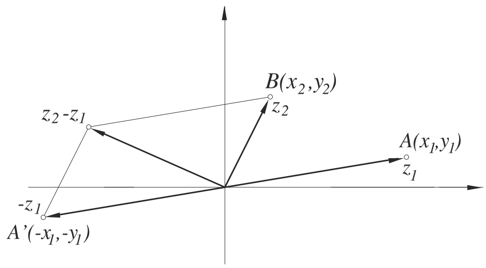
Kompleksni se brojevi pri operacijama zbrajanja, oduzimanja i množenja realnim brojem ponašaju baš kao i vektori. Kompleksnom broju $z = x + iy$ odgovara vektor s početkom u ishodištu i završetkom u točki (x, y). Ako su zadana dva broja; $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, onda broju $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$ odgovara točka u kompleksnoj ravnini dobivena 'pravilom paralelograma' (slika 1.2). Njene su koordinate $T(x_1+y_1, x_2+y_2)$.



Sl. 1.2. Zbroju $z_1 + z_2$ odgovarat će točka u kompleksnoj ravnini koja predstavlja četvrti vrh paralelograma čija su prva tri vrha u ishodištu i u točkama $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

Oduzimanje kompleksnih brojeva možemo interpretirati kao zbrajanje sa suprotnim brojem (brojem s negativnim predznakom). Tako je $z_2 - z_1 = z_2 + (-z_1)$. Razlika $z_2 - z_1$ predočuje broj koji spaja 'završetke' brojeva z_1 i z_2, i usmjerena je ka z_2 (slika 1.3).

[1] Kompleksna se ravnina naziva još i Argandova ravnina, prema francuskom matematičaru *Jeanu Robertu Argandu* (1768.–1822.) koji je među prvima predložio takav prikaz kompleksnih brojeva. Argand je po zanimanju bio knjižničar, samouk u matematici.



Sl. 1.3. Razlika kompleksnih brojeva također se može interpretirati pravilom paralelograma; tri vrha paralelograma leže u ishodištu, u točki $B(x_2, y_2)$ te u točki $A'(-x_1, -y_1)$, koja je simetrična točki A s obzirom na ishodište

Apsolutna vrijednost $|z|$ kompleksnog broja $z = x+iy$ odgovara (euklidskoj) udaljenosti točke (x, y) od ishodišta. Neka su zadana dva kompleksna broja; $z_1 = x_1 + iy_1$ i $z_2 = x_2 + iy_2$. Tada vrijedi

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

te je $|z_1 - z_2|$ udaljenost između točaka z_1 i z_2 u kompleksnoj ravnini.

6. Nejednakost trokuta

Modul kompleksnog broja zadovoljava sljedeću nejednakost:

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$

koju nazivamo **nejednakost trokuta**.

Dokaz ove nejednakosti, kao i obrazloženje njezina imena vidimo na slici. Iz trokuta OAB je naime

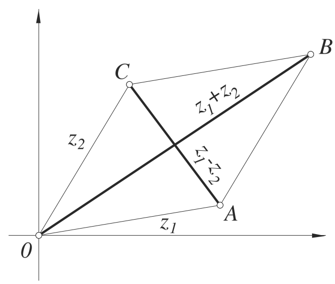
$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$

jer je duljina stranice trokuta manja od zbroja duljina preostalih dviju.

Na istoj slici vidimo da vrijedi i sljedeća nejednakost

$$|z_1 - z_2| \geqslant \big|\,|z_1| - |z_2|\,\big|,$$

jer je duljina bilo koje stranice trokuta uvijek veća od razlike duljina preostalih dviju stranica.



Sl. 1.4. Geometrijska interpretacija brojeva $|z_1 + z_2|$ i $|z_1 - z_2|$

7. Trigonometrijski prikaz kompleksnoga broja

Položaj točke M u ravnini obično opisujemo njezinim **Kartezijevim koordinatama**, koje dobivamo ortogonalnim projiciranjem te točke na koordinatne osi. Kartezijeve su koordinate vezane uz algebarski prikaz kompleksnog broja. Međutim, ista se točka može opisati i pomoću drugih dvaju podatka; **polarnih koordinata**: udaljenosti r točke od ishodišta i kuta φ koji radijvektor točke zatvara s pozitivnim dijelom realne osi.

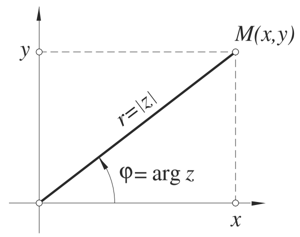
Odredimo vezu između Kartezijevih i polarnih koordinata. Sa slike 1.5 čitamo:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases} \tag{6}$$

Odavde slijedi

$$x + iy = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi). \tag{7}$$

Ovaj se prikaz kompleksnog broja naziva **trigonometrijski prikaz** broja z.



Sl. 1.5. Položaj točke M opisuju Kartezijeve koordinate (x, y), ali i polarne koordinate (r, φ).

Kvadriranjem i zbrajanjem veza u (6) dobivamo

$$x^2 + y^2 = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi),$$

odakle je

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Prema tome, r je modul kompleksnog broja, dakle *nenegativan realni broj*, a jednak je nuli samo ako točka M padne u ishodište.

Mjeru kuta φ nazivamo **argument** kompleksnog broja. On nije jednoznačno određen, jer je mjera kuta određena do na višekratnik od 2π. Tako na primjer podaci $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$ te $r = 2$, $\varphi = \frac{9\pi}{4}$ određuju istu točku.

Označit ćemo s $\arg(z)$ mjeru kuta unutar intervala $[0, 2\pi\rangle$, a s $\mathrm{Arg}(z)$ skup $\{\arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ svih mjera kuta φ.

Dijeljenjem jednadžbi u (6) (ili pak očitavanjem sa slike) dobivamo za $x \neq 0$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{y}{x}.$$

Odavde se računa kut φ. Pritom treba paziti na kvadrant u kojem se nalazi broj z.

Trigonometrijski prikaz kompleksnog broja

Svaki se kompleksni broj može prikazati u obliku

$$z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi). \tag{8}$$

Tu je r **modul** kompleksnog broja z. Kut φ nazivamo **argument** kompleksnog broja. Vrijedi

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \varphi = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}. \tag{9}$$

Primjer 3. Prikaži u trigonometrijskom obliku brojeve $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2$.

▷ Vrijedi

$$\begin{aligned} r &= |1 - i| = \sqrt{2}, \\ \operatorname{tg}\varphi &= \frac{-1}{1} = -1. \end{aligned}$$

Broj z_1 nalazi se u četvrtom kvadrantu, pa je $\varphi = \dfrac{7\pi}{4}$. Tako dobivamo

$$z_1 = 1 - i = \sqrt{2}\Big(\cos\frac{7\pi}{4} + i\,\sin\frac{7\pi}{4}\Big).$$

Za drugi je broj $|z_2| = |-2| = 2$, a njegov je argument $\varphi = \pi$:

$$z_2 = -2 = 2(\cos\pi + i\,\sin\pi). \quad \triangleleft$$

* * *

Izaberimo bilo koja dva kompleksna broja (različita od nule) i prikažimo ih u trigonometrijskom obliku:

$$\begin{aligned} z_1 &= r_1\big(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1\big), \\ z_2 &= r_2\big(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2\big). \end{aligned}$$

Korištenjem adicijskog teorema za trigonometrijske funkcije, za njihov umnožak dobivamo izraz:

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2\big(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1\big)\big(\cos\varphi_2 + i\,\sin\varphi_2\big) \\ &= r_1r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 \\ &\qquad + i\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2] \\ &= r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Ove formule predstavljaju trigonometrijski prikaz broja z_1z_2. Njegov je modul r_1r_2, a argument $\varphi_1 + \varphi_2$. Zato vrijedi

$$|z_1z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \tag{10}$$

$$\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \tag{11}$$

U izrazu (11) moguće je da zbroj argumenata premaši vrijednost 2π i tada od zbroja treba oduzeti 2π.

Množenje kompleksnih brojeva

Kompleksni brojevi prikazani u trigonometrijskom obliku množe se tako da im se pomnože moduli, a argumenti zbroje:

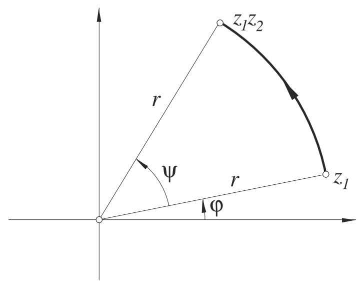
$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \tag{12}$$

* * *

Neka je z_2 kompleksan broj modula 1, tj. $z_2 = \cos\psi + i\,\sin\psi$. Pokažimo da množenje kompleksnog broja z_1 s brojem z_2 geometrijski odgovara rotaciji broja z_1 oko ishodišta za kut ψ u pozitivnom smjeru. Ako je $z_1 = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$, onda je

$$z_1 z_2 = r[\cos(\varphi+\psi) + i\,\sin(\varphi+\psi)].$$

Međutim, ovo je kompleksan broj istog modula kao i z_1, čiji je argument uvećan za ψ, dakle, to je broj z_1 zarotiran za kut ψ (u pozitivnom smjeru).



Sl. 1.6. Množenjem s kompleksnim brojem modula 1 i argumenta ψ, broj z_1 rotira se za kut ψ

Primjer 4. Odredi kompleksni broj koji se dobije rotacijom broja $-\sqrt{3} - i$ oko ishodišta za kut $2\pi/3$.

▷ Množenjem kompleksnoga broja z_1 s brojem $\cos\alpha + i\,\sin\alpha$, rotiramo ga oko ishodišta za kut α. U zadatku je $z_1 = -\sqrt{3} - i$, $\alpha = 2\pi/3$. Zato je

$$z = z_1\Big(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\sin\frac{2\pi}{3}\Big) = (-\sqrt{3} - i)\Big(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big) = \sqrt{3} - i. \quad \triangleleft$$

8. Dijeljenje kompleksnih brojeva

Formula slična onoj za množenje vrijedi i za operaciju dijeljenja. Odredimo najprije trigonometrijski prikaz broja $\dfrac{1}{z}$ ako je $z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{1}{r\big(\cos\varphi + i\,\sin\varphi\big)} = \frac{1}{r\big(\cos\varphi + i\,\sin\varphi\big)} \cdot \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi} \\ &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\,\sin(-\varphi)]. \end{aligned} \tag{13}$$

Iz ovog prikaza vidimo da je modul ovog broja $\dfrac{1}{r}$, a argument $-\arg z$:

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{r}, \qquad \arg\Big(\frac{1}{z}\Big) = -\arg z. \tag{14}$$

Iskoristimo sad ove formule da bismo prikazali dijeljenje kompleksnih brojeva prikazanih u trigonometrijskom obliku.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = r_1\big(\cos\varphi_1 + i\,\sin\varphi_1\big)\cdot\frac{1}{r_2}\big(\cos(-\varphi_2) + i\,\sin(-\varphi_2)\big)\\ &= \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).\end{aligned}$$

Dijeljenje kompleksnih brojeva

Kompleksne brojeve dijelimo tako da im podijelimo module, a argumente oduzmemo:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\,\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big). \tag{15}$$

9. Potenciranje kompleksnih brojeva

Pokazali smo da se kompleksni brojevi z_1 i z_2 množe ovako:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Uvrstimo ovdje $z_1 = z_2$. Dobivamo

$$z^2 = r^2\big(\cos 2\varphi + i\,\sin 2\varphi\big).$$

Primjenom iste formule slijedi:

$$\begin{aligned}z^3 &= z^2\cdot z = r^2\big(\cos 2\varphi + i\,\sin 2\varphi\big)\cdot r\big(\cos\varphi + i\,\sin\varphi\big)\\ &= r^3\big(\cos 3\varphi + i\,\sin 3\varphi\big).\end{aligned}$$

Indukcijom zaključujemo da vrijedi sljedeća formula:

De Moivreova formula

Za svaki prirodni broj n vrijedi **De Moivreova formula**

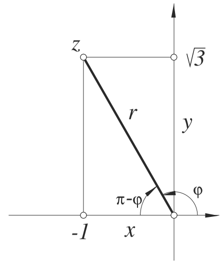
$$z^n = r^n\big(\cos n\varphi + i\,\sin n\varphi\big). \tag{16}$$

Iz nje čitamo:

$$|z^n| = |z|^n, \tag{17}$$
$$\arg(z^n) = n\arg z. \tag{18}$$

[0] Abraham de Moivre (1667.–1754.), engleski matematičar

Primjer 5. Izračunaj $(-1+i\sqrt{3})^{60}$.



Sl. 1.7.

▷ Prikažimo $-1+i\sqrt{3}$ u trigonometrijskom obliku. On se nalazi u drugom kvadrantu i vrijedi

$$r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2,$$

$$\operatorname{tg}(\pi-\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{1}=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}.$$

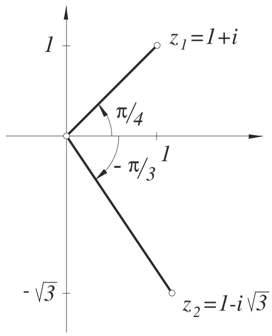
Dakle, $r=2$, $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$:

$$-1+i\sqrt{3}=2\Big(\cos\frac{2\pi}{3}+i\,\sin\frac{2\pi}{3}\Big).$$

Sada možemo primijeniti de Moivreovu formulu (12)

$$\begin{aligned}(-1+i\sqrt{3})^{60}&=2^{60}\left[\cos(60\cdot\frac{2\pi}{3})+i\,\sin(60\cdot\frac{2\pi}{3})\right]\\&=2^{60}\left[\cos(40\pi)+i\,\sin(40\pi)\right]=2^{60}.\end{aligned}$$ ◁

Primjer 6. Izračunaj $\dfrac{(1+i)^{16}}{(1-i\sqrt{3})^9}$.



Sl. 1.8.

▷ Prikažimo najprije brojeve

$$z_1=1+i \text{ i } z_2=1-i\sqrt{3}$$

u trigonometrijskom obliku:

$$\begin{aligned}z_1&=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\sin\frac{\pi}{4}),\\z_2&=2\big[\cos(2\pi-\frac{\pi}{3})+i\,\sin(2\pi-\frac{\pi}{3})\big]\\&=2\left[\cos(-\frac{\pi}{3})+i\,\sin(-\frac{\pi}{3})\right].\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}\frac{(1+i)^{16}}{(1-i\sqrt{3})^9}&=\frac{(\sqrt{2})^{16}[\cos(16\cdot\frac{\pi}{4})+i\,\sin(16\cdot\frac{\pi}{4})]}{2^9[\cos(-9\cdot\frac{\pi}{3})+i\,\sin(-9\cdot\frac{\pi}{3})]}\\&=\frac{1}{2}\left[\cos(16\cdot\frac{\pi}{4}+9\cdot\frac{\pi}{3})+i\,\sin(16\cdot\frac{\pi}{4}+9\cdot\frac{\pi}{3})\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\cos(7\pi)+i\,\sin(7\pi)\right]=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$ ◁

10. Korjenovanje kompleksnih brojeva

Korijen pozitivnog realnog broja ima samo jednu vrijednost i ta je vrijednost pozitivan realni broj: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{5} = 2{,}236\cdots$ itd. Isto se događa za bilo koji korijen pozitivnog broja s prirodnim radikandom: $\sqrt[4]{16} = 2$, $\sqrt[5]{32} = 2$, $\sqrt[6]{16} = 1{,}587\cdots$. Ovaj korijen nazivamo **aritmetički korijen** realnog broja.

Također znamo da jednadžbe poput $x^2 - 4 = 0$ imaju *dva realna rješenja*, od kojih je jedno $2 = \sqrt{4}$, a drugo suprotnog predznaka. Isto se dešava i s jednadžbama drugoga stupnja koja nemaju realnih rješenja. Tako na primjer, jednadžba $x^2 + 4 = 0$ ima rješenja $2i$ i $-2i$. U ovom slučaju pri rješavanju moramo odrediti vrijednost korijena negativnog broja -4. Ovaj se pojam korijena razlikuje od prije navedenog *aritmetičkog korijena* (iako se zapisuje na isti način) jer aritmetički korijen negativnog broja ne postoji. Tu je korisno za prošireni pojam korijena uzeti da on ima *dvije različite vrijednosti*. Tako oba rješenja jednadžbe $x^2 = -4$ možemo napisati u obliku $x = \sqrt{-4}$, pri čemu drugom korijenu pridjeljujemo dvije različite vrijednosti.

Korijen kompleksnog broja

n-ti korijen kompleksnoga broja z je svako rješenje jednadžbe $w^n = z$. Pišemo $w = \sqrt[n]{z}$.

Pokazat ćemo da za $z \neq 0$ uvijek postoji n različitih njegovih n-tih korijena. Uobičajeno je da se korijen kompleksnoga broja označava istim simbolom kao i aritmetički korijen realnog broja i to može ponekad izazvati zabunu. Ako je z realan broj, na primjer $z = 8$, tada je 2 jedini aritmetički treći korijen ovog broja, dok kompleksni korijen $\sqrt[3]{8}$ ima tri vrijednosti, 2, $-1 + i\sqrt{3}$ i $-1 - i\sqrt{3}$.

* * *

Odredimo sad izraz za n-ti korijen kompleksnog broja z, $z \neq 0$. Stavimo $w = \sqrt[n]{z}$, tj. $z = w^n$ i prikažimo te brojeve u trigonometrijskom obliku:

$$z = r\Big(\cos\varphi + i\,\sin\varphi\Big),$$
$$w = \rho\Big(\cos\psi + i\,\sin\psi\Big).$$

Tad iz

$$r\Big(\cos\varphi + i\,\sin\varphi\Big) = \rho^n\Big(\cos n\psi + i\,\sin n\psi\Big)$$

slijedi:

$$\begin{aligned} \rho^n &= r &&\Longrightarrow \rho = \sqrt[n]{r}, \\ n\psi &= \varphi + 2k\pi &&\Longrightarrow \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}. \end{aligned}$$

U ovoj je formuli $\sqrt[n]{r}$ aritmetički n-ti korijen pozitivnog broja r, to je pozitivan realni broj.

U izrazu za argument ψ, k uzima sve cjelobrojne vrijednosti. No to ne znači da ćemo dobiti beskonačno mnogo *različitih* vrijednosti za argument ψ, jer će se nakon nekog vremena te vrijednosti razlikovati za višekratnik od 2π pa će stoga definirati isti kompleksni broj. Uvrštavanjem redom za $k = 0, 1, \dots, n-1$ dobivamo sljedeće *različite* vrijednosti argumenta ψ:

$$\frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi + 2\pi}{n}, \dots, \quad \frac{\varphi + 2(n-1)\pi}{n}.$$

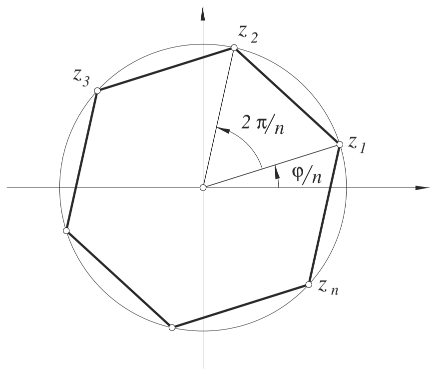
Prva sljedeća vrijednost je $\dfrac{\varphi + 2n\pi}{n} = \dfrac{\varphi}{n} + 2\pi$ i ona daje isti argument kao i $\dfrac{\varphi}{n}$. Sve naredne vrijednosti mogu se također dobiti iz gornjih vrijednosti dodavanjem višekratnika broja 2π. Isto vrijedi i za negativne brojeve k.

Računanje korijena kompleksnog broja

Postoji točno n različitih vrijednosti n-toga korijena kompleksnog broja z:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\,\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\Big), \; k = 0, 1, \dots, n-1. \tag{19}$$

Svi ti brojevi imaju isti modul, pa leže na kružnici sa središtem u ishodištu i polumjerom $\sqrt[n]{r}$. Argumenti uzastopna dva broja razlikuju se za $2\pi/n$. Zato tih n brojeva određuju pravilan n-terokut u kompleksnoj ravnini.



Sl. 1.9. Svi n-ti korijeni kompleksnoga broja različitog od nule vrhovi su pravilnoga n-terokuta sa središtem u ishodištu. Polumjer n-terokuta iznosi $\sqrt[n]{r}$, a argument prvoga od njih je φ/n

Primjer 7. Odredi sve vrijednosti korijena $\sqrt[4]{-4}$.

▷ Broj -4 u trigonometrijskom obliku ima prikaz $-4 = 4(\cos\pi + i\,\sin\pi)$, pa je

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{-4} &= \sqrt[4]{4}\,\Big(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + i\,\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\Big),\\ &= \sqrt{2}\,\Big(\cos\frac{(2k+1)\pi}{4} + i\,\sin\frac{(2k+1)\pi}{4}\Big), \quad k = 0, 1, 2, 3.\end{aligned}$$

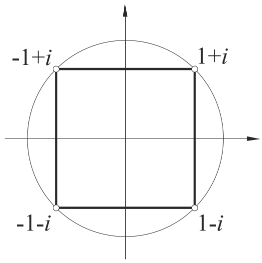
Dobivamo sljedeće četiri vrijednosti:

$$k=0:\quad z_1=\sqrt{2}\,\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\sin\frac{\pi}{4}\Big)=1+i,$$

$$k=1:\quad z_2=\sqrt{2}\,\Big(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\sin\frac{3\pi}{4}\Big)=-1+i,$$

$$k=2:\quad z_3=\sqrt{2}\,\Big(\cos\frac{5\pi}{4}+i\,\sin\frac{5\pi}{4}\Big)=-1-i,$$

$$k=3:\quad z_4=\sqrt{2}\,\Big(\cos\frac{7\pi}{4}+i\,\sin\frac{7\pi}{4}\Big)=1-i.\ \triangleleft$$



Sl. 1.10.

Primjer 8. Odredi sve vrijednosti korijena $\sqrt[3]{-1+i}$ i prikaži ih u kompleksnoj ravnini.

$\triangleright$ Napišimo broj $-1+i$ u trigonometrijskom obliku:

$$-1+i=\sqrt{2}\,(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\sin\frac{3\pi}{4}).$$

Prema tome, modul i argument ovog kompleksnog broja su

$$r=|-1+i|=\sqrt{2},$$
$$\varphi={}^{3\pi}/_{4}$$

pa prema (19) dobivamo

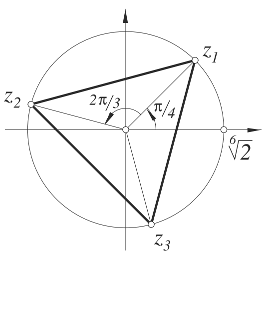
$$\sqrt[3]{-1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\Big(\cos\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}+i\,\sin\frac{3\pi/4+2k\pi}{3}\Big)$$
$$=\sqrt[6]{2}\Big[\cos\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\Big)+i\,\sin\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{2k\pi}{3}\Big)\Big],\quad k=0,1,2.$$

Postoje tri vrijednosti ovog korijena:

$$k=0:\qquad z_1=\sqrt[6]{2}\,\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\,\sin\frac{\pi}{4}\Big),$$

$$k=1:\qquad z_2=\sqrt[6]{2}\,\Big(\cos\frac{11\pi}{12}+i\,\sin\frac{11\pi}{12}\Big),$$

$$k=2:\qquad z_3=\sqrt[6]{2}\,\Big(\cos\frac{19\pi}{12}+i\,\sin\frac{19\pi}{12}\Big).$$



Sl. 1.11. Treći korijeni kompleksnog broja $-1+i$ leže u vrhovima jednakostraničnog trokuta na slici.

11. Korijeni iz jedinice

Kako je i broj 1 kompleksan, i on će imati n različitih vrijednosti n-toga korijena. Ti su brojevi dani formulama

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{20}$$

Za $k = 0$ dobivamo vrijednost $\varepsilon_0 = 1$. Ako je n paran, pa je recimo $n = 2m$, onda se na gornjem popisu nalazi i realni broj $\varepsilon_m = -1$. Svi su ostali brojevi kompleksni (s imaginarnim dijelom koji nije nula).

Geometrijski, brojevi ε_k su afiksi vrhova pravilnog n-terokuta polumjera 1, čiji se jedan vrh nalazi u točki $(1, 0)$.

Izdvojimo vrijednost ovog korijena koja odgovara broju $k = 1$ i označimo ga kratko s ε; dakle $\varepsilon = \varepsilon_1$:

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Svi ostali korijeni mogu se dobiti potenciranjem ovog broja i vrijedi

$$\varepsilon_2 = \varepsilon^2, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon^3, \ldots, \quad \varepsilon_{n-1} = \varepsilon^{n-1}.$$

Primijetimo da je

$$\varepsilon^n = \cos\frac{2n\pi}{n} + i\sin\frac{2n\pi}{n} = 1 = \varepsilon_0.$$

Stoga se skup svih korijena iz jedinice može napisati na način:

$$G_n = \{1, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}\} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}\}.$$

Umnožak bilo kojih dvaju elemenata iz ovog skupa jednak je

$$\varepsilon_j \cdot \varepsilon_k = \varepsilon^j \cdot \varepsilon^k = \varepsilon^{j+k} = \varepsilon^l = \varepsilon_l,$$

gdje je l ostatak pri dijeljenju broja $j + k$ s n. To znači da je umnožak dva n-ta korijena iz jedinice ponovo n-ti korijen iz jedinice.

Iz jednakosti $\varepsilon^k \cdot \varepsilon^{n-k} = \varepsilon^n = 1$ zaključujemo da je ε_{n-k} inverzni broj broja ε_k.

* * *

Neka je z bilo koji kompleksni broj i w_k bilo koji od njegovih n-tih korijena. Iz formula

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\Big) \\ &= \sqrt[n]{r}\Big(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\Big) \cdot \Big(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\Big) \\ &= w_1 \cdot \varepsilon_k \end{aligned}$$

zaključujemo da vrijedi: svaki se korijen bilo kojeg kompleksnog broja može dobiti tako da se jedna njegova vrijednost pomnoži brojem ε_k. Kako je pak ε_k potencija prvoga korijena ε, sve se vrijednosti n-toga korijena mogu dobiti formulom

$$w_1, \quad w_1\varepsilon, \quad w_1\varepsilon^2, \ldots, w_1\varepsilon^{n-1}.$$